数理解析研究所講究録
582巻 1986年 125-129

値域を含む定義域をもつ閉作用素

九大 理 太田昇一 (Schôichi Ôta)

1. 非有界微分子[2]および非有界作用素環[1]に関連して、値域が定義域に含まれる(すなわち、定義域を不変にする)ような閉作用素の有界性について[3]において、議論したが、まず始めにその復習からはじめる。

__定理1.__ $\mathcal{H}$ を Hilbert space とし、T を *densely defined, closed (linear) operator in* $\mathcal{H}$ とします。T が定義域 $\mathcal{D}(T)$ を不変にする i.e., $T\mathcal{D}(T) \subset \mathcal{D}(T)$ とする。もしも、十分大なる λ に対して ($\lambda \in \mathbb{R}$), $(\lambda I - T)\mathcal{D}(T)$ が *closed* ならば、T は *bounded* (i.e., $\mathcal{D}(T) = \mathcal{H}$)。

__証明__. $\mathcal{D}(T)$ に、

$$(x, y)_T \equiv (x, y) + (Tx, Ty) \qquad (x, y \in \mathcal{D}(T))$$

でもって、内積を入れると、Hilbert space になる。それを、$\{\mathcal{D}(T), (\cdot, \cdot)_T\}$ でかくことにする。あきらかに T は、この新しい Hilbert space $\{\mathcal{D}(T), (\cdot, \cdot)_T\}$ における *closed operator* だから、*closed graph theorem* より、T はこの space での

bounded operator になる。 よって spectral theory より十分大きい λ に対して $(\lambda I-T)\mathcal{D}(T)=\mathcal{D}(T)$. 故に $\mathcal{D}(T)=\mathcal{H}$ を得る。

特に、Tが dissipative ならば、定理の仮定を満たすから、

系 2 [3].

(1). T が densely defined, closed dissipative operator in $\mathcal{H}$ のとき, もしも $T\mathcal{D}(T)\subset\mathcal{D}(T)$ ならば T は bounded である。

(2). T が densely defined, closed operator in $\mathcal{H}$ とせよ。もしも $T\mathcal{D}(T)\subset\mathcal{D}(T^*)$ ならば、T は bounded である.

2. closed (linear) operator で 定義域を不変にする unbounded なものは、多く存在する。 その代表的な例として、idempotent がある。 このような unbounded な idempotent は [4] の §4 における dual pair の解析に重要な役を演ずる。 ここでは 一般の unbounded, closed operator で 定義域を不変にするもののもつ性質を、述べる。

命題 3 [3]. T を densely defined, closed operator in $\mathcal{H}$ で, 定義域を不変にするとせよ。 このとき,

(1). $\mathcal{D}(T)\cap\mathcal{D}(T^*)$ は T の core である。

(2). もしも、T が unbounded ならば、$W(T)=\mathbb{C}$,
ここに、$W(T)$ は T の numerical range i.e., $W(T)\equiv\{(Tx,x)\ ;\ \|x\|=1,\ x\in\mathcal{D}(T)\}$ を示す。

3. 上で述べた densely defined, unbounded closed idempotent T は $(T^*)^2=T^*$ をみたすから，T^*も又その定義域を不変にしている。定義域を不変にするような closed operator で unbounded な典型的な例 ([3]) の共役作用素 T^* もやはり $T^*\mathcal{D}(T^*)\subset\mathcal{D}(T^*)$ を満たしている。そこで，次のような question を考える：

「T を densely defined, closed linear operator in a Hilbert space $\mathcal{H}$ で $T\mathcal{D}(T)\subset\mathcal{D}(T)$ を満たすとせよ。このとき，T^* も同じ性質 i.e., $T^*\mathcal{D}(T^*)\subset\mathcal{D}(T^*)$ が成り立つか？」

この question に対して我々は counter-example を構成出来るが、以下では、そのことを述べる。

各 $\xi\in\mathcal{H}$ に対して，rank-one operator e_ξ を

$$e_\xi(\eta)\equiv(\eta,\xi)\xi \qquad (\eta\in\mathcal{H})$$

で定義すると、明らかに $e_\xi^*=e_\xi$.

<u>定理4.</u> $\mathcal{H}$をHilbert spaceとし，Tを<u>unbounded</u> densely defined, closed linear operator in $\mathcal{H}$ such that $T\mathcal{D}(T) \subset \mathcal{D}(T)$ とする。このとき，以下の性質をもつ$\mathcal{H}$上のbounded linear operator Kが存在する：

$T_K \equiv T + K$ とおいたとき，

$$T_K \mathcal{D}(T_K) \subset \mathcal{D}(T_K) \text{ だが}$$

$$T_K^* \mathcal{D}(T_K^*) \not\subset \mathcal{D}(T_K^*).$$

<u>証明</u>. Tはunbounded より $\mathcal{D}(T) \neq \mathcal{D}(T^*)$ ($\because$ 系2の(2))．ゆえに $\exists\, \xi \in \mathcal{D}(T)$ but $\xi \notin \mathcal{D}(T^*)$

そこで Kとして

$$K \equiv e_\xi$$

とおく。このKが求めるものであることを以下示せば良い。

$\xi \in \mathcal{D}(T)$ より $T_K = T + K$ が $\mathcal{D}(T_K) = \mathcal{D}(T)$ を不変にしていることは明らかである。

又 $T_K^* = T^* + e_\xi$ より．もしも T_K^* が $\mathcal{D}(T_K^*) = \mathcal{D}(T^*)$ を不変にするならば，$\xi \notin \mathcal{D}(T^*)$ に矛盾する．

References

1. G. Lassner, Topological algebras of operators, Rep. Math. Phys. 3 (1972), 279–293.
2. S. Ôta, Closed derivations in C^*-algebras, Math. Ann. 257 (1981), 239–250.
3. ———, Unbounded closed linear operators with domain containing their range, Proc. Edinburg Math. Soc. 27 (1984), 229–233.
4. ———, Unbounded representations of a $*$-algebra on indefinite metric space. preprint (1985).
5. M. H. Stone, Linear transformations in Hilbert space and their applications to analysis, Amer. Math. Soc. Colloq. Publ. 15, Providence, R.I. (1932).