

Title	値域を含む定義域をもつ閉作用素(線型作用素論とその周辺)
Author(s)	太田, 昇一
Citation	数理解析研究所講究録 (1986), 582: 125-129
Issue Date	1986-02
URL	<a href="http://hdl.handle.net/2433/99318">http://hdl.handle.net/2433/99318</a>
Right	
Type	Departmental Bulletin Paper
Textversion	publisher

## 値域を含む定義域をもつ閉作用素

九大理 太田昇一 (Schôichi Ôta)

1. 非有界微分分子 [2] および非有界作用素環 [1] に関連して、値域が定義域に含まれる (すなわち、定義域を不変にする) ような閉作用素の有界性について [3] において、議論したが、まず始めにその復習から始める。

定理 1.  $\mathcal{H}$  を Hilbert space とし、 $T$  を densely defined, closed (linear) operator in  $\mathcal{H}$  とします。  $T$  が定義域  $\mathcal{D}(T)$  を不変にする i.e.,  $T\mathcal{D}(T) \subset \mathcal{D}(T)$  とする。もしも、十分大なる  $\lambda$  に対して ( $\lambda \in \mathbb{R}$ ),  $(\lambda I - T)\mathcal{D}(T)$  が closed ならば、 $T$  は bounded (i.e.,  $\mathcal{D}(T) = \mathcal{H}$ ) 。

証明.  $\mathcal{D}(T)$  に、

$$(x, y)_T \equiv (x, y) + (Tx, Ty) \quad (x, y \in \mathcal{D}(T))$$

でもって、内積を  $\lambda$  すると、Hilbert space になる。これを、 $\{\mathcal{D}(T), (\cdot, \cdot)_T\}$  でかくことにする。あきらかに  $T$  は、この新しい Hilbert space  $\{\mathcal{D}(T), (\cdot, \cdot)_T\}$  における closed operator だから、closed graph theorem より、 $T$  はこの space での

bounded operator になる。よって spectral theory の十分大きい  $\lambda$  に対して  $(\lambda I - T) \mathcal{D}(T) = \mathcal{D}(T)$ 。故に  $\mathcal{D}(T) = \mathcal{H}$  を得る。

特に、 $T$  が dissipative ならば、定理の仮定を満たすから、

### 系 2 [3].

(1).  $T$  が densely defined, closed dissipative operator in  $\mathcal{H}$  のとき、もしも  $T \mathcal{D}(T) \subset \mathcal{D}(T)$  ならば  $T$  は bounded である。

(2).  $T$  が densely defined, closed operator in  $\mathcal{H}$  とせよ。もしも  $T \mathcal{D}(T) \subset \mathcal{D}(T^*)$  ならば、 $T$  は bounded である。

2. closed (linear) operator で 定義域を不変にする unbounded なものは、多く存在する。その代表的な例として、idempotent がある。このような unbounded な idempotent は [4] の §4 における dual pair の解析に重要な役を演じた。ここでは一般の unbounded, closed operator で 定義域を不変にするもののもつ性質を述べる。

命題 3 [3].  $T$  を densely defined, closed operator in  $\mathcal{H}$  で、定義域を不変にするとせよ。このとき、

(1).  $\mathcal{D}(T) \cap \mathcal{D}(T^*)$  は  $T$  の core である。

(2). もしも、 $T$  が unbounded ならば、 $W(T) = \mathbb{C}$ ,  
ここに、 $W(T)$  は  $T$  の numerical range i.e.,  $W(T) \equiv$   
 $\{(Tx, x) ; \|x\|=1, x \in \mathcal{D}(T)\}$  を示す。

3. 上で述べた densely defined, unbounded closed idempotent  $T$  は  $(T^*)^2 = T^*$  をみたすから、 $T^*$  も又その定義域を不変にしている。定義域を不変にするような closed operator で unbounded な典型的な例 ([3]) の共役作用素  $T^*$  もやはり  $T^* \mathcal{D}(T^*) \subset \mathcal{D}(T^*)$  を満たしている。そこで、次のような question を考える：

□  $T$  を densely defined, closed linear operator in a Hilbert space  $\mathcal{H}$  で  $T \mathcal{D}(T) \subset \mathcal{D}(T)$  を満たすとせよ。このとき、 $T^*$  も同じ性質 i.e.,  $T^* \mathcal{D}(T^*) \subset \mathcal{D}(T^*)$  が成り立つか？

この question に対して我々は counter-example を構成出来るが、以下では、そのことを述べる。

各  $\xi \in \mathcal{H}$  に対して、rank-one operator  $e_\xi$  を

$$e_\xi(\eta) \equiv (\eta, \xi)\xi \quad (\eta \in \mathcal{H})$$

で定義すると、明らかに  $e_\xi^* = e_\xi$  .

定理 4.  $\mathcal{H} \in$  Hilbert space とし,  $T$  を unbounded densely defined, closed linear operator in  $\mathcal{H}$  such that  $T \mathcal{D}(T) \subset \mathcal{D}(T)$  とする。このとき, 以下の性質をもつ  $\mathcal{H}$  上の bounded linear operator  $K$  が存在する:

$$T_K \equiv T + K \text{ とおいたとき,}$$

$$T_K \mathcal{D}(T_K) \subset \mathcal{D}(T_K) \text{ だが}$$

$$T_K^* \mathcal{D}(T_K^*) \not\subset \mathcal{D}(T_K^*).$$

証明.  $T$  は unbounded より  $\mathcal{D}(T) \neq \mathcal{D}(T^*)$  ( $\because$  系 2 の (2)). ゆえに  $\exists \xi \in \mathcal{D}(T)$  but  $\xi \notin \mathcal{D}(T^*)$  として  $K$  とし

$$K \equiv \mathcal{E}_\xi$$

とおく。この  $K$  が求めるものであることを以下示せば良い。

$\xi \in \mathcal{D}(T)$  より  $T_K = T + K$  が  $\mathcal{D}(T_K) = \mathcal{D}(T)$  を不変にしていることは明らかである。

又  $T_K^* = T^* + \mathcal{E}_\xi$  より, もしも  $T_K^*$  が  $\mathcal{D}(T_K^*) = \mathcal{D}(T^*)$  を不変にするならば,  $\xi \notin \mathcal{D}(T^*)$  に矛盾する。

## References

1. G. Lassner , Topological algebras of operators ,  
Rep. Math. Phys. 3 (1972), 279-293.
2. S. Ôta , Closed derivations in  $C^*$ -algebras,  
Math. Ann. 257 (1981), 239-250.
3. ——— , Unbounded closed linear operators  
with domain containing their range, Proc. Edinburg  
Math. Soc. 27 (1984), 227-233.
4. ——— , Unbounded representations of a  $*$ -algebra  
on indefinite metric space. preprint (1985).
5. M. H. Stone , Linear transformations in Hilbert  
space and their applications to analysis, Amer. Math.  
Soc. Collog. Publ. 15, Providence, R. I. (1932).