

Title	Reflexivity and bicommutant property of contractions
Author(s)	高橋, 勝利
Citation	数理解析研究所講究録 (1986), 582: 119-124
Issue Date	1986-02
URL	http://hdl.handle.net/2433/99319
Right	
Type	Departmental Bulletin Paper
Textversion	publisher

Reflexivity and bicommutant property of contractions

札幌医大 高橋勝利 (Katsutoshi Takahashi)

Hilbert 空間上の (有界線形) 作用素 T に対して, T と I で生成される weakly closed algebra を $\text{Alg } T$ で表わし, T の bicommutant, すなわち, T の commutant $\{T\}'$ の commutant, を $\{T\}''$ で表わす。また $\text{Lat } T$ は T -不変 (閉) 部分空間の全体, として $\text{Alg } \text{Lat } T = \{A : \text{Lat } T \subseteq \text{Lat } A\}$ とする。明らかに $\text{Alg } T \subseteq \text{Alg } \text{Lat } T$, $\text{Alg } T \subseteq \{T\}''$ が成り立つ。等式 $\text{Alg } T = \text{Alg } \text{Lat } T$ が成り立つとき T は reflexive であるといい, $\text{Alg } T = \{T\}''$ のとき T は bicommutant property をもつという。reflexive である作用素の最初の例は Sarason [4] によって与えられた, すなわち, 彼は normal 作用素と analytic Toeplitz 作用素が reflexive であることを証明した。続いて Deddens [2] により isometry の reflexivity が示された, として今いろいろのクラスの作用素に対して reflexivity が知られている。特に subnormal 作用素は

reflexiveである (Olin - Thomson)。一方, non-unitary isometry は bicommutant property をもつ [9], そして normal 作用素, quasinormal 作用素の中でこの性質をもつ作用素が特徴づけられている (Wermer, Turner, Conway-Wu)。ここでは Sz.-Nagy と Foias [5] の縮小作用素の理論の応用として得られる reflexivity と bicommutant property についての結果を与える。この方向での研究はすでに内山 ([10], [11]) として Wu ([13], [14], [15], [16], [17]) によつて行なわれているが, 我々の結果は彼らの結果を特別な場合として含む。

以下では, T を Hilbert 空間上の縮小作用素 (i.e. $\|T\| \leq 1$), S を Hardy 空間 H^2 上の unilateral shift (i.e. $(Sf)(\lambda) = \lambda f(\lambda)$, $f \in H^2$) とする。

定理 1. もし $XT = SX$ なる作用素 $X \neq 0$ が存在するならば, T は reflexive であり ([1]), bicommutant property をもつ ([6])。

注意 1. isometry の Wold 分解より, $XT = VX$ なる non-unitary isometry V と dense range をもつ作用素 X が存在するならば, T は定理 1 の仮定を満たす。

注意 2. T が絶対連続な unitary part をもつとて, 定理 1 の証明は $\text{Alg } T$ が Sz.-Nagy - Foias の H^∞ -functional

calculus)により定まる作用素の全体 $\{\varphi(T) : \varphi \in H^\infty\}$ と一致することを示す。

系1. $T = S \oplus T_1$ ならば, T は reflexive であり ([16]), bicommutant property をもつ。

[12] と [8] の結果から次の定理が得られる。

定理2. $I - T^*T$ が trace class 作用素で $\sigma(T) = \{\lambda : |\lambda| \leq 1\}$ ならば, $XT = SX$ または $XT^* = SX$ なる作用素 $X \neq 0$ が存在する。

従って,

系2. $I - T^*T$ が trace class かつ $\sigma(T) = \{\lambda : |\lambda| \leq 1\}$ ならば, T は reflexive かつ bicommutant property をもつ。

$I - T^*T$ が finite rank をもつ場合, 系2 はある付加的条件の下で内山 ([10], [11]) と Wu ([13], [14], [17]) により証明された。 $I - T^*T$ が trace class 作用素でかつ $\sigma(T) = \{\lambda : |\lambda| \leq 1\}$ なる縮小作用素は weak contraction と呼ばれ詳しく研究されている。reflexivity, bicommutant property をもつ weak contraction はその特性関数

$$\Theta_T(\alpha) = [-T + \lambda D_{T^*} (I - \lambda T^*)^{-1} D_T] | \overline{\text{ran } D_T}, (|\lambda| < 1)$$

を用いて特徴づけられる。ここで, $D_T = (I - T^*T)^{1/2}$,

$$D_{T^*} = (I - T T^*)^{1/2}.$$

reflexivity について系1 は次のようにも一般化される。

定理3. [7] $T|_{M}$ が unilateral shift となるような T -不変部分空間 $M \neq \{0\}$ が存在するならば, T は reflexive である。

注意. 定理3の T は bicommutant property をもたない限りはない, 例之は, $T = \text{bilateral shift}$ は bicommutant property をもたない。

系3. T が bilateral shift summand をもたれば, T は reflexive である。

可分 Hilbert 空間上の縮小作用素 T に対し, T の特性関数 $\Theta_T(\lambda)$ は contraction-valued, H^∞ -function であるから, ほとんどいける所で境界値 $\Theta_T(e^{it})$, $\|\Theta_T(e^{it})\| \leq 1$, が存在する。isometric part をもつ縮小作用素を特徴づける Sz.-Nagy と Foias の結果を用うと次の系を得る。

系4. T は可分 Hilbert 空間上の縮小作用素とする。次の条件 (i), (ii), (iii) の一つが成り立つとす, T は reflexive である。

(i) $I - \Theta_T(e^{it})^* \Theta_T(e^{it}) = A(e^{it})^* A(e^{it})$ a.e. なる operator-valued H^∞ -function $A \neq 0$ が存在する。

(ii) $\sup \|\Theta_T(e^{it})\| < 1$

(iii) $u \Theta_T^*$ (ここで, $\Theta_T^*(e^{it}) = (\Theta_T(e^{it}))^*$) が operator-valued H^∞ -function となるような scalar-valued H^∞ -function $u \neq 0$ が存在する (特に, Θ_T が 99 項式である)。もし T の

completely non-unitary part は C_{00} -縮小作用素でない,
すなわち, $T = U \oplus T_1$, ここで U : unitary, T_1 : unitary
part をもたない縮小作用素, かつ $T_1^n \rightarrow 0$ または
 $T_1^{*n} \rightarrow 0$.

特性関数が定値関数である縮小作用素の reflexivity は [15]
で証明された。

定理 1 と 3 を次のように一般化できるかどうかは分かって
いない; $T|_{M^c}$ が定理 1 の仮定をみたすような T -不変部分
空間 $M^c \neq \{0\}$ が存在するならば, T は reflexive である。

注意, C_{11} -縮小作用素, すなわち, unitary 作用素に
quasimimilar な縮小作用素は一般に reflexive かどうかは
分かっていないが, そのような縮小作用素に対して上の命題
は証明された [3]。

文 献

1. H. Bercovici and K. Takahashi, On the reflexivity of con-
tractions on Hilbert space, J. London Math. Soc., to appear.
2. J. A. Deddens, Every isometry is reflexive, Proc. Amer. Math.
Soc. 28(1971), 509-512.
3. L. Kerchy, On the residual parts of completely nonunitary
contractions, preprint.
4. D. Sarason, Invariant subspaces and unstarred operator
algebras, Pacific J. Math. 17(1966), 511-517.
5. B. Sz.-Nagy and C. Foias, Harmonic analysis of operators on
Hilbert space, North-Holland, Amsterdam, 1970.

6. K. Takahashi, Contractions with the bicommutant property, Proc. Amer. Math. Soc. 93(1985), 91-95.
7. _____, On the reflexivity of contractions with isometric parts, preprint.
8. K. Takahashi and M. Uchiyama, Every C_{00} contraction with Hilbert-Schmidt defect operator is of class C_0 , J. Operator Theory 10(1983), 331-335.
9. T. R. Turner, Double commutants of isometries, Tohoku Math. J. 24(1972), 547-549.
10. M. Uchiyama, Double commutants of C_0 contractions, Proc. Amer. Math. Soc. 69(1978), 283-288.
11. _____, Double commutants of C_0 contractions. II, Proc. Amer. Math. Soc. 74(1979), 271-277.
12. _____, Contractions and unilateral shifts, Acta Sci. Math. 46(1983), 345-356.
13. P. Y. Wu, Approximate decompositions of certain contractions, Acta Sci. Math. 44(1982), 137-149.
14. _____, On the reflexivity of C_1 contractions and weak contractions, J. Operator Theory 8(1982), 209-217.
15. _____, Contractions with constant characteristic functions are reflexive, J. London Math. Soc. (2)29(1984), 533-544.
16. _____, Contractions with a unilateral shift summand are reflexive, Integral Equations and Operator Theory 7(1984), 899-904.
17. _____, Toward a characterization of reflexive contractions, J. Operator Theory 13(1985), 73-86.