数理解析研究所講究録
582巻 1986年 1-8

Elementary 作用素のスペクトラムについて

工越教育大　長　宗雄（Muneo Chō）

§1. Introduction

H を complex Hilbert space とし，H 上の bounded linear operators からなる2つの可換な n-tuples $A=(A_1,\cdots,A_n)$，$B=(B_1,\cdots,B_n)$ に対して，

$$\mathcal{R}: B(H) \longrightarrow B(H) \qquad \mathcal{R}(X)=\sum_{i=1}^{n} A_i X B_i$$

と定義された elementary 作用素 $\mathcal{R}$ のスペクトラム $\sigma(\mathcal{R})$ は1983年 R. Curto により

$$\sigma(\mathcal{R})=\left\{ \sum_{i=1}^{n}\alpha_i\beta_i \,\middle|\, (\alpha_1,\cdots,\alpha_n)\in\sigma_T(A),\ (\beta_1,\cdots,\beta_n)\in\sigma_T(B)\right\}$$

（ここで $\sigma_T(\cdot)$ は Taylor による joint spectrum を記す．）

となることが示されたので，これについて報告する。

歴史的には，

$$\mathcal{M}(X)=AXB \quad , \quad \mathcal{J}(X)=AX-XB$$

なる elementary 作用素 $\mathcal{M}$, $\mathcal{J}$ のスペクトラム $\sigma(\mathcal{M})$, $\sigma(\mathcal{J})$

については．Lumer-Rosenblumにより

$$\sigma(\mathcal{M})=\sigma(A)\cdot\sigma(B)\quad,\ \sigma(\mathcal{J})=\sigma(A)-\sigma(B)$$

となることが示され．一般のRについては．

Davis-Rosenthalにより

$$\sigma_\pi(R)\subset\left\{\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\beta_i\;\middle|\;\alpha_i\in\sigma_\pi(A_i),\ \beta_i\in\sigma_\delta(B_i)\right\}$$

$$\sigma_\delta(R)\subset\left\{\sum\alpha_i\beta_i\;\middle|\;\alpha_i\in\sigma_\delta(A_i),\ \beta_i\in\sigma_\pi(B_i)\right\}$$

となることが示された．

次に．2つの n-tuples $A=(A_1,\cdots,A_n)$，$B=(B_1,\cdots,B_n)$

に対して．

$$L_A=(L_{A_1},\cdots,L_{A_n}),\quad R_B=(R_{B_1},\cdots,R_{B_n})$$

を言うことにする．ただし．$L_T(X)=TX$，$R_T(X)=XT$ である。

また．complex Banach space X 上の bounded linear operators の n-tuple $A=(A_1,\cdots,A_n)$ に対して．

$$\sigma_\ell(A,X)=\left\{(\lambda_1,\cdots,\lambda_n)\;\middle|\;\sum_{i=1}^{n}S_i(A_i-\lambda_i)\neq I,\ \forall S_i\in B(X)\right\}$$

$$\sigma_r(A,X)=\left\{(\lambda_1,\cdots,\lambda_n)\;\middle|\;\sum_{i=1}^{n}(A_i-\lambda_i)S_i\neq I,\ \forall S_i\in B(X)\right\}$$

と定義する．

最後に. Hilbert space H 上の Hilbert-Schmidt class を C_2 で記し, ここでの norm を $\|\cdot\|_2$ で表わす.

§2. Theorem

Theorem. H を complex Hilbert space とし. H 上の bounded linear operators からなる可換な２つの n-tuples $A=(A_1,\cdots,A_n)$ $B=(B_1,\cdots,B_n)$ に対して. $\mathcal{R}(X)=\sum A_iXB_i \quad (X\in B(H))$ とするとき, $\sigma(\mathcal{R})=\left\{\sum\alpha_i\beta_i \,\middle|\, (\alpha_1,\cdots,\alpha_n)\in\sigma_T(A),\ (\beta_1,\cdots,\beta_n)\in\sigma_T(B)\right\}$ である.

この定理の証明のためにいくつかの lemma を与える.

Lemma 1. complex Hilbert space H 上の２つの n-tuples $A=(A_1,\cdots,A_n)$, $B=(B_1,\cdots,B_n)$ に対して.

$$\sigma_l(A,H)=\sigma_l(L_A,C_2) \quad , \quad \sigma_r(B,H)=\sigma_r(L_B,C_2)$$

pr. $(\lambda_1,\cdots,\lambda_n)\notin\sigma_l(A,H)$ とすると. $\exists S_i\in B(H)\,;\ \sum S_i(A_i-\lambda_i)=I$

$$\therefore\ \sum L_{S_i}(L_{A_i}-\lambda_i)=I$$

より $(\lambda_1,\cdots,\lambda_n)\notin\sigma_l(L_A,C_2)$

逆くに．$(\lambda_1,\cdots,\lambda_n) \notin \sigma_\ell(L_A, C_2)$ とする．

$$\therefore\ ^\exists\delta>0\ ;\ \sum \|(L_{A_i}-\lambda_i)T\|_2 \geqq \delta\|T\|_2 \qquad ({}^\forall T\in C_2)$$

そこで，${}^\forall x\in H$; $\|x\|=1$ なる vector に対して．$T_{x,x}\ (\in C_2)$ を代入して．

$$\sum \|(L_{A_i}-\lambda_i)T_{x,x}\|_2 \geqq \delta\|T_{x,x}\|_2$$

$$\therefore \sum \|(A_i-\lambda_i)x\| \geqq \delta>0 \qquad \therefore (\lambda_1,\cdots,\lambda_n)\notin\sigma_\ell(A,H)$$

次に．$\lambda\notin\sigma_r(B,H) \Rightarrow \lambda\notin\sigma_r(L_B, C_2)$ も同様に示される．

今．$\lambda=(\lambda_1,\cdots,\lambda_n)\notin\sigma_r(L_B, C_2)$ とする．

${}^\forall x\in H$ に対して．$T_{x,x}\in C_2$ をとると．

$$^\exists X_i\in C_2\ ;\ \sum(L_{B_i}-\lambda_i)X_i = T_{x,x}$$

$$\therefore \sum(B_i-\lambda_i)X_i x = x \qquad \therefore (\lambda_1,\cdots,\lambda_n)\notin\sigma_r(B,H)$$

Q.E.D.

Lemma 2. (Harte)

complex Hilbertspace H 上の 2 つの n-tuples $A=(A_1,\cdots,A_n)$ $B=(B_1,\cdots,B_n)$ に対して．

(1). $\sigma_\ell((L_A, R_B), B(H)) = \sigma_\ell(A,H)\times\sigma_r(B,H)$

(2). $\sigma_r((L_A, R_B), B(H)) = \sigma_r(A,H)\times\sigma_\ell(B,H)$

Lemma 3. (Choi-Davis)

complex Banach space 上の可換な n-tuple $A=(A_1,\cdots,A_n)$ に対して、f を n 変数多項式とすると、

$$f(\sigma_\ell(A))=\sigma_\ell(f(A)) \quad , \quad f(\sigma_r(A))=\sigma_r(f(A))$$

Lemma 4. (Taylor)

complex Banach space 上の可換な n-tuple $A=(A_1,\cdots,A_n)$ に対して、f を n 変数多項式とすると、

$$f(\sigma_T(A))=\sigma(f(A))$$

Lemma 5. complex Hilbert space H 上の2つの可換な n-tuples $A=(A_1,\cdots,A_n)$, $B=(B_1,\cdots,B_n)$ に対して、

$$\sigma_\ell(R,B(H))=\sigma_\ell(R,C_2) \quad , \quad \sigma_r(R,B(H))=\sigma_r(R,C_2)$$

pr. $z,w\in\mathbb{R}^n$ に対して、$f(z,w)=\sum z_i w_i$ とすると、

R は、 $R=f((L_A,R_B))$ となるので

Lemma 3 から

$$\sigma_\ell(R,B(H))=\sigma_\ell\left(\sum L_{A_i}R_{B_i},\,B(H)\right)=\left\{\sum\alpha_i\beta_i \;\middle|\; (\alpha,\beta)\in\sigma_\ell((L_A,R_B),B(H))\right\}$$

$$\underset{\text{Lemma 2}}{=}\left\{\sum\alpha_i\beta_i \;\middle|\; \alpha\in\sigma_\ell(A,H),\ \beta\in\sigma_r(B,H)\right\}$$

$$\underset{\text{Lemma 1}}{=} \left\{ \sum \alpha_i \beta_i \;\middle|\; \alpha \in \sigma_\ell(L_A, \mathcal{C}_2),\ \beta \in \sigma_r(L_B, \mathcal{C}_2) \right\}$$

$$= \left\{ \sum \alpha_i \beta_i \;\middle|\; \alpha \in \sigma_\ell(L_A, \mathcal{C}_2),\ \beta \in \sigma_\ell(R_B, \mathcal{C}_2) \right\}$$

$$= \sigma_\ell(R, \mathcal{C}_2)$$

$\sigma_r(\cdot)$ についても同様である. Q. E. D.

Lemma 6 (Ceauşescu-Vasilescu)

H, K を complex Hilbert space とする. $A=(A_1,\cdots,A_n)$ を H 上の可換な n-tuple, $B=(B_1,\cdots,B_n)$ を K 上の可換な n-tuple とし.

$A\otimes B=(A_1\otimes B_1,\cdots,A_n\otimes B_n)$ とするならば

$$\sigma_T(A\otimes B) = \sigma_T(A)\cdot\sigma_T(B)$$

Lemma 7 (Brown-Pearcy)

H を complex Hilbert space とし. H' を H の opposed な Hilbert space とする. また. $T\in B(H)$ に対応する H' 上の作用素を T' で記すとき.

$$\begin{array}{ccc} H'\otimes H & \longrightarrow & \mathcal{C}_2 \\ z\otimes x & \longrightarrow & T_{z,x} \end{array}$$

なる map は. isomorphic で isometric な extension をもつ.

さらに.

$$\begin{array}{ccc} B(H')\otimes B(H) & \longrightarrow & B(C_2)\times B(C_2) \\ \rotatebox{90}{$\in$} & & \rotatebox{90}{$\in$} \\ B^{*'}\otimes A & \longrightarrow & (L_A, R_B) \end{array}$$ は isomorphism である.

ここで, $T_{z,x}(y) = (y,z)x$ である.

以上により定理の証明を与える。

pr.

$$\sigma(R) = \sigma_l(R, B(H)) \cup \sigma_r(R, B(H))$$

$$\underset{\text{Lemma 5}}{=} \sigma_l(R, C_2) \cup \sigma_r(R, C_2) = \sigma(R, C_2)$$

$$\underset{\text{Lemma 4}}{=} \left\{ \sum \alpha_i \beta_i \;\middle|\; (\alpha, \beta) \in \sigma_T((L_A, R_B), C_2) \right\}$$

$$\underset{\text{Lemma 7}}{=} \left\{ \sum \alpha_i \beta_i \;\middle|\; (\beta, \alpha) \in \sigma_T(B^{*'}\otimes A, H'\otimes H) \right\}$$

$$\underset{\text{Lemma 6}}{=} \left\{ \sum \alpha_i \beta_i \;\middle|\; \alpha \in \sigma_T(A),\ \beta \in \sigma_T(B^{*'}, H') \right\}$$

$$= \left\{ \sum \alpha_i \beta_i \;\middle|\; \alpha \in \sigma_T(A),\ \bar{\beta} \in \sigma_T(B^{*}, H) \right\}$$

$$= \left\{ \sum \alpha_i \beta_i \;\middle|\; \alpha \in \sigma_T(A),\ \beta \in \sigma_T(B) \right\}$$

Q. E. D.

References

1. Brown & Pearcy, Spectra of tensor products of operators, Proc. A.M.S. 17 (1966), 162-166.

2. Ceauşescu & Vasilescu, Tensor products and the joint spectrum in Hilbert spaces, Proc. A.M.S. 72 (1978), 505-508.

3. Choi & Davis, The spectral mapping theorem for joint approximate point spectrum, Bull. A.M.S. 80 (1974), 317-321.

4. Curto, The spectra of elementary operators, Indiana U. Math. J. 32 (1983), 193-197.

5. Davis & Rosenthal, Solving linear operator equations, Canad. J. Math. 26 (1974), 1384-1389.

6. Harte, Tensor products, multiplication operators and the spectral mapping theorem, Proc. Roy. Irish Acad. A. 72 (1973), 285-302

7. Lumer & Rosenblum, Linear operator equations, Proc. A.M.S. 10 (1959) 32-41

8. Taylor, The analytic functional calculus for several commuting operators, Acta Math. 125 (1970), 1-38.