数理解析研究所講究録
583巻 1986年 140-160

Jacobi forms に付随する L-函数について

東大理　　村瀬 篤

講演では，Jacobi form に付随する L-函数（の一つ）を定義し，その解析的性質について述べた。本稿では講演で詳しく触れなかった L-函数の Piatetski-Shapiro & Rallis 型の積分表示（[PS-R]）を中心に扱う。local factor の具体的な計算については，現在準備中の論文を参照していただきたい。

§1. Jacobi forms

Jacobi form を扱うには，T. Shintani（[Sh]）により導入された次のような $\mathbb{Q}$ 上の代数群 $\underline{G}$ のアデール群 $\underline{G}_A$ 上の保型形式ととらえるのが便利である。整数 $n \geq 1$, $m \geq 0$ に対し $\mathbb{Q}$ 上の代数群 $H = H_{n,m}$ を

$$H = M(m,n) \times M(m,n) \times Z_m$$

（ただし，$M(m,n)$ および Z_m は，それぞれ $m \times n$ 次行列および m 次対称行列のなす $\mathbb{Q}$ 上の代数群），乗法演算を，

$$(\xi,\eta,\zeta)(\xi',\eta',\zeta')=(\xi+\xi',\ \eta+\eta',\ \zeta+\zeta'+\xi\,{}^t\eta'+\eta'\,{}^t\xi)$$

により定めるものとする。 H は，two step nilpotent な代数群で，"Heisenberg group" と呼ばれる。 H には，n 次の symplectic 群 $G=G_n=\{g\in GL(2n)\mid {}^tg J_n g=J_n\}$ （ $J_n=\begin{pmatrix}0&1_n\\-1_n&0\end{pmatrix}$ ）が次のように作用する； $h=(\xi,\eta,\zeta)\in H$, $g=\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}\in G$ に対し，

$$h^g=(\xi',\eta',\zeta+\xi'\,{}^t\eta'-\xi\,{}^t\eta)$$

ただし， $(\xi',\eta')=(\xi\ \eta)g=(\xi a+\eta c,\ \xi b+\eta d)$.

そこで，$\underline{G}=\underline{G}_{n,m}$ を，$H_{n,m}$ と G_n との半直積

$$\underline{G}_{n,m}=H_{n,m}\rtimes G_n$$

により定義する。 $\underline{G}$ は $\mathbb{Q}$ 上定義された連結な代数群である。 $\underline{G}$ の中心は，$\underline{Z}=\{(0\,0\,\zeta)\mid\zeta\in Z_m\}$ だから，$m\geqq 1$ ならば，$\underline{G}$ は reductive ではない。 $\underline{G}$ は，

$$(\xi\ \eta\ \zeta)\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}\longmapsto \begin{array}{c} \qquad\qquad\qquad\ \ m\ \ \ n \\ \left[\begin{array}{c|cc} 1_{m+n} & \zeta & \eta \\ & {}^t\eta & 0 \\ \hline 0 & \multicolumn{2}{c}{1_{m+n}} \end{array}\right]\end{array}\left[\begin{array}{cc|cc} 1_m & \xi & \multicolumn{2}{c}{\multirow{2}{*}{0}} \\ 0 & 1_n & & \\ \hline \multicolumn{2}{c|}{\multirow{2}{*}{0}} & 1_m & 0 \\ & & -{}^t\xi & 1_n \end{array}\right]$$

$$\times\left[\begin{array}{cc|cc} 1_m & & 0 & \\ & a & & b \\ \hline 0 & & 1_m & \\ & c & & d \end{array}\right]$$

により $Sp(n+m)$ の部分群とみなせる。 Lie 群 $\underline{G}(\mathbb{R})$ のユニタリ表現（特に discrete series）については，I. Satake の研究（[Sa]）がある。

complex domain $\mathfrak{H}_n \times M_{mn}(\mathbb{C})$ を $\mathcal{D}=\mathcal{D}_{n,m}$ とかく。ここで $\mathfrak{H}_n=\{z\in M_n(\mathbb{C}) \mid {}^t z = z,\ \mathrm{Im}\, z>0\}$ は n次 Siegel 上半空間である。Lie 群 $\underline{\underline{G}}(\mathbb{R})$ は、$\mathcal{D}$ に次のように解析的かつ推移的に作用する:

$$\underline{g}\langle Z\rangle = (g\langle z\rangle,\ w\,j(g,z)^{-1} + \xi\cdot g\langle z\rangle + \eta)$$

ここに $\underline{g}=(\xi\,\eta\,\zeta)g \in \underline{\underline{G}}(\mathbb{R})$, $Z=(z,w)\in\mathcal{D}$ で $g\langle z\rangle=(az+b)(cz+d)^{-1}$, $j(g,z)=cz+d$ $\left(g=\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}\in G(\mathbb{R})\right.$, $\left.z\in\mathfrak{H}_n\right)$。$G(\mathbb{R})$ における $i1_n\in\mathfrak{H}_n$ の固定部分群を $K_\infty=K_{n,\infty}$ とかく: $K_\infty=\left\{\begin{pmatrix}\alpha&\beta\\-\beta&\alpha\end{pmatrix}\in G(\mathbb{R}) \,\middle|\, \alpha+i\beta\in U(n)\right\}$。$Z_0=(i1_n,0)\in\mathcal{D}$ の $\underline{\underline{G}}(\mathbb{R})$ における固定部分群は $\underline{\underline{Z}}(\mathbb{R})\cdot K_\infty$ に等しい。従って、$\underline{g}\longmapsto\underline{g}\langle Z_0\rangle$ は、$\underline{\underline{G}}(\mathbb{R})/\underline{\underline{Z}}(\mathbb{R})\cdot K_\infty$ から $\mathcal{D}$ の上への diffeomorphism を与える。

次に、整数 l と m次半整数正定値対称行列 S に対し、保型因子 $J_{S,l}$ を定義する。$u,v\in M(m,n)$ に対し、$S(u,v)={}^t u S v$, $S[u]={}^t u S u$ と略記する。$\underline{g}=(\xi\,\eta\,\zeta)g\in\underline{\underline{G}}(\mathbb{R})$ $\left(g=\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}\right)$, $Z=(z,w)\in\mathcal{D}$ に対し、

$$J_{S,l}(\underline{g},Z)=\det j(g,z)^l\,\mathbf{e}\big[-\mathrm{tr}\,S\zeta + \mathrm{tr}\,S[w]\,j(g,z)^{-1}c - 2\,\mathrm{tr}\,S(\xi,w)\,j(g,z)^{-1} - \mathrm{tr}\,S[\xi]\,g\langle z\rangle\big]$$

とおく。ここに $\mathbf{e}[x]=e^{2\pi i x}$ $(x\in\mathbb{R})$。$(\underline{g},Z)\longmapsto J_{S,\ell}(\underline{g},Z)$ は $\underline{G}(\mathbb{R})\times\mathfrak{D}$ 上の保型因子を定める。

最後に，この保型因子を用いて weight ℓ, index S の holomorphic cusp forms の空間 $\mathfrak{S}_{S,\ell}$ を定義する。$\mathbb{Q}$ のアーデル環を A とおく。$A/\mathbb{Q}$ の non trivial character ψ_A で $\psi_A(x_\infty)=\mathbf{e}[x_\infty]$ $(x_\infty\in\mathbb{R})$ なるものをとる。$Z(A)$ の character ψ_S を $\psi_S(\mathfrak{z})=\psi_A(\mathrm{tr}\,S\mathfrak{z})$ により定義する。さらに $\underline{K}_f=\prod_{p<\infty}\underline{K}_p$ $(\underline{K}_p=\underline{G}_{\mathbb{Z}_p})$ とおく。正整数 ℓ に対し，$\mathfrak{S}_{S,\ell}$ を次の条件 (1.1) — (1.4) をみたす $\underline{G}_A$ 上の $\mathbb{C}$-valued function f のなす $\mathbb{C}$-vector space とする。

(1.1) $f((0\,0\,\mathfrak{z})\,\underline{\gamma}\,\underline{g}\,\underline{k}\,k_\infty)$

$$=\psi_S(\mathfrak{z})\det j(k_\infty,i1_n)^{-\ell}f(\underline{g})$$

$$(\mathfrak{z}\in Z_A,\ \underline{\gamma}\in\underline{G}_{\mathbb{Q}},\ \underline{k}\in\underline{K}_f,\ k_\infty\in K_\infty)$$

$Z\in\mathfrak{D}$ に対し，$\underline{g}_Z\langle Z_0\rangle=Z$ なる $\underline{G}_{\mathbb{R}}$ の元 $\underline{g}_Z$ を選び，$F_f(Z)=f(\underline{g}_Z)J_{S,\ell}(\underline{g}_Z,Z_0)$ とおく。条件 (1.1) により $F_f(Z)$ は $\underline{g}_Z$ のとり方によらず $Z\in\mathfrak{D}$ の函数となる。

(1.2) $Z\longmapsto F_f(Z)$ は $\mathfrak{D}$ 上正則。

(1.3)　　f は $\underline{\underline{G}}_A$ 上有界。

最後の条件を述べるために，いくつか記号を導入する必要がある。整数 d $(1\leq d\leq n)$ に対し，

$$P(d)=\left\{\begin{array}{c}\begin{array}{cccc} d & n-d & d & n-d\end{array}\\ \begin{bmatrix} A & * & * & * \\ 0 & \alpha & * & \beta \\ 0 & 0 & {}^tA^{-1} & 0 \\ 0 & \gamma & * & \delta\end{bmatrix}\end{array}\in G_n \;\middle|\; \begin{array}{l}A\in GL(d)\\ \begin{pmatrix}\alpha&\beta\\ \gamma&\delta\end{pmatrix}\in Sp(n-d)\end{array}\right\},$$

$$N(d)=\left\{\begin{array}{c}\begin{array}{cccc} d & n-d & d & n-d\end{array}\\ \begin{bmatrix} 1_d & * & * & * \\ 0 & 1_{n-d} & * & 0 \\ 0 & 0 & 1_d & 0 \\ 0 & 0 & * & 1_{n-d}\end{bmatrix}\end{array}\in G_n\right\}$$

とおく。$\{P(d) : 1\leq d\leq n\}$ は G_n の maximal parabolic subgroups の共役類の代表系をなす。$N(d)$ は $P(d)$ の unipotent radical である。さらに

$$H(d)=\left\{(0\ \eta\ 0)\in H \;\middle|\; \eta=\begin{array}{c}\begin{array}{cc} d & n-d\end{array}\\ (\ *\ \ \ 0\ )\end{array}\right\}$$

とおく。最後の条件 (cuspidal condition) は次の通り。

$$(1.4)\quad \int_{\underline{N}(d)_{\mathbb{Q}}\backslash \underline{\underline{N}}(d)_A} f(\underline{\underline{n}}\,\underline{\underline{g}})\,d\underline{\underline{n}}=0 \qquad \text{for } \forall \underline{\underline{g}}\in \underline{\underline{G}}_A \quad \forall d$$

ただし，$\underline{N}(d)=H(d)\cdot N(d)$。

$\mathfrak{S}_{s,l}$ の各元 f を weight l, index $\mathcal{S}$ の正則 Jacobi cusp form と呼ぶ。$\mathfrak{S}_{s,l}$ は $\mathbb{C}$ 上有限次元であることが知られている。

§2. Hecke作用素，L-函数 ([Sh])

$p \nmid \det(2S)$ なる素数 p を一つfixし，$\underline{G}_p = \underline{G}_{\mathbb{Q}_p}$，$\underline{K}_p = \underline{G}_{\mathbb{Z}_p}$ etc. と略記する。$\psi_{S,p}$ を，ψ_S のlocal component とする。$\mathcal{H}_p = \mathcal{H}_p(\underline{G}_p, \underline{K}_p : \psi_{S,p})$ を，次の二条件(2.1),(2.2)をみたす $\underline{G}_p$ 上の $\mathbb{C}$-valued functions のなす $\mathbb{C}$-module とする。

$$(2.1) \qquad \varphi((0\,0\,z)\underline{k}\,\underline{g}\,\underline{k}') = \psi_{S,p}(z)\,\varphi(\underline{g})$$

$$(z \in Z_p,\ \underline{k}, \underline{k}' \in \underline{K}_p)$$

(2.2) φ は modulo $\underline{Z}_p$ で compact な support をもつ。

$\varphi_1, \varphi_2 \in \mathcal{H}_p$ に対し convolution

$$\varphi_1 * \varphi_2(\underline{g}) = \int_{\underline{Z}_p \backslash \underline{G}_p} \varphi_1(\underline{g}\,\underline{x}^{-1})\,\varphi_2(\underline{x})\,d\underline{x}$$

により積を定めることにより，$\mathcal{H}$ は $\mathbb{C}$-algebra をなす。

$$\underline{N} = \left\{ (0\ \eta\ 0)\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & {}^tA^{-1} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & X \\ & 1 \end{pmatrix} \;\middle|\; A = \begin{pmatrix} 1 & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{pmatrix} \in GL(n),\ X \in Z_n \right\},$$

$$\underline{T} = \left\{ \begin{pmatrix} t_1 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & t_n & & & \\ & & & t_1^{-1} & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & t_n^{-1} \end{pmatrix} \right\}$$

とおき，$d\underline{n}$ を $\underline{N}_p$ の Haar measure で

$$\int_{\underline{N}_{\mathbb{Z}_p}} d\underline{n} = 1$$

なるものとする。さらに $t \in T_{\mathbb{Q}_p}$ に対し，

$$\delta_{\underline{N}}(t) = d(t\underline{n}t^{-1})/d\underline{n}$$

により $\underline{N}$ の module $\delta_{\underline{N}}$ を定義する。$\varphi \in \mathcal{H}_p$，$t \in T_p$ に対し

$$\tilde{\varphi}(t) = \delta_{\underline{N}}^{-\frac{1}{2}}(t) \int_{\underline{N}} \varphi(\underline{n}t)\, d\underline{n}$$

とおくと，$\tilde{\varphi}$ は T_p 上 compactly supported である。

$\lambda = (\lambda_1, \cdots, \lambda_n) \in \mathbb{Z}^n$ に対し

$$\pi^\lambda = \begin{pmatrix} p^{\lambda_1} & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & p^{\lambda_n} & & & \\ & & & p^{-\lambda_1} & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & p^{-\lambda_n} \end{pmatrix} \in T_p$$

とかく。$\varphi \in \mathcal{H}$ に対し

$$F_\varphi(X) = \sum_{\lambda \in \mathbb{Z}^n} \tilde{\varphi}(\pi^\lambda)\, X_1^{\lambda_1} \cdots X_n^{\lambda_n}$$

とおくと，$F_\varphi \in \mathbb{C}[X_1^{\pm 1}, \cdots, X_n^{\pm 1}]$ である。

$1 \leq i < j \leq n$，$1 \leq k \leq n$ に対し，$\mathbb{C}[X_1^{\pm 1}, \cdots, X_n^{\pm 1}]$ の自己同型 σ_{ij}, τ_k を

$$\sigma_{ij}(X_l) = \begin{cases} X_j & l = i \\ X_i & l = j \\ X_l & \text{otherwise} \end{cases}$$

$$\tau_k(X_l) = \begin{cases} X_k^{-1} & l = k \\ X_l & \text{otherwise} \end{cases}$$

により定め，σ_{ij}, τ_k たちで生成される $\mathbb{C}[X_1^{\pm 1}, \cdots, X_n^{\pm 1}]$

の自己同型群を，Wとかく。 このとき F_φ は，W-不変 (i.e. $F_\varphi \in \mathbb{C}[X_1^{\pm 1}, \dots, X_n^{\pm 1}]^W$) である。

<u>Proposition 1</u> (Satake 同型) 写像 $\varphi \mapsto F_\varphi$ は，$\mathcal{H}$ から $\mathbb{C}[X_1^{\pm 1}, \dots, X_n^{\pm 1}]^W$ への，$\mathbb{C}$-algebra としての同型を与える。

$\chi \in \mathrm{Hom}(T_p/T_p^\circ, \mathbb{C}^\times)$ ($T_p^\circ = T_{\mathbb{Z}_p}$) に対して，$\underline{G}_p$ 上の函数 ϕ_χ を

$$\phi_\chi((0\,0\,z)\,\underline{n}\,t\,(\xi\,0\,0)\,\underline{k}) = \psi_{s,p}(z)\,\chi\cdot\delta_{\underline{N}}^{\frac{1}{2}}(t)\cdot\Phi(\xi)$$

$(z \in Z_p,\ \underline{n} \in \underline{N}_p,\ t \in T_p,\ \xi \in M_{mn}(\mathbb{Q}_p),\ \underline{k} \in \underline{K}_p)$

により定める。 ただし Φ は $M_{mn}(\mathbb{Z}_p)$ の特性函数。

$\underline{G}_p$ の"帯球函数" ω_χ を，

$$\omega_\chi(\underline{g}) = \int_{\underline{K}_p} \phi_\chi(\underline{k}\,\underline{g})\,d\underline{k} \qquad (\underline{g} \in \underline{G}_p)$$

により定義する。 ここで $\underline{K}_p$ の Haar measure $d\underline{k}$ は $\int_{\underline{K}_p} d\underline{k} = 1$ により正規化する。 このとき，次が成立する。

<u>Proposition 2</u>

(i) $\omega_\chi((0\,0\,\zeta)\,\underline{k}\,\underline{g}\,\underline{k}') = \psi_{S,p}(\zeta)\,\omega_\chi(\underline{g})$

$\zeta \in Z_p,\ \underline{k}, \underline{k}' \in \underline{K}_p,\ \underline{g} \in \underline{G}_p$

(ii) $\omega_\chi(1) = 1$

(iii) $\varphi \in \mathcal{H}$ に対し,

$$\varphi * \omega_\chi = \widehat{\omega}_\chi(\varphi) \cdot \omega_\chi$$

ただし, $\widehat{\omega}_\chi(\varphi) = F_\varphi(\chi_1^{-1}(p), \cdots, \chi_n^{-1}(p))$

(ここで $\chi\begin{pmatrix} t_1 \cdots t_n & \\ & t_1^{-1} \cdots t_n^{-1} \end{pmatrix} = \chi_1(t_1) \cdots \chi_n(t_n)$ とおいた)

<u>Proposition 3</u> $\varphi \longmapsto \widehat{\omega}_\chi(\varphi)$ は, $\mathcal{H}$ から $\mathbb{C}$ への $\mathbb{C}$-algebra homomorphism を与える。逆に $\mathcal{H}$ から $\mathbb{C}$ への任意の $\mathbb{C}$-algebra homomorphism は, $\widehat{\omega}_\chi$ ($\chi \in \mathrm{Hom}(T_p/T_p^0, \mathbb{C}^\times)$) の形にかける。

$\mathcal{H}_p$ は convolution により, $\mathfrak{S}_{S,l}$ に作用する。この作用は, $\mathfrak{S}_{S,l}$ の自然な計量に関し正規であり, また, Proposition 1 により $\mathcal{H}_p$ は可換だから, $\mathfrak{S}_{S,l}$ の基底として, $\bigotimes_{p \nmid \det(2S)} \mathcal{H}_p$ の同時固有函数からなるものがとれる。 $f \in \mathfrak{S}_{S,l}$ が $\mathcal{H}_p$ ($p \nmid \det(2S)$) の同時固有函数であるとする:

$$f * \varphi = \lambda_{f,p}(\varphi) \cdot f \qquad (\varphi \in \mathcal{H}_p,\ \lambda_{f,p}(\varphi) \in \mathbb{C}).$$

$\varphi \longmapsto \lambda_{f,p}(\varphi)$ は，$\mathcal{H}$ から $\mathbb{C}$ への $\mathbb{C}$-algebra homomorphism だから Proposition 3 より，

$$\lambda_{f,p}(\varphi) = \widehat{\omega}_{\chi_{f,p}}(\varphi) \qquad \varphi \in \mathcal{H}_p$$

なる $\chi_{f,p} \in \mathrm{Hom}(T_p/T_p^\circ, \mathbb{C}^\times)$ が存在する．$\chi_{f,p}$ に対応する $\mathbb{Q}_p^\times$ の character を $\chi_{f,p}^{(i)}$ $(1 \leq i \leq n)$ とし，

$$L_p(s,f) = \prod_{i=1}^{m} (1-\chi_{f,p}^{(i)}(p)p^{-s})^{-1}(1-\chi_{f,p}^{(i)}(p)^{-1}p^{-s})^{-1}$$

とおく。

$$L(s,f) = \prod_{p \nmid \det(2S)} L_p(s,f)$$

が，我々の考察の対象とする f の L-函数である．

§3. Orbit decomposition

$W = \mathbb{Q}^{4n+2m}$（横ベクトルの空間と考える）上の行列

$$J_W = \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} \scriptstyle m & \scriptstyle 2n & \scriptstyle m & \scriptstyle 2n \end{array} \\ \left[\begin{array}{cc|cc} 0 & & 1_m & \\ & J_n & & 0 \\ \hline -1_m & & 0 & \\ & 0 & & -J_n \end{array}\right] \end{array}$$

により定まる非退化歪対称形式 $\langle\ ,\ \rangle_W$ に関する symplectic 群を，G^* とする：

$$G^* = \{ g^* \in GL(4n+2m) \mid \langle wg^*, w'g^* \rangle_W = \langle w, w' \rangle_W \quad {}^\forall w, w' \in W \}.$$

$\mathcal{X}$ を，$\langle\ ,\ \rangle_W$ に関する W の maximal isotropic $\mathbb{Q}$-subspace のなす集合とする。$G^*_{\mathbb{Q}}$ は，$\mathcal{X}$ に（右から）推移的に作用する。$e_i = (0 \cdots 0 \overset{i}{1} 0 \cdots 0)$ $(1 \leq i \leq 4n+2m)$ を，W の basis

とする。L_0 を，e_i ($1\le i\le m$)，e_i+e_{i+m} ($m+1\le i\le m+2n$) で張られる W の部分空間とすると，$L_0\in\mathfrak{X}$。L_0 の G^*_Q における固定部分群を，P^*_Q とすると，P^* は G^* の maximal parabolic subgroup で，その Levi subgroup は $GL(2n+m)$ と同型であり，$\mathfrak{X}$ と $P^*_Q\backslash G^*_Q$ は G^*_Q の作用する均質空間として同一視される。

$$\underline{g}=(\xi\ \eta\ \zeta)\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix},\quad \underline{g}'=(\xi'\ \eta'\ \zeta')\begin{pmatrix}a'&b'\\c'&d'\end{pmatrix}\in\underline{G}$$

に対し，

$$\iota(\underline{g}\times\underline{g}')=\begin{array}{c}
\begin{array}{cccccc}m&n&n&m&n&n\end{array}\\
\left[\begin{array}{ccc|ccc}
1_m&\xi&\eta&\tilde{\zeta}&\xi'&\eta'\\
0&1_n&0&{}^t\eta&0&0\\
0&0&1_n&-{}^t\xi&0&0\\
\hline
&&&1_m&0&0\\
&0&&-{}^t\eta'&1_n&0\\
&&&{}^t\xi'&0&1_n
\end{array}\right]
\end{array}
\begin{array}{c}
\begin{array}{cccccc}m&n&n&m&n&n\end{array}\\
\left[\begin{array}{ccc|ccc}
1_m&&&&&\\
&a&b&&0&\\
&c&d&&&\\
\hline
&&&1_m&&\\
&0&&&a'&b'\\
&&&&c'&d'
\end{array}\right]
\end{array}$$

$$(\tilde{\zeta}=\zeta-\zeta'-\eta\,{}^t\xi+\eta'\,{}^t\xi')$$

とおくと，ι は $\underline{G}\times\underline{G}$ から G^* への準同型写像を定める。明らかに，$\mathrm{Ker}\,\iota=\underline{Z}^d=\{(0\,0\,\zeta)\times(0\,0\,\zeta)\mid\zeta\in Z_m\}$。$m=0$ のときは，ι は [PS-R] で与えられている $Sp(n)\times Sp(n)$ から $Sp(2n)$ への embedding に一致している。$\underline{G}_Q\times\underline{G}_Q$ は，ι を通じて $\mathfrak{X}$ に作用する。

この節の目標は，$\mathfrak{X}$ の $\underline{G}_Q\times\underline{G}_Q$-orbit decomposition を求め，各 orbit の代表 L に対し，

$\underline{\underline{G}}_{\mathbb{Q}} \times \underline{\underline{G}}_{\mathbb{Q}}$ における固定部分群

$$\underline{\underline{P}}(L)_{\mathbb{Q}} = \{ \underline{\underline{g}} \times \underline{\underline{g}}' \in \underline{\underline{G}}_{\mathbb{Q}} \times \underline{\underline{G}}_{\mathbb{Q}} \mid L \cdot \iota(\underline{\underline{g}} \times \underline{\underline{g}}') = L \}$$

の構造を調べることである。 $L, L' \in \mathfrak{X}$ に対し，L, L' が同じ $\underline{\underline{G}}_{\mathbb{Q}} \times \underline{\underline{G}}_{\mathbb{Q}}$-orbit に属するとき $L \sim L'$ とかく。

$$W_1 = \sum_{i=1}^{m} \mathbb{Q} \cdot e_{m+2n+i}$$
$$W_2 = \sum_{i=1}^{m+2n} \mathbb{Q} \cdot e_{m+2n+i}$$

とおく。 $L \in \mathfrak{X}$ に対し 二つの"不変量" を次のように定義する。

$$K_1(L) = L \cap W_1$$
$$K_2(L) = \dim(L \cap W_2) - \dim(L \cap W_1),$$

ただし，W_1 と $\mathbb{Q}^m$ を自然に同一視し，$K_1(L)$ を，$\mathbb{Q}^m$ の $\mathbb{Q}$-subspace のなす集合 $\mathfrak{F}(\mathbb{Q}^m)$ の元とみる。 実は，$0 \leq K_2(L) \leq n$ であることがわかる。

明らかに $K_1(L_0) = \{0\}$，$K_2(L) = 0$。

このとき，次のことが証明される。

<u>Proposition 4</u> $L, L' \in \mathfrak{X}$ に対し

$$L \sim L' \iff K_i(L) = K_i(L') \quad i = 1, 2.$$

$\mathbb{Q}^m$ の subspace U を，W_1 の subspace とみなし，U' を，$\langle\ ,\ \rangle_W$ に関する U の直交補空間，$U^\perp = U' \cap \sum_{i=1}^m \mathbb{Q} e_i$ とおく。 整数 d $(0 \leq d \leq n)$ と，$U \in \mathfrak{F}(\mathbb{Q}^m)$ に対し， $U, U^\perp$, e_{m+n+i}, $e_{2m+3n+i}$ $(1 \leq i \leq d)$ および $e_{m+j} + e_{2m+2n+j}$, $e_{m+n+j} + e_{2m+3n+j}$ $(d+1 \leq j \leq n)$ で張られる W の subspace を $L_{U,d}$ とかく。 このとき $L_{U,d} \in \mathfrak{X}$ で， $k_1(L_{U,d}) = U$, $k_2(L_{U,d}) = d$。

<u>Cor</u> $\mathfrak{X}$ の $\underline{\underline{G}}_{\mathbb{Q}} \times \underline{\underline{G}}_{\mathbb{Q}}$-orbit decomposition の代表系として $\{ L_{U,d} \mid U \in \mathfrak{F}(\mathbb{Q}^m),\ 0 \leq d \leq n \}$ をとることができる。

次の節で必要になる $\underline{\underline{P}}(L)$ の構造を調べよう。 Cor. より $L = L_{U,d}$ の場合だけ調べれば十分である。

<u>Lemma 1</u> $\underline{\underline{P}}(L_{\{0\},0}) = \underline{\underline{G}}^d = \{ \underline{g} \times \underline{g} \mid \underline{g} \in \underline{\underline{G}} \}$

<u>Lemma 2</u> $\underline{\underline{P}}(L_{\{0\},d}) = \mathcal{H}(d) \mathcal{P}(d)$ $\quad d \geq 1$

ただし，

$$\mathcal{H}(d)=\{(\xi\,\eta\,\zeta)\times(\xi'\,\eta'\,\zeta')\in H\times H\mid \zeta=\zeta',\ \xi_i=\eta_i'=0\ (1\leq i\leq d),\ \xi_j=\xi_j',\ \eta_j=\eta_j'\ (d+1\leq j\leq n)\}$$

($\xi_i,\cdots$ は $\xi,\cdots$ の 第 i 行)

$$\mathcal{P}(d)=\left\{\begin{array}{c}\begin{array}{cccc} d & n-d & d & n-d\end{array}\\ \begin{pmatrix} A & * & * & * \\ 0 & \alpha & * & \beta \\ 0 & 0 & {}^tA^{-1} & 0 \\ 0 & \gamma & * & \delta \end{pmatrix}\end{array}\times\begin{array}{c}\begin{array}{cccc} d & n-d & d & n-d\end{array}\\ \begin{pmatrix} A' & 0 & 0 & 0 \\ * & \alpha & * & \beta \\ * & * & {}^tA'^{-1} & * \\ * & \gamma & 0 & \delta \end{pmatrix}\end{array}\ \middle|\ A, A'\in GL(d),\ \begin{pmatrix}\alpha & \beta\\ \gamma & \delta\end{pmatrix}\in Sp(n-d)\right\}$$

特に、$\underline{\underline{\mathcal{P}}}(L_{\{0\},d})$ は

$$\underline{\underline{\mathcal{N}}}(\{0\},d)=\mathcal{H}(d)\cdot(N(d)\times{}^tN(d))$$

を normal subgroup としてもつ。

一般に $U\neq\{0\}$ のときは $\underline{\underline{\mathcal{P}}}(L_{U,d})$ の構造は複雑であるが，我々の目的のためには次で十分である。$\mathbb{Q}^m$ の subspace U に対し，$\hat{U}=\{x\in\mathbb{Q}^m\mid x\,{}^tU=0\}$，$Z(U)=\{\zeta\in Z_m\mid \hat{U}\cdot\zeta\subset U\}$ とおく。

<u>Lemma 3</u>　$\underline{\underline{\mathcal{P}}}(L_{U,d})$ は $U\neq\{0\}$ のとき，

$$\underline{\underline{\mathcal{N}}}(U,d)=\{(0\,0\,\zeta)\times 1\mid \zeta\in Z(U)\}$$

を normal subgroup としてもつ。

§4. Basic identity

N^* を P^* の unipotent radical とする。$p^* \in P_A^*$, $s \in \mathbb{C}$ に対し

$$\delta_{p^*}^s(p^*) = [\,d(p^* n^* p^{*-1})/dn^*\,]^s$$

(dn^* は N_A^* の Haar measure) とおく。φ を G_A^* 上の $\mathbb{C}$-valued function で $\varphi(p^* g^*) = \delta_{p^*}^s(p^*) \cdot \varphi(g^*)$ ($p^* \in P_A^*$, $g^* \in G_A^*$) をみたすものとする。$\mathrm{Re}\, s \gg 0$ で, f が"よい"函数ならば Eisenstein 級数

$$(4.1) \qquad E(g^*;\varphi) = \sum_{\gamma^* \in P_Q^* \backslash G_Q^*} \varphi(\gamma^* g^*)$$

は絶対収束し, $G_Q^* \backslash G_A^*$ 上 slowly increasing な函数を定める。$\mathcal{C}$ を $\underline{G}_A$ 上の $\mathbb{C}$-valued smooth function で

$$(4.2) \qquad f(\underline{\gamma}\,\underline{g}\,(\,\cdots\,z)) = \psi_s(z) f(\underline{g}) \qquad \underline{\gamma} \in \underline{G}_Q,\ z \in Z_A$$

(4.3) f は $\underline{G}_Q \backslash \underline{G}_A$ 上 rapidly decreasing

$$(4.4) \qquad \int_{\underline{N}^d(Q) \backslash \underline{N}^d_A} f(\underline{u}\,\underline{g})\, d\underline{u} = 0 \qquad \underline{g} \in \underline{G}_A$$

が任意の $1 \le d \le n$ について成立

をみたすもののなす空間とする。$\varphi \in \mathcal{C}$ に対し, convolution

$$I(\varphi;f)=\int_{\mathbf{G}_{\mathbb{Q}}\times\mathbf{G}_{\mathbb{Q}}\backslash\mathbf{G}_A\times\mathbf{G}_A} E(\iota(\mathbf{g}\times\mathbf{g}'):\varphi)\, f(\mathbf{g})\overline{f(\mathbf{g}')}\,d\mathbf{g}\,d\mathbf{g}'$$

を考える。定義(4.1)より

$$I(\varphi:f)=\int_{\mathbf{G}_{\mathbb{Q}}\times\mathbf{G}_{\mathbb{Q}}\backslash\mathbf{G}_A\times\mathbf{G}_A}\ \sum_{\gamma^*\in P^*_{\mathbb{Q}}\backslash G^*_{\mathbb{Q}}/\iota(\mathbf{G}\times\mathbf{G})_{\mathbb{Q}}}\ \sum_{\xi^*\in\gamma^{*-1}P^*_{\mathbb{Q}}\gamma^*\cap\iota(\mathbf{G}\times\mathbf{G})_{\mathbb{Q}}\backslash\iota(\mathbf{G}\times\mathbf{G})_{\mathbb{Q}}}\varphi(\gamma^*\xi^*\iota(\mathbf{g}\times\mathbf{g}'))$$
$$\times f(\mathbf{g})\overline{f(\mathbf{g}')}\,d\mathbf{g}\,d\mathbf{g}' .$$

対応 $\gamma^*\longmapsto L_0\gamma^*$ は，$P^*_{\mathbb{Q}}\backslash G^*_{\mathbb{Q}}/\iota(\mathbf{G}\times\mathbf{G})_{\mathbb{Q}}$ と，$\mathfrak{X}/\sim$ との同一視を与え，さらに $\iota(\mathfrak{P}(L_0\gamma^*))=\gamma^*P^*_{\mathbb{Q}}\gamma^{*-1}\cap\iota(\mathbf{G}\times\mathbf{G})_{\mathbb{Q}}$ である。今 $L\in\mathfrak{X}$ に対し，$L=L_0\gamma^*_L$ なる $\gamma^*_L\in G^*_{\mathbb{Q}}$ を一つ選べば，

$$I(\varphi:f)=\sum_{L\in\mathfrak{X}/\sim} I_L ,$$

$$I_L=\int_{\mathfrak{P}(L)_{\mathbb{Q}}\backslash(\mathbf{G}\times\mathbf{G})_A}\varphi(\gamma^*_L\iota(\mathbf{g}\times\mathbf{g}'))f(\mathbf{g})\overline{f(\mathbf{g}')}\,d\mathbf{g}\,d$$

（I_L は L の同値類によらない）。

$L=L_0$ のとき，$\mathfrak{P}(L)=\mathbf{G}^d$ なることより，

$$I_{L_0}=\int_{\underline{\underline{G}}_A}\varphi(L(\underline{\underline{g}}\times 1))\,\Omega(\underline{\underline{g}}:f)\,d\underline{\underline{g}}\quad ,$$

ただし

$$\Omega(\underline{\underline{g}}:f)=\int_{\underline{\underline{G}}_Q\backslash\underline{\underline{G}}_A} f(\underline{\underline{x}}\,\underline{\underline{g}}^{-1})\,\overline{f(\underline{\underline{x}})}\,d\underline{\underline{x}}\quad 。$$

$L\nsim L_0$ なるときは, $L=L_{U,d}$, $(U,d)\neq(\{0\},0)$ としてよい。このとき $\underline{\underline{P}}(L)$ は Lemma 2.3 で定めた $\underline{\underline{N}}(U,d)$ を normal subgroup として もつから I_L の積分は

$$J=\int_{\underline{\underline{N}}(U,d)_Q\backslash\underline{\underline{N}}(U,d)_A} f(\underline{\underline{n}}\,\underline{\underline{g}})\,\overline{f(\underline{\underline{n}}'\underline{\underline{g}}')}\,d\underline{\underline{n}}^*$$

$(n^*=\underline{\underline{n}}\times\underline{\underline{n}}'\in\underline{\underline{N}}(U,d)_A)$ を通す。 $U=\{0\}$ のときは 上の積分 J が 更に

$$\int_{\underline{\underline{N}}^d_Q\backslash\underline{\underline{N}}^d_A} f(\underline{\underline{n}}\,\underline{\underline{g}})\,d\underline{\underline{n}}=0$$

を通すことから (4.4) により $I_L=0$. $U\neq\{0\}$ のときは, J が

$$\int_{Z(U)_Q\backslash Z(U)_A}\psi_S(z)\,dz$$

を通し, さらに ψ_S が $Z(U)_A$ 上 nontrivial であること ($S>0$ からの帰結) から $I_L=0$ を得る。

まとめると

<u>Proposition 5</u> (Basic identity)

$$(4.5) \qquad I(\varphi ; f) = \int_{\underline{G}_A} \varphi(\iota(\underline{g}\times 1))\, \Omega(\underline{g} : f)\, d\underline{g}$$

最後に，basic identity の Jacobi form の L-函数の理論への応用について大ざっぱに述べる。$G_{S,l} \subset \mathcal{C}$ であるから weight l, index S の Jacobi form f に対して (4.5) を適用できる。$f \in G_{S,l}$ を $\otimes_{p \nmid \det(2S)} \mathcal{H}_p$ の同時固有函数とすると §2の最後に述べたことから $\Omega(\underline{g} : f)$ は帯球函数 $\omega_{\chi_{f,p}}(\underline{g}_p)$ たちの積に分解する。従って φ を分解型 ($\varphi(g^*) = \prod_v \varphi_v(g_v^*)$ $\quad g^* = (g_v^*) \in G_A^*$) にとれば (4.5) の右辺はある Euler 積に分解する。K^* を適当な G_A^* の compact subgroup とし，

$\varphi_s(p^* k^*) = \delta(p^*)^s \quad (p^* \in P_A^*,\ k^* \in K^*)$ の形にとれば（実際は ∞-成分を少し変更する必要がある），good prime p ($p \nmid \det(2S)$) における Euler 積の local factor を計算することができ，それは $L_p(s, f)$ にある elementary factor をかけた

ものになる。 一方，Eisenstein 級数の理論（Langlands）により，(4.5) の左辺は，s の函数として全平面に解析接続され，ある函数等式を持つ。 これにより，f に付随する L-函数 $L(s.f)$ の解析的性質に関して情報が得られる。 この方法によって満足すべき結果が得られるのは，最初に固定した S が 各素数 p に対し，次の二条件 $(4.6)_p$，$(4.7)_p$ をみたすときである：

$(4.6)_p$ $\mathbb{Q}_p^m$ の lattice L_1 で $L_1 \supset L = \mathbb{Z}_p^m$ かつ "$x \in L_1 \Rightarrow S[x] = {}^t x S x \in \mathbb{Z}_p$" ならば $L_1 = L$

$(4.6)_p$ の下で

$$L' = \{ x \in \mathbb{Q}_p^m \mid x \in (2S)^{-1}L,\ \text{tr}\, S[x] \in p^{-1}\mathbb{Z}_p \}$$

は $\mathbb{Q}_p^m$ の lattice で $L < L' < p^{-1}L$。 今，

$\partial_p(S) = \dim_{\mathbb{F}_p}(L'/L)$ とおくと $\partial_p(S) \leqq 2$ が知られている。

$(4.7)_p$ $\partial_p(S) = 0$ （すなわち $L' = L$）

§2 で述べたこと（Satake 同型の存在）はこの場合にまで成立し，$L(s.f)$ の 解析接続，函数等式等が証明される。（ $\partial_p(S) = 1$ のとき Hecke 環 $\mathcal{H}_p$ は可換であるが Satake 同型は存在しない。 $\partial_p(S) = 2$ のときは一般に $\mathcal{H}_p$ は可換ですらない）

$m=1$, $S=(1)$ の場合 $(4.6)_p$, $(4.7)_p$ が各 p に対し成立する。この場合 $f\in \mathfrak{G}_{S,l}$ は vector valued の半整数ウエイト $(l-\frac{1}{2})$ の Siegel modular form と同一視される。

最後になったが Shintani は [Sh] においてまったく別の興味深い方法で Jacobi form の L-函数の研究を創めている。$n=1$ のときは菅野孝史氏が [Sh] で未解決だった部分も含めて証明を復元されている。本稿の §1.2 は [Sh] に多く依っていることを付言したい。

Reference

[PS-R] I. Piatetski-Shapiro & S. Rallis "L-functions of automorphic forms on simple classical groups", in "Modular forms" ed. by R.A. Rankin, Halsted Press, 1984, 251-261.

[Sa] I. Satake 「ある群拡大とそのユニタリ表現について」 数学, 21 (1969) 241-253

[Sh] T. Shintani unpublished notes