数理解析研究所講究録
582巻 1986年 100-111

作用素単調関数と Donoghue の定理

大阪教育大 藤井 淳一 (Jun Ichi Fujii)

Donoghueによって扱われたヒルベルト空間のノルムの補間と，その積分表示定理[3]を，作用素関数の立場，さらには作用素平均の立場から見ると，作用素凹関数の議論になり，自然に対応する作用素単調関数の議論が展開できる。

したがって，まずヒルベルト空間上の正作用素の平均と，作用素関数の対応の話から始めよう。

1. 作用素関数と作用素平均

ここで扱う作用素関数のクラスは，次の2種類である。

OM： $[0,\infty)$ 上の非負作用素単調関数全体

即ち，$f\in OM \iff 0\leq A\leq B \Longrightarrow 0\leq f(A)\leq f(B)$.

OC： $[0,1]$ 上の非負作用素凹関数全体

即ち，$k\in OC \iff 0\leq A,\ B\leq 1$

$$\Longrightarrow 0\leq \frac{k(A)+k(B)}{2}\leq k\left(\frac{A+B}{2}\right).$$

特に，連続性を仮定したsub-classを，それぞれ，COM，COCと書くことにする。

作用素平均の話は，Ando [1] に始まり，

$$\text{幾何平均}\quad A\,g\,B = \max\left\{ X \geqq 0 \;\middle|\; \begin{pmatrix} A & X \\ X & B \end{pmatrix} \geqq 0 \right\}$$

$$\text{調和平均}\quad A\,h\,B = \max\left\{ X \geqq 0 \;\middle|\; \begin{pmatrix} 2A & 0 \\ 0 & 2B \end{pmatrix} \geqq \begin{pmatrix} X & X \\ X & X \end{pmatrix} \right\}$$

が導入された。A，Bが可換ならば，通常の数の平均にもちろん対応している。また，調和平均は，回路網理論で重要な概念である「平行和（parallel sum）」の2倍にあたるものである。さらに，[4]，[5]，[6] にあるように，算術平均（$A\,a\,B = \frac{A+B}{2}$）とあわせてみれば，算術幾何平均，算術調和平均（実は幾何平均）が定義でき，前述の平均と同様の性質をもつことがわかった。その中で特に重要な性質であり，後に Kubo-Ando [11] によって公理化される3つの性質をあげると，作用素平均 m に対し

(M1)　$A \leqq C,\ B \leqq D \Rightarrow A\,m\,B \leqq C\,m\,D$　（単調性）

(M2)　$A_n \downarrow A,\ B_n \downarrow B \Rightarrow A_n\,m\,B_n \downarrow A\,m\,B$　（半連続性）

(M3)　$C^*(A\,m\,B)C \leqq C^*AC\,m\,C^*BC$　（transformer inequality）

が満たされる。ここでは，(M1)－(M3) を満たす正作用素上の二項演算 m を「平均」と呼ぶことにする。

これらの性質から得られる平均の性質をみてみよう。(M2) の条件から，作用素平均は，可逆な作用素の平均に帰着され

ることがわかる： $A\,m\,B = \text{s-}\lim_{n\to\infty}(A+\frac{1}{n})\,m\,(B+\frac{1}{n})$

また，可逆な作用素 C に対し，(M3)を使って

$$C^*AC\,m\,C^*BC = C^*C^{*-1}(C^*AC\,m\,C^*BC)C^{-1}C \leqq C^*(A\,m\,B)C \leqq C^*AC\,m\,C^*BC$$

より，$C^*(A\,m\,B)C = C^*AC\,m\,C^*BC$ が得られるので，A が可逆な正作用素ならば

$$A\,m\,B = A^{\frac{1}{2}}(\,1\,m\,A^{-\frac{1}{2}}BA^{-\frac{1}{2}})A^{\frac{1}{2}}$$

と変形できるので，本質的には $f(x) = 1\,m\,x$ という非負実数値関数の話になる。さらに，$0 \leqq A \leqq B$ ならば

$$0 \leqq f(A) = 1\,m\,A \leqq 1\,m\,B = f(B)$$

から，$f \in OM$，(M2) より $f \in COM$ となる。

実際，Kubo-Ando [11] によって，平均全体，COM，$\mathbb{R}^+$上の正値ラドン測度の3者の間に，次の関係式で順序同型が存在する事が示された：

$$1\,m\,x = f(x) = \int_0^\infty \frac{x\,(1+t)}{x+t}\,d\mu(t)$$

一方，Pusz-Woronowicz [12] によって，半双線型形式の平均が論じられていたが，そのアナロジーを辿って，作用素平均からながめると，単位的 C^*-環上の正値線型形式の平均が導入できる [7]：

φ，ψ を C^*-環 $\mathcal{A}$ 上の正値線型形式とするとき，

$$\mathcal{N} = \{\,A \in \mathcal{A} \mid \varphi(A^*A) + \psi(A^*A) = 0\,\}$$

は，閉左イデアルになり，$\mathcal{A}/\mathcal{N}$ に内積

$$\langle A^\circ, B^\circ \rangle = \varphi(B^*A) + \psi(B^*A) \quad ({}^\circ \text{は} \mathcal{A} \to \mathcal{A}/\mathcal{N} \text{の q.map})$$

が定義でき、この内積による$\mathcal{A}/\mathcal{N}$の完備化を$\mathcal{H}$とする。
絶対連続性から，$\mathcal{H}$上の正作用素H，Kで

$$\varphi(B^*A) = \langle HA^\circ, B^\circ \rangle \quad , \quad \psi(B^*A) = \langle KA^\circ, B^\circ \rangle$$

となるもの（ラドン・ニコディムの微係数）が存在する。
すると，

$$\begin{aligned} \langle A^\circ, B^\circ \rangle &= \langle HA^\circ, B^\circ \rangle + \langle KA^\circ, B^\circ \rangle \\ &= \langle HA^\circ, B^\circ \rangle + \langle (1-H)A^\circ, B^\circ \rangle \end{aligned}$$

と変形できるので，正値線型形式の平均として

$$(\varphi\, m\, \psi)(A) = \langle H m (1-H) A^\circ, 1^\circ \rangle$$

という定義ができる。ここでの平均は，正縮小作用素Hと，
$[0,1]$上の実数値関数 $k(x) = x\, m\, (1-x)$ の話である。
この関数kの性質を調べると，$k \in$ COCであることがわかり，平均mを介して

$$f(x) = 1\, m\, x = (1+x)\left(\frac{1}{1+x}\, m\, \frac{x}{1+x}\right) = (1+x)\, k\left(\frac{1}{1+x}\right)$$

の関係式で，COMと1 to 1に対応する。

以上のように，作用素の平均，COM，COC，Radon測度の4者は同等の概念であることがわかった。この視点に立って，これから述べるDonoghueの定理を見れば，自然に作用素単調関数版の定理が得られるし，もう一つの作用素平均の側面が見られるだろう。

2. Donoghue型の定理

Donoghueは1967年の論文[3]で，ヒルベルト空間のノルムの補間を作用素にやき直して論じている。2つのノルムを$\| \ \|_a$，$\| \ \|_b$としたとき，標準のノルムとして

$$\|x\|^2 = \|x\|_a^2 + \|x\|_b^2$$

を考えると，前章の議論と同様に，ラドン・ニコディムの微係数として，次のような正縮小作用素Hが存在する：

$$\|x\|^2 = (x, x) = (Hx, x) + ((1-H)x, x)$$

補間はこのように，Hと1−Hの補間の話になる。作用素の話に定義を書き直せば，$0 \leqq H \leqq 1$に対し，

定義．K：exact interpolation of H （$K \in EI(H)$と書く）

$$\rightleftarrows \quad T^*HT \leqq H,\ T^*(1-H)T \leqq 1-H \Rightarrow T^*KT \leqq K.$$

（ここでexactの意味は$T^*KT \leqq aK$の$a = 1$のこと）

このとき，Donoghueの定理を，作用素関数で書き直すと，

Donoghueの定理　$K \in EI(H) \Leftrightarrow {}^{\exists}k \in OC\ ;\ k(H) = K$.

自然な対応として，$H \geqq 0$に対し

定義．K：exact subinterpolation of H （$K \in ES(H)$と書く）

$$\rightleftarrows \quad T^*HT \leqq H,\ T^*T \leqq 1 \Longrightarrow T^*KT \leqq K$$

と定めれば，アナロジーを辿って

定理．$K \in ES(H) \Longleftrightarrow {}^{\exists}f \in OM\ ;\ f(H) = K$　[8]

が得られる。証明をすべて述べることはできないが，Donoghue

の証明の改良と紹介を兼ねて，アウトラインを述べよう。

根底には次の平均の不等式がある。たとえば定理の方なら

$$T^*HT \leqq H,\ T^*T \leqq 1 \quad \text{なる} T \text{に対し，}$$

$$T^*KT = T^*(1mH)T \leqq T^*T\,m\,T^*HT \leqq 1mH = K,$$

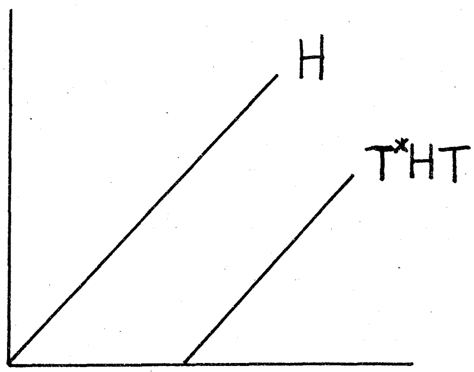
ただし，Hは可逆とする。けれども，Hは可逆としてもよいことがわかるので，⟸の証明はこれでよい。

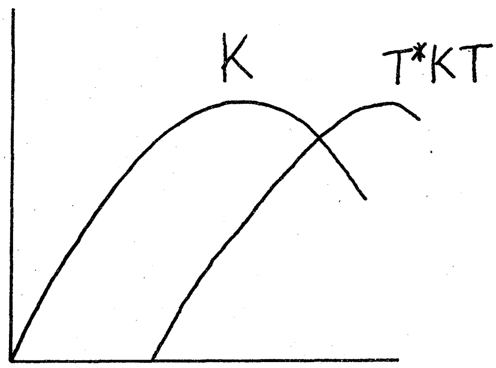
逆に，$K \in ES(H)$をとれば　$H \smile U$：ユニタリに対し，

$$U^*HU = H,\ U^*U = 1 \quad \text{より，} U^*KU \leqq K,$$

同様に　$H \smile U^*$だから$UKU^* \leqq K$　が得られ，$K \leqq U^*KU$から　$K = U^*KU$，即ち　$K \smile U$　がわかる。したがって，Kは，Hのbi-commutant H''に入るので　$f(H) = K$となる，$\sigma(H)$上の有界可測関数fが存在する。当然証明はfが$\sigma(H)$の上で作用素単調であることを示し，さらに$[0, \infty)$に拡張可能であることを示すという二段階になる。

まずfの初等的な性質を見ていこう。fは，非負で連続で単調非減少となることがわかるが，たとえば，単調非減少を示す場合，イメージ的には次ページの左図のように，T^*とTではさむと，Hを右側へずらすようなTを考えておく。すると，もしKが右図のように減少する部分をもてば，T^*KTをKがおさえられないようになってしまう。連続性も同じようなテクニックで示すことができる。





さらに、Hが可逆のときは明らかに、fはリプシッツ関数となる。このことを利用し，ユニタリ同値な作用素で近似していくことによって，次の補題を得る。

<u>補題1</u>． $f(H)\in ES(H),\ \sigma(H')=\sigma(H) \Longrightarrow f(H')\in ES(H')$

スペクトルが等しいという条件は，容易に $\sigma(H')\subset\sigma(H)$ に変えられる。この形の補題がDonoghue [3]では重要なのだが，それはimplicitに次のような事実を示すからである。

<u>補題2</u>． fは $\sigma(H)$ 上で作用素単調である．

（証明） $0\leqq A\leqq B$， $\sigma(A),\sigma(B)\subset\sigma(H)$ に対し，
$L=\begin{pmatrix}A&0\\0&B\end{pmatrix}$ を考えると，$\sigma(L)\subset\sigma(H)$ だから補題1より $f(L)\in ES(L)$ となる。特に，$T=\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}$ に対し，
$T^*T\leqq 1$， $T^*LT=\begin{pmatrix}0&0\\0&A\end{pmatrix}\leqq\begin{pmatrix}A&0\\0&B\end{pmatrix}=L$ を満たすから

$$\begin{pmatrix}0&0\\0&f(A)\end{pmatrix}=T^*f(L)T\leqq f(L)=\begin{pmatrix}f(A)&0\\0&f(B)\end{pmatrix}$$

となり，(2,2) 成分を比較すれば $f(A)\leqq f(B)$ を得る。

//

さて，次は作用素単調関数を $[0,\infty)$ に拡張するわけだが，都合よくも，Donoghue は 1966 年の論文 [2] で拡張するための同値条件を求めていた。特に有限の $\sigma(H)=\sigma$ に対し，H は可逆だから，$\sigma^*=\{\frac{1}{\lambda}\mid\lambda\in\sigma\}$ が定められる。このとき，

<u>Donoghue の拡張定理</u>　$f\in OM$ の必要十分条件は，次の3つの関数が，同時に3つの条件を満たすことである：

(i) $\tilde{f}$：作用素単調 on $\sigma\cup\{0\}$ $\left(\tilde{f}(0)=0,\ \tilde{f}(x)=f(x)\ (x\neq 0)\right)$

(ii) f^*：作用素単調 on $\sigma^*\cup\{0\}$ $\left(f^*(0)=0,\ f^*(x)=\frac{1}{f(1/x)}\ (x\neq 0)\right)$

(iii) f°：作用素単調 on $\sigma^*\cup\{0\}$ $\left(f^\circ(0)=0,\ f^\circ(x)=\frac{x}{f(1/x)}\ (x\neq 0)\right)$

この f^* と f° は，もし作用素平均を知らなければ，非常にわかりにくく，この定理のフォーミュレーションが理解しにくい。ところが，$f(x)=1\,m\,x$ という平均を経由すると，

$$f^*(x)=\frac{1}{f(1/x)}=(1\,m\,x^{-1})^{-1}$$ となり，

実は，平均 m の <u>adjoint</u> $A\,m^*\,B=(A^{-1}\,m\,B^{-1})^{-1}$ に対応する。(たとえば，算術平均と調和平均は互いに他の adjoint で，幾何平均は，adjoint 不変である。) また，

$$f^\circ(x)=\frac{x}{f(1/x)}=x(1\,m\,x^{-1})^{-1}=(x\,m\,1)^{-1}$$ より

実は，平均 m の <u>transpose</u> $A\,m^\circ\,B=B\,m\,A$ に対応している。

したがって，拡張定理の(i)は，小さい方への拡張，(ii)は大きい方への拡張，(iii)は，平均になるための左側の項の単調性という見方ができるだろう。この条件を逐一チェックする

ことによって，5ページの定理は証明されたことになる。

3. 作用素平均と補間 (cf. [9])

ここで，さらにDonoghue型の補間の定義を形式的に拡張し，平均と補間との差を明らかにしよう。自然な拡張としてあらためて，正作用素 A，B に対し，

定義．C : exact interpolation for A, B $(C \in EI(A,B))$

$$\Longleftrightarrow \quad T^*AT \leqq A,\ T^*BT \leqq B \implies T^*CT \leqq C$$

と定める。作用素の「補間」としては，こちらの方がより補間らしいが，前述の補間との関連は次のようになる：

$$K \in EI(H) \iff K \in EI(H, 1-H)$$

$$K \in ES(H) \iff K \in EI(1, H)$$

命題．A, B は可逆な正作用素とする。そのとき，

$$C \in EI(A,B) \iff {}^{\exists}\text{平均 } m \,;\ C = A\,m\,B$$

（証明）$\Leftarrow$ は，次の不等式でわかる。

$$T^*(A\,m\,B)T \leqq T^*AT\,m\,T^*BT \leqq A\,m\,B \quad (T^*AT \leqq A,\ T^*BT \leqq B)$$

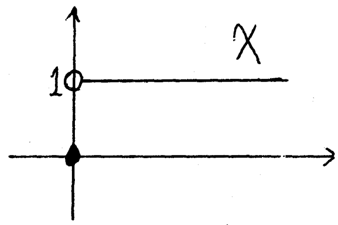
逆に $C \in EI(A,B)$ とすると，$A^{-\frac{1}{2}}CA^{-\frac{1}{2}} \in ES(A^{-\frac{1}{2}}BA^{-\frac{1}{2}})$ となるから，定理より ${}^{\exists}f \in OM\,;\ f(A^{-\frac{1}{2}}BA^{-\frac{1}{2}}) = A^{-\frac{1}{2}}CA^{-\frac{1}{2}}$

ここで A, B の可逆性より，$f(x) = 1\,m\,x$ という平均を考えてよいから，

$$C = A^{\frac{1}{2}}f(A^{-\frac{1}{2}}BA^{-\frac{1}{2}})A^{\frac{1}{2}} = A^{\frac{1}{2}}(1\,m\,A^{-\frac{1}{2}}BA^{-\frac{1}{2}})A^{\frac{1}{2}} = A\,m\,B \quad //$$

この命題の可逆性条件ははずせない。$OM \supsetneqq COM$ となるからである。これがそのまま補間と平均の差になっている。通常，作用素関数は，開区間上の解析関数として扱われているので，$(0,\infty)$ 上では両者の概念は同じである。しかし，たとえば，次のような関数 χ

$$\begin{cases} \chi(x) = 1 & (x \neq 0) \\ \chi(0) = 0 \end{cases}$$



は，$\chi \in OM$ で $\chi \notin COM$ である。ところで，有界な範囲では，$\chi(x) = \lim_{\alpha \to 0} x^{\alpha}$ で χ は得られ，実はこの関数が本質的である。なぜなら $\forall f \in OM$ は，$\hat{f} \in COM$ ($\hat{f}(0) = \lim_{\varepsilon \to 0} f(\varepsilon)$, $\hat{f}(x) = f(x)$ $(x \neq 0)$) によって，

$$f = (\hat{f} - a)(x) + a\chi \qquad (a = \hat{f}(0) - f(0))$$

とかけ，次の補題を得られるからである。

<u>補題3</u>.
$$f \in OM \iff {}^{\exists} f_{\alpha} \in COM \,;\, f = \lim f_{\alpha}$$
$$k \in OC \iff {}^{\exists} k_{\alpha} \in COC \,;\, k = \lim k_{\alpha}$$

実はこの補題があるからこそ，可逆作用素にすべては帰着されたのである。また，この補題により，COMの定理はたいていOMまで拡張できる。たとえば

<u>Hansenの定理</u> [10] $f \in OM$, $\|T\| \leqq 1$ ならば

$$T^{*} f(A) T \leqq f(T^{*} A T) \qquad ({}^{\forall} A \geqq 0)$$

などである。

またHansenの定理と，Donoghueの定理があれば，1章で述べたような作用素単調関数と作用素凹関数の対応から，主定理はより自然に得られる。つまり，$T^*HT \leqq H$, $T^*T \leqq 1$ なら $K = f(H)$ に対し，$T^*KT = T^*f(H)T \leqq f(T^*HT) \leqq f(H) = K$

が得られ，逆に

$$k \in OC \implies f_k(x) = (1+x)\,k\left(\frac{1}{1+x}\right) \in OM$$

の変換を利用すれば，Donoghueの定理で得られる作用素凹関数から，定理での作用素単調関数が得られることになる。

参考文献

[1] T. Ando : Topics on operator inequalities, Hokkaido Univ. Lecture Note, 1978

[2] W.F. Donoghue, Jr. : The theorems of Loewner and Pick, Israel J. Math., 4 (1966), 153-170.

[3] W.F. Donoghue, Jr. : The interpolation of quadratic norms, Acta Math., 118 (1967), 251-270.

[4] J.I. Fujii : Arithmetico-geometric mean of operators, Math. Japon. 23 (1978), 667-669.

[5] J.I. Fujii : On geometric and harmonic mean of

operators, Math. Japon., 24 (1979), 203-207.

[6] J. I. Fujii and M. Fujii : Some remarks on operator means, Math. Japon., 24 (1979), 335-339.

[7] J. I. Fujii : Operator concave functions and means of positive linear functionals, Math. Japon., 25 (1980), 453-461.

[8] J. I. Fujii : Operator monotone functions and Donoghue's theorem, to appear in Math. Japon.

[9] J. I. Fujii and M. Fujii and H. Takehana : Interpolation theorems of Donoghue's type on positive operators, to appear in Math. Japon.

[10] F. Hansen : An operator inequality, Math. Ann., 246 (1980), 249-250.

[11] F. Kubo and T. Ando : Means of positive linear operators, Math. Ann., 246 (1980), 205-224.

[12] W. Pusz and S. L. Woronowicz : Functional calculus for sesquilinear forms and purification map, Rep. Math. Phys., 8 (1975), 159-170.