

Title	作用素単調関数とDonoghueの定理(線型作用素論とその周辺)
Author(s)	藤井, 淳一
Citation	数理解析研究所講究録 (1986), 582: 100-111
Issue Date	1986-02
URL	http://hdl.handle.net/2433/99321
Right	
Type	Departmental Bulletin Paper
Textversion	publisher

作用素単調関数と Donoghue の定理

大阪教育大 藤井 淳一 (Jun Ichi Fujii)

Donoghue によつて扱われたヒルベルト空間のノルムの補間と、その積分表示定理 [3] を、作用素関数の立場、さらには作用素平均の立場から見ると、作用素凹関数の議論になり、自然に対応する作用素単調関数の議論が展開できる。

したがつて、まずヒルベルト空間上の正作用素の平均と、作用素関数の対応の話から始めよう。

1. 作用素関数と作用素平均

ここで扱う作用素関数のクラスは、次の2種類である。

OM: $[0, \infty)$ 上の非負作用素単調関数全体

$$\text{即ち, } f \in \text{OM} \iff 0 \leq A \leq B \implies 0 \leq f(A) \leq f(B).$$

OC: $[0, 1]$ 上の非負作用素凹関数全体

$$\begin{aligned} \text{即ち, } f \in \text{OC} \iff & 0 \leq A, B \leq 1 \\ \implies & 0 \leq \frac{f(A) + f(B)}{2} \leq f\left(\frac{A+B}{2}\right). \end{aligned}$$

特に、連続性を仮定した sub-class を、それぞれ、COM, COC と書くことにする。

作用素平均の話は、Ando [1] に始まり、

$$\text{幾何平均 } A \sharp B = \max \left\{ X \geq 0 \mid \begin{pmatrix} A & X \\ X & B \end{pmatrix} \geq 0 \right\}$$

$$\text{調和平均 } A \natural B = \max \left\{ X \geq 0 \mid \begin{pmatrix} 2A & 0 \\ 0 & 2B \end{pmatrix} \geq \begin{pmatrix} X & X \\ X & X \end{pmatrix} \right\}$$

が導入された。A, B が可換ならば、通常の数の平均にもちろん対応している。また、調和平均は、回路網理論で重要な概念である「平行和 (parallel sum)」の2倍にあたるものである。さらに、[4], [5], [6] にあるように、算術平均 ($A \natural B = \frac{A+B}{2}$) とあわせてみれば、算術幾何平均、算術調和平均 (実は幾何平均) が定義でき、前述の平均と同様の性質をもつことがわかった。その中で特に重要な性質であり、後に Kubo-Ando [11] によって公理化される3つの性質をあげると、作用素平均 m に対し

$$(M1) \quad A \leq C, B \leq D \Rightarrow A m B \leq C m D \quad (\text{単調性})$$

$$(M2) \quad A_n \downarrow A, B_n \downarrow B \Rightarrow A_n m B_n \downarrow A m B \quad (\text{半連続性})$$

$$(M3) \quad C^*(A m B)C \leq C^*AC m C^*BC \quad (\text{transformer inequality})$$

が満たされる。ここでは、(M1)-(M3) を満たす正作用素上の二項演算 m を「平均」と呼ぶことにする。

これらの性質から得られる平均の性質をみてみよう。(M2) の条件から、作用素平均は、可逆な作用素の平均に帰着され

ることがわかる: $A \# B = s\text{-}\lim_{n \rightarrow \infty} (A + \frac{1}{n}) \# (B + \frac{1}{n})$

また、可逆な作用素 C に対し、(M3) を使って

$$C^* A C \# C^* B C = C^* C^{-1} (C^* A C \# C^* B C) C^{-1} C \leq C^* (A \# B) C \leq C^* A C \# C^* B C$$

より、 $C^* (A \# B) C = C^* A C \# C^* B C$ が得られるので、 A が可逆な正作用素ならば

$$A \# B = A^{\frac{1}{2}} (1 \# A^{-\frac{1}{2}} B A^{-\frac{1}{2}}) A^{\frac{1}{2}}$$

と変形できるので、本質的には $f(x) = 1 \# x$ という非負実数値関数の話になる。さらに、 $0 \leq A \leq B$ ならば

$$0 \leq f(A) = 1 \# A \leq 1 \# B = f(B)$$

から、 $f \in OM$, (M2) より $f \in COM$ となる。

実際、Kubo-Ando [11] によって、平均全体、 COM 、 \mathbb{R}^+ 上の正值ラドン測度の三者の間は、次の関係式で順序同型が存在する事が示された:

$$1 \# x = f(x) = \int_0^{\infty} \frac{x(1+t)}{x+t} d\mu(t)$$

一方、Pusz-Woronowicz [12] によって、半双線型形式の平均が論じられていたが、そのアナロジーを述べて、作用素平均からながめると、単位的 C^* -環上の正值線型形式の平均が導入できる。[7]:

φ, ψ を C^* -環 \mathcal{A} 上の正值線型形式とするとき、

$$\mathcal{N} = \{ A \in \mathcal{A} \mid \varphi(A^*A) + \psi(A^*A) = 0 \}$$

は、閉左イデアルになり、 \mathcal{A}/\mathcal{N} に内積

$$\langle A^\circ, B^\circ \rangle = \varphi(B^*A) + \psi(B^*A) \quad (\circ \text{ は } \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{X}/N \text{ の } g\text{-map})$$

が定義でき、この内積による \mathcal{X}/N の完備化を \mathcal{H} とする。

絶対連続性から、 \mathcal{H} 上の正作用素 H, K で

$$\varphi(B^*A) = \langle HA^\circ, B^\circ \rangle, \quad \psi(B^*A) = \langle KA^\circ, B^\circ \rangle$$

となるもの (ラドン・ニコディムの微係数) が存在する。

すると、

$$\begin{aligned} \langle A^\circ, B^\circ \rangle &= \langle HA^\circ, B^\circ \rangle + \langle KA^\circ, B^\circ \rangle \\ &= \langle HA^\circ, B^\circ \rangle + \langle (1-H)A^\circ, B^\circ \rangle \end{aligned}$$

と変形できるので、正值線型形式の平均として

$$(\varphi \# \psi)(A) = \langle H \# (1-H)A^\circ, 1^\circ \rangle$$

という定義ができる。ここでの平均は、正縮小作用素 H と

$[0, 1]$ 上の実数値関数 $f(x) = x \# (1-x)$ の話である。

この関数 f の性質を調べると、 $f \in \text{COC}$ であることがわかり、平均 m を介して

$$f(x) = 1 \# x = (1+x) \left(\frac{1}{1+x} \# \frac{x}{1+x} \right) = (1+x) f\left(\frac{1}{1+x}\right)$$

の関係式で、COM と 1 to 1 に対応する。

以上のように、作用素の平均、COM、COC、Radon 測度の4者は同等の概念であることがわかった。この視点に立って、これから述べる Donoghue の定理を見れば、自然に作用素単調関数版の定理が得られるし、もう一つの作用素平均の側面が見られるだろう。

2. Donoghue型の定理

Donoghue は 1967 年の論文 [3] で, ヒルベルト空間のノルムの補間を作用素にやき直して論じている。2つのノルムを $\|\cdot\|_a, \|\cdot\|_b$ としたとき, 標準のノルムとして

$$\|x\|^2 = \|x\|_a^2 + \|x\|_b^2$$

を考えると, 前章の議論と同様に, ラドン・ニコディムの微係数として, 次のような正縮小作用素 H が存在する:

$$\|x\|^2 = (x, x) = (Hx, x) + ((1-H)x, x)$$

補間はこのように, H と $1-H$ の補間の話になる。作用素の話に定義を書き直せば, $0 \leq H \leq 1$ に対し,

定義. K : exact interpolation of H ($K \in EI(H)$ と書く)

$$\iff T^*HT \leq H, T^*(1-H)T \leq 1-H \iff T^*KT \leq K.$$

(ここで exact の意味は $T^*KT \leq aK$ の $a=1$ のこと)

このとき, Donoghue の定理を, 作用素関数で書き直すと,

Donoghue の定理 $K \in EI(H) \iff \exists k \in OC; k(H) = K.$

自然な対応として, $H \geq 0$ に対し

定義. K : exact subinterpolation of H ($K \in ES(H)$ と書く)

$$\iff T^*HT \leq H, T^*T \leq 1 \iff T^*KT \leq K$$

と定めれば, アナロジーを辿って

定理. $K \in ES(H) \iff \exists f \in OM; f(H) = K$ [8]

が得られる。証明をすべて述べることはできないが, Donoghue

の証明の改良と紹介を兼ねて、アウトラインを述べよう。

根底には次の平均の不等式がある。たとえば定理の方なら

$$T^*HT \leq H, T^*T \leq 1 \text{ なる } T \text{ に対し,}$$

$$T^*KT = T^*(ImH)T \leq T^*T m T^*HT \leq ImH = K,$$

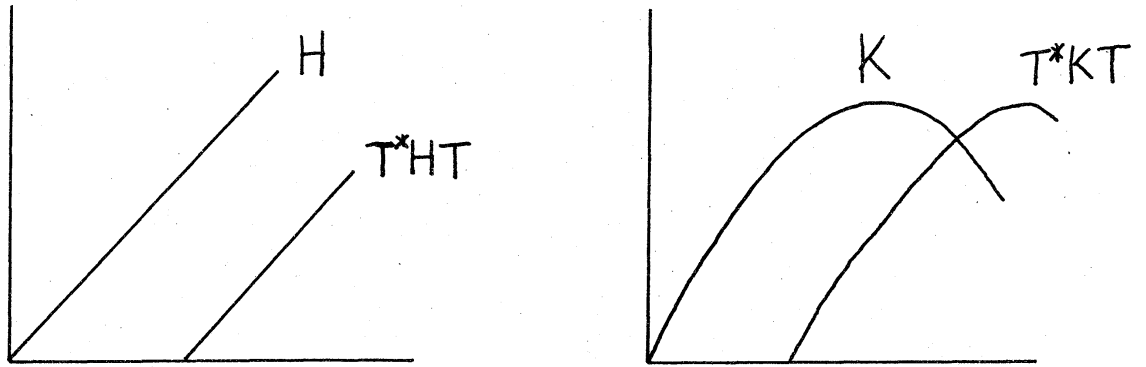
ただし、 H は可逆とする。けれども、 H は可逆としてもよいことがわかるので、 \Leftarrow の証明はこれでよい。

逆に、 $K \in ES(H)$ をとれば H の U : ユニタリに対し、

$$U^*HU = H, U^*U = 1 \text{ より, } U^*KU \leq K,$$

同様に H の U^* だから $UKU^* \leq K$ が得られ、 $K \leq U^*KU$ から $K = U^*KU$, 即ち K の U がわかる。したがって、 K は、 H の bi-commutant H'' に入るので $f(H) = K$ となる、 $\sigma(H)$ 上の有界可測関数 f が存在する。当然証明は f が $\sigma(H)$ の上で作用素単調であることを示し、さらに $[0, \infty)$ に拡張可能であることを示すという二段階になる。

まず f の初等的な性質を見ていこう。 f は、非負で連続で単調非減少となることがわかるが、たとえば、単調非減少を示す場合、イメージ的には次ページの左図のように、 T^* と T ではさむと、 H を右側へずらすような T を考えておく。すると、もし K が右図のように減少する部分をもてば、 T^*KT を K がおさえられないようになってしまう。連続性も同じようなテクニックで示すことができる。



さらに、 H が可逆のときは明らかに、 f はリフシッツ関数となる。このことを利用し、ユニタリ同値な作用素で近似していくことによって、次の補題を得る。

補題 1. $f(H) \in ES(H)$, $\sigma(H') = \sigma(H) \implies f(H') \in ES(H')$
 スペクトルが等しいという条件は、容易に $\sigma(H') \subset \sigma(H)$ に変えられる。この形の補題が Donoghue [3] では重要なのだが、それは implicit に次のような事実を示すからである。

補題 2. f は $\sigma(H)$ 上で作用素単調である。

(証明) $0 \leq A \leq B$, $\sigma(A), \sigma(B) \subset \sigma(H)$ に対し、

$L = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix}$ を考えると、 $\sigma(L) \subset \sigma(H)$ だから補題 1 より

$f(L) \in ES(L)$ となる。特に、 $T = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ に対し、

$T^*T \leq 1$, $T^*LT = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & A \end{pmatrix} \leq \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix} = L$ を満たすから

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & f(A) \end{pmatrix} = T^*f(L)T \leq f(L) = \begin{pmatrix} f(A) & 0 \\ 0 & f(B) \end{pmatrix}$$

となり、(2,2) 成分を比較すれば $f(A) \leq f(B)$ を得る。

//

さて、次は作用素単調関数を $[0, \infty)$ に拡張するわけだが、都合よくも、Donoghue は 1966 年の論文 [2] で拡張するための同値条件を求めていた。特に有限の $\sigma(H) = \sigma$ に対し、 H は可逆だから、 $\sigma^* = \{ \frac{1}{\lambda} \mid \lambda \in \sigma \}$ が定められる。このとき、

Donoghue の拡張定理 $f \in OM$ の必要十分条件は、次の 3 つの関数が、同時に 3 つの条件を満たすことである：

$$(i) \quad \tilde{f} : \text{作用素単調 on } \sigma \cup \{0\} \quad (\tilde{f}(0) = 0, \tilde{f}(x) = f(x) \quad (x \neq 0))$$

$$(ii) \quad f^* : \text{作用素単調 on } \sigma^* \cup \{0\} \quad (f^*(0) = 0, f^*(x) = \frac{1}{f(1/x)} \quad (x \neq 0))$$

$$(iii) \quad f^\circ : \text{作用素単調 on } \sigma^* \cup \{0\} \quad (f^\circ(0) = 0, f^\circ(x) = \frac{x}{f(1/x)} \quad (x \neq 0))$$

この f^* と f° は、もし作用素平均を知らなければ、非常にわかりにくく、この定理のフォーミュレーションが理解しにくいところか。 $f(x) = 1 m x$ という平均を経由すると、

$$f^*(x) = \frac{1}{f(1/x)} = (1 m x^{-1})^{-1} \quad \text{となり、}$$

実は、平均 m の adjoint $A m^* B = (A^{-1} m B^{-1})^{-1}$ に対応する。

(たとえば、算術平均と調和平均は互いに他の adjoint で、幾何平均は、adjoint 不変である。) また、

$$f^\circ(x) = \frac{x}{f(1/x)} = x (1 m x^{-1})^{-1} = (x m 1)^{-1} \quad \text{より}$$

実は、平均 m の transpose $A m^\circ B = B m A$ に対応している。

したがって、拡張定理の (i) は、小さい方への拡張、(ii) は、大きい方への拡張、(iii) は、平均になるための左側の項の単調性という見方ができるだろう。この条件を逐一チェックする

ことによつて、5ページの定理は証明されたことになる。

3. 作用素平均と補間 (cf. [9])

ここで、さらに Donoghue 型の補間の定義を形式的に拡張し、平均と補間との差を明らかにしよう。自然な拡張としてあらためて、正作用素 A, B に対し、

定義. C : exact interpolation for A, B ($C \in EI(A, B)$)

$$\iff T^*AT \leq A, T^*BT \leq B \implies T^*CT \leq C$$

と定める。作用素の「補間」としては、こちらの方がより補間らしいが、前記の補間との関連は次のようになる:

$$K \in EI(H) \iff K \in EI(H, 1-H)$$

$$K \in ES(H) \iff K \in EI(1, H)$$

命題. A, B は可逆な正作用素とする。そのとき、

$$C \in EI(A, B) \iff \exists \text{平均 } m; C = A m B$$

(証明) \Leftarrow は、次の不等式でわかる。

$$T^*(A m B)T \leq T^*AT m T^*BT \leq A m B \quad (T^*AT \leq A, T^*BT \leq B)$$

逆に $C \in EI(A, B)$ とすると、 $A^{-\frac{1}{2}}CA^{-\frac{1}{2}} \in ES(A^{-\frac{1}{2}}BA^{-\frac{1}{2}})$

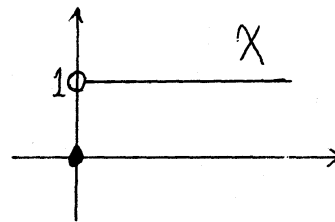
となるから、定理より $\exists f \in OM; f(A^{-\frac{1}{2}}BA^{-\frac{1}{2}}) = A^{-\frac{1}{2}}CA^{-\frac{1}{2}}$

ここで A, B の可逆性より、 $f(x) = 1 m x$ という平均を考えてよいから、

$$C = A^{\frac{1}{2}} f(A^{-\frac{1}{2}}BA^{-\frac{1}{2}}) A^{\frac{1}{2}} = A^{\frac{1}{2}} (1 m A^{-\frac{1}{2}}BA^{-\frac{1}{2}}) A^{\frac{1}{2}} = A m B \quad //$$

この命題の可逆性条件ははずせない。 $OM \cong COM$ となるからである。これがそのまま補間と平均の差になっている。通常、作用素関数は、開区間上の解析関数として扱われているので、 $(0, \infty)$ 上では両者の概念は同じである。しかし、たとえば、次のような関数 χ

$$\begin{cases} \chi(x) = 1 & (x \neq 0) \\ \chi(0) = 0 \end{cases}$$



は、 $\chi \in OM$ で $\chi \notin COM$ である。ところで、有界な範囲では、 $\chi(x) = \lim_{\alpha \rightarrow 0} x^\alpha$ で χ は得られ、実はこの関数が本質的である。なぜなら $\forall f \in OM$ は、 $\hat{f} \in COM$ ($\hat{f}(0) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} f(\varepsilon)$, $\hat{f}(x) = f(x)$ ($x \neq 0$)) によって、

$$f = (\hat{f} - a)(x) + a\chi \quad (a = \hat{f}(0) - f(0))$$

とかけ、次の補題を得られるからである。

補題 3. $f \in OM \iff \exists f_\alpha \in COM; f = \lim f_\alpha$

$$k \in OC \iff \exists k_\alpha \in COC; k = \lim k_\alpha$$

実はこの補題があるからこそ、可逆作用素にすべては帰着されたのである。また、この補題により、COMの定理はたいていOMまで拡張できる。たとえば

Hansen の定理 [10] $f \in OM$, $\|T\| \leq 1$ ならば

$$T^* f(A) T \leq f(T^* A T) \quad (\forall A \geq 0)$$

などである。

また Hansen の定理と, Donoghue の定理があれば, 1 章で述べたような作用素単調関数と作用素凹関数の対応から, 主定理はより自然に得られる。つまり, $T^*HT \leq H$, $T^*T \leq I$ なら $K=f(H)$ に対し, $T^*KT = T^*f(H)T \leq f(T^*HT) \leq f(H) = K$ が得られ, 逆に

$$k \in OC \implies f_k(x) = (1+x)k\left(\frac{1}{1+x}\right) \in OM$$

の変換を利用すれば, Donoghue の定理で得られる作用素凹関数から, 定理での作用素単調関数が得られることになる。

参考文献

- [1] T. Ando : Topics on operator inequalities, Hokkaido Univ. Lecture Note, 1978
- [2] W.F. Donoghue, Jr. : The theorems of Loewner and Pick, Israel J. Math., 4 (1966), 153-170.
- [3] W.F. Donoghue, Jr. : The interpolation of quadratic norms, Acta Math., 118 (1967), 251-270.
- [4] J. I. Fujii : Arithmetico-geometric mean of operators, Math. Japon. 23 (1978), 667-669.
- [5] J. I. Fujii : On geometric and harmonic mean of

- operators, Math. Japon., 24 (1979), 203-207.
- [6] J. I. Fujii and M. Fujii : Some remarks on operator means, Math. Japon., 24 (1979), 335-339.
- [7] J. I. Fujii : Operator concave functions and means of positive linear functionals, Math. Japon., 25 (1980), 453-461.
- [8] J. I. Fujii : Operator monotone functions and Donoghue's theorem, to appear in Math. Japon.
- [9] J. I. Fujii and M. Fujii and H. Takehana : Interpolation theorems of Donoghue's type on positive operators, to appear in Math. Japon.
- [10] F. Hansen : An operator inequality, Math. Ann., 246 (1980), 249-250.
- [11] F. Kubo and T. Ando : Means of positive linear operators, Math. Ann., 246 (1980), 205-224.
- [12] W. Pusz and S. L. Woronowicz : Functional calculus for sesquilinear forms and purification map, Rep. Math. Phys., 8 (1975), 159-170.