

Title	On Spectral Manifolds of S-decomposable Operators
Author(s)	棚橋, 浩太郎
Citation	数理解析研究所講究録 (1986), 582: 89-99
Issue Date	1986-02
URL	<a href="http://hdl.handle.net/2433/99322">http://hdl.handle.net/2433/99322</a>
Right	
Type	Departmental Bulletin Paper
Textversion	publisher

## On Spectral Manifolds of $S$ -decomposable Operators

東北薬科大学 棚橋浩太郎 (Kōtarō Tanahashi)

§1 序. ヒルベルト空間上の正規作用素については, そのスペクトル分解はよく知られている。

Dunford は, この分解をバナッハ空間で考えて, *spectral operator* の理論をつくった。さらに Foias らは, もっとゆるやかな "分解" を考え, *decomposable operator* の理論をつくり, その解析を行なった。

ここでは, 更に一般化された *S-decomposable operator* を考えるが, まず, その由来を簡単に説明しよう。例として, ヒルベルト空間  $H$  上の有界自己共役作用素  $T$  のスペクトル分解  $T = \int \lambda dE_\lambda$ ,  $\sigma(T) \subset [a, b]$  を考える。このとき,  $[a, b]$  の分割  $\Delta: a = \lambda_0 < \lambda_1 < \dots < \lambda_n = b$  に対し,  $H = E(\sigma(T))H = E([\lambda_0, \lambda_1])H + E([\lambda_1, \lambda_2])H + \dots + E([\lambda_{n-1}, \lambda_n])H$  なので,  $H_i = E([\lambda_{i-1}, \lambda_i])H$  とおくと,

$$(i) H = H_1 + H_2 + \cdots + H_n$$

$$(ii) \sigma(T|H_i) \subset [\lambda_{i-1}, \lambda_i] \quad i=1, 2, \dots, n$$

と  $T$  がゆるやかに "分解" されることになる。ここで各  $H_i$  は、もちろん、 $T$  の不変部分空間であるが、それだけではなくて、

$$\sigma(T|Y) \subset \sigma(T|H_i) \Rightarrow Y \subset H_i$$

という性質をもち ( $T$  の *spectral maximal space*)、また、

$$H_i = \{ x \in H \mid \exists f \text{ analytic; } (\lambda - T)f(\lambda) \equiv x \text{ on } [\lambda_{i-1}, \lambda_i]^c \}$$

とも表される ( $T$  の *spectral manifold*) ことが分っている。このように、 $\sigma(T)$  の任意の "分割" に対し、(ii), (iii) をみたすような  $T$  の *spectral maximal space* の族が存在するような作用素  $T$  を、Foias は *decomposable operator* とよんで、その性質を調べたわけだが、そのなかで、次の問題を提出した ([4])。以下、特に断わらない限り、複素バナッハ空間  $X$  上の有界線形作用素  $T$  を考える。

問題  $Y$  が *decomposable operator*  $T$  の *spectral maximal space* なら、 $T|Y$  は *decomposable operator* か。

この問題は, Albrecht ([1]) が反例をつくらせて、否定的に解かれたが、しばらくたつて、Bacalu が次のような興味ある結果をだした。

定理([2])  $Y$  が decomposable operator  $T$  の spectral maximal space なら,  $T|_Y$  は  $\sigma(T/Y) \cap \partial\sigma(T|_Y) \ni S$  の部分を除いて decomposable の性質をもつ。(  $T$  は  $S$ -decomposable という。) 但し,  $T|_Y$  は  $T$  の  $X/Y$  への商作用素で,  $\partial$  は境界を表す。

その後,  $S$ -decomposable operator と decomposable operator の関係が調べられ, Nagy, Bacalu, Vasilescu Erdelyi, Lang, Shenywang らによつて,

定理([7]) 任意の  $T$  に対し,  $T$  が  $S$ -decomposable operator となるような最小の  $S$  ( spectrum residuum  $S_\alpha$  ) が存在する。

定理([3])  $T$  が  $S$ -decomposable operator で  $\dim S = 0$  ならば,  $S_\alpha = \emptyset$ , つまり,  $T$  は decomposable operator である。

定理([8]) ヒルベルト空間上の有界作用素  $T$  が

isometry であるが unitary ではないならば,  $S_\alpha = \sigma(T) = \text{unit disc}$  である。

定理 ([9])  $T$  が  $X$  上の  $S$ -decomposable operator であること, 共役作用素  $T'$  が  $X'$  上の  $S$ -decomposable operator であることは同値である。

などの結果が得られている。ここでは、 $Y$  が  $S$ -decomposable operator  $T$  の spectral manifold である場合に,  $T|_Y, T/Y, (T|_Y)', (T/Y)'$  のスペクトルとその "duality" を調べ, その応用として,  $S$ -decomposable operator の特徴づけを行なう。

§2 主な結果. 以下、複素バナッハ空間  $X$  上の有界線形作用素  $T$  を考える。

定義 1.  $T$  の不変部分空間  $Y$  が  $T$  の spectral maximal space であるとは,

$$\sigma(T|_Z) \subset \sigma(T|_Y) \Rightarrow Z \subset Y$$

をみたすときをいう。  $T$  の spectral maximal space の全体を  $SM(T)$  と表す。

定義 2.  $S \subset \sigma(T)$ ,  $S$  は閉集合とする。閉集合の族  $\{G_1, \dots, G_n; G_0\}$  が  $S$ -covering of  $\sigma(T)$  とは,

$$(i) G_1 \cup \dots \cup G_n \cup G_0 \supset \sigma(T)$$

$$(ii) \overline{G_i} \cap S = \emptyset, \quad i=1, \dots, n.$$

をみたすときをいう。Tが *S-decomposable operator* とは、任意の *S-covering of  $\sigma(T)$*   $\{G_1, \dots, G_n; G_0\}$  に対し、

$$(i) X = X_1 + \dots + X_n + X_0$$

$$(ii) \sigma(T|_{X_i}) \subset G_i \quad i=0, 1, \dots, n$$

をみたすようなTの *spectral maximal space* の族  $\{X_1, \dots, X_n; X_0\}$  が存在するときをいう。

定義3. 閉集合Fに対し

$$X_T(F) = \{x \in X \mid \exists f \text{ analytic}, (\lambda - T)f(\lambda) \equiv x \text{ on } F^c\}$$

と定める。また、任意の集合Eに対し

$$X_T(E) = \cup \{X_T(F) \mid F \subset E, F \text{ is closed}\}$$

と定め、これらをTの *spectral manifold* という。

たとえば、Tが *spectral operator* であれば、その *spectral measure* を  $E(\cdot)$  とおくと、任意の閉集合Fに対し、

$$X = E(F)X \oplus E(F^c)X = X_T(F) \oplus \overline{X_T(F^c)}$$

である。但、 $\overline{\cdot}$  は  $Y \subset X$  の (強)-閉包である。また、

Tが *decomposable operator* なら、

定理 ([4]) 任意の閉集合  $F$  に対し,  $X_T(F)$  は閉で,  $T$  の spectral maximal space であり,  $\sigma(T|X_T(F)) \subset F$  をみたす。

定理 ([6]) 任意の閉集合  $F$  に対して,  $X_T(F^c)^\perp = X_{T'}(F)$  が成立する。

が知られてゐる。本稿の最初の結果は, この定理に対応するものであるが,  $S$ -decomposable operator では次の定理が成立することである。

定理 1.  $T$  が  $S$ -decomposable operator なら

(i)  $F \supset S$ ,  $F$  閉  $\Rightarrow X_T(F)$  閉,  $\in SM(T)$ ,

$$\overline{(F^c \setminus S) \cap \sigma(T)} \subset \sigma(T|X_T(F)) \subset F \cap \sigma(T)$$

$$\overline{\sigma(T) \setminus F} \subset \sigma(T/X_T(F)) \subset \overline{\sigma(T) \setminus F} \cup S$$

(ii)  $G \supset S$ ,  $G$  開  $\Rightarrow X_T(\bar{G})$  閉,  $\in SM(T)$ ,

$$\overline{G \cap \sigma(T)} \subset \sigma(T|X_T(\bar{G})) \subset \bar{G} \cap \sigma(T)$$

$$\sigma(T/X_T(\bar{G})) = \overline{\sigma(T) \setminus \bar{G}}$$

(iii)  $F \cap S = \emptyset$ ,  $F$  閉  $\Rightarrow X_T(F)$  閉,  $\in SM(T)$

$$\overline{F^c \cap \sigma(T)} \subset \sigma(T|X_T(F)) \subset F \cap \sigma(T)$$

$$\sigma(T/X_T(F)) = \overline{\sigma(T) \setminus F}$$

が成立する。(但,  $F^c$  は  $F$  の内点の集合である。)

定理2.  $T$  が  $S$ -decomposable operator で、 $F$  が  $F \cap S$  または  $F \cap S = \emptyset$  をみたす閉集合ならば、  
 $X_T(F^\perp)^\perp = X_{T'}(F)$  が成立する。

注. これらの結果はいずれも部分的には知られている。たとえば、定理1の(iii)については、 $\sigma(T/X_T(\bar{G})) \subset G^c$  を Shengwang と Guangyu ([9]) が、また定理2については、 $F \cap S$  の場合に Vasilescu ([10]) が証明している。このほかについても同様なので、ここでは、いちいち書かないことにする。(参照, [2], [3], [5], [7], [8], [9].)

従、て、 $Y \subset X$  に対して、

$$(X/Y)' = Y^\perp, \quad X/Y^\perp = Y', \quad \sigma(T') = \sigma(T)$$

の関係式が成立すること、定理1, 2より次の結果が成立する。

定理3.  $T$  が  $S$ -decomposable operator で、 $G$  が  $G \cap S$  または  $G \cap S = \emptyset$  をみたす閉集合ならば、

$$\sigma(T|X_T(\bar{G})) = \overline{G \cap \sigma(T)}$$

$$\overline{\sigma(T) \setminus G \cap \sigma(T)} \subset \sigma(T/X_T(\bar{G})) \subset \sigma(T) \setminus G$$



が成立する。

従って,  $X_T(\bar{G})$ ,  $\overline{X_T(G)}$  の場合が得られたわけだが, 特にこの間にある  $X_T(\overline{G \cap \sigma(T)})$  は興味ある性質をもっていて, 次の結果が得られる。

定理4.  $T$  が  $S$  decomposable operator で,  $G$  が  $G \cap S$  または  $\bar{G} \cap S = \emptyset$  をみたす開集合ならば,  $X_T(\overline{G \cap \sigma(T)})$  は閉,  $\in \text{SM}(T)$  で,

$$\sigma(T|X_T(\overline{G \cap \sigma(T)})) = \overline{G \cap \sigma(T)}$$

$$\sigma(T/X_T(\overline{G \cap \sigma(T)})) = \overline{\sigma(T) \setminus G \cap \sigma(T)}$$

が成立する。

また, これらの定理の逆として, 次の定理が成立する。

定理5. (i)  $G \cap S$  をみたす任意の開集合  $G$  に対して,  $\sigma(T|Y) \subset \bar{G}$ ,  $\sigma(T/Y) \subset G^c \cup S$  をみたす  $T$  の不変部分空間  $Y$  が存在する, または, (ii)  $\bar{G} \cap S = \emptyset$  をみたす任意の開集合  $G$  に対して,  $\sigma(T|Y) \subset \bar{G} \cup S$ ,  $\sigma(T/Y) \subset G^c$  をみたす  $T$  の不変部分空間

が存在する, のいずれかが成り立てば,  $T$  は  $S$ -decomposable operator である。

注. 従, て, 定理 1, 3, 4 の逆が成り立つし, また, 定理 1, 4 では, 逆をいうとき, " $\in SM(T)$ " の条件は不必要であることがわかる。

また, 定理 2 と次の定理 6 をあわせて, 定理 7 が得られる。

定理 6.  $T$  が  $S$ -decomposable operator で  $F$  が  $F \supset S$  または  $F \cap S = \emptyset$  をみたす閉集合ならば、 $JX_T(F) = JX \cap X''_T(F)$  が成り立つ。(但し、 $J: X \rightarrow X''$  は自然な写像である。)

定理 7.  $T$  が  $S$ -decomposable operator で  $F$  が  $F \supset S$  または  $F \cap S = \emptyset$  をみたす閉集合ならば、 $X_T(F)^\perp = X'_T(F^c)$  の  $w$ -閉包 が成り立つ。

## 参考文献

1. E. Albrecht, On two questions of I. Colojoară and C. Foias, *Manuscripta Math.*, 25 (1978) 1-15.
2. I. Bacalu, On restrictions and quotients of decomposable operators, *Rev. Roum. Math. Pures et Appl.* 18 (1973) 809-813.
3. I. Bacalu, Some properties of decomposable operators, *Rev. Roum. Math. Pures et Appl.* 21 (1976) 177-194.
4. I. Colojoară and C. Foias, *Generalized spectral operators*, Gordon and Breach, New York, 1968.
5. I. Erdelyi and W. Shengwang, On strongly decomposable operators, *Pacific J. Math.*, 110 (1984) 287-296.
6. S. Frunzã, A duality theorem for decomposable operators, *Rev. Roum. Math. Pures et Appl.* 16 (1971) 1055-1058.
7. B. Nagy, On S-decomposable operators, *J. Operator Theory* 2 (1979) 277-286
8. B. Nagy, *Local spectral theory*, *Acta Math. Acad. Sci. Hung.* 37 (1981) 433-443.

9. W. Shengwang and L. Guangyu, On the duality theorem of Bounded  $S$ -decomposable operator, *J. Math. Anal. and Appl.* 99 (1984) 150-163.
10. F. H. Vasilescu, On the residual decomposability in dual spaces, *Rev. Roum. Math. Pures et Appl.* 16 (1971) 1573-1587.