

実2次体上の A_4 拡大と Hecke 作用素

名大 理 小池 正夫 (Masao Koike)

名大 理 谷川 好男 (Yoshio Tanigawa)

1変数の保型形式に関する Hecke 作用素の固有値につ...
このある数値実験と、その結果から推測できる weight 1 の
保型形式につ...の予想につ...述べる。この結果は、志村
先生が [7], [8] で研究された、実 Neben 型, weight 2 の
cusp form の フーリエ係数と 実2次体上のあるアーベル拡大
の相互法則の間、関係の類似にもなっている。

§.1 実験

記号を次のように定める。

p : 素数 $p \equiv 1 \pmod{4}$

$\left(\frac{\cdot}{p}\right)$: 平方剰余記号

$\Gamma_0(p) = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in SL(2, \mathbb{Z}) \mid c \equiv 0 \pmod{p} \right\}$

$S_2(p, \left(\frac{\cdot}{p}\right))$: $\Gamma_0(p)$ に関する type $(2, \left(\frac{\cdot}{p}\right))$ の cusp form 全体

$\rho: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ complex conjugation

$f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n z^n$, $a_1 = 1$, $z = e^{2\pi\sqrt{-1}z} \in S_2(p, (\frac{-1}{p}))$ の元で
 primitive i.e. 全ての Hecke 作用素の同時固有関数とする。

この時 次のことが成り立つことはよく知られている。

$$\begin{cases} a_n^p = \binom{n}{p} a_n & \text{if } (n, p) = 1 \\ a_p \cdot a_p^p = p \end{cases}$$

さらに $K_f = \mathbb{Q}(a_n \mid 1 \leq n \in \mathbb{Z})$ は \mathbb{Q} 上の総虚な有限次
 拡大体で、その最大実部分体を F_f とかくと、 $[K_f : F_f] = 2$,
 F_f は総実である。 σ を勝手な $K_f \hookrightarrow \mathbb{C}$ なるうめこみとした
 時 $f^\sigma(z) = \sum a_n^\sigma z^n$ は又 $S_2(p, (\frac{-1}{p}))$ の primitive
 な元となる。

我々が注目するのは、level が p の cusp form の p 番目の Hecke 作用素 $T(p)$ の p を動かした時のふるまいである。

$T(p)$ の固有値とは primitive な上記の $f(z)$ の p 番目の Fourier 係数 a_p で a_p はその全ての共役 a_p^σ について

$$a_p^\sigma \cdot a_p^{\sigma^p} = p \text{ が成り立つ。 Gauss 和と同じ性質をもっている。}$$

しかし Gauss 和は Stickelberger の定理によつて、 p の上のどんな素因子 q も Gauss 和を割るのに、 a_p は一般にそじでな...。例えは Hecke 全集に出ている 2 つの例:

$$p = 29 \text{ の時} \quad a_p = 3 \pm 2\sqrt{-5},$$

$$p = 37 \text{ の時} \quad a_p = 1 + 6\sqrt{-1}.$$

これらの場合、 p は K_f で完全分解で、 a_p, a_p^p はそれぞれ

相異なる素イデアルの生成元となる。そこで我々は次の
 ような数値実験をやってみた。 $\overline{\mathbb{Q}} \in \mathbb{Q}$ の代数的閉包とし、
 p の上にあり $\overline{\mathbb{Q}}$ の素因子 $\tilde{p} \in 1$ を固定しておく。

実験 I p を動かした時に 次の条件 (*):

(*) $\left\{ \begin{array}{l} \text{ある primitive な } f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n z^n \in S_2(p, (\frac{p}{p})) \text{, } a_1 = 1 \\ \text{が存在して } a_p \equiv a_p^p \equiv 0 \pmod{\tilde{p}} \text{ が成り立つ} \end{array} \right.$

がみたされるような p はどのくらいあるか?

実験の結果は

定理 1 $p < 760$ の範囲で (*) が成り立つ

p は 229, 257 の 2 つの場合に限る。

この時 $S_2(p, (\frac{p}{p}))$ の次元は各々 18, 20 である。

実験 I をどのように実行するか簡単にのべる。

$S_2(p, (\frac{p}{p}))$ に作用してゐる Hecke 作用素 $T(l)$ の固有値の
 計算例は [7], [8] に見られるが p が大きいところでは
 $l = 2, 3, 5$ といふ小さい値に止す例のみで我々の役に
 たたない。我々は $T(p)$ の固有値を直接計算して実験を進め
 たのではない。 $\text{mod } p$ の保型形式の理論を使つて証明でき
 る。次の補題が役に立つ。

補題 1 次のことは同値である。

(1) p が条件 (*) をみたす。

(2) $S_{\frac{p+3}{2}} \in SL(2, \mathbb{Z})$ に関する weight が $\frac{p+3}{2}$ の cusp form の空間として, $T(p)$ を それに作用する degree p の Hecke 作用素とした時, $T(p)$ の固有多項式 $H_p(X) (\in \mathbb{Z}[X])$ によって

$$H_p(X) \equiv X^c H(X) \pmod{p\mathbb{Z}[X]}$$

($c > 0$, $H(X)$ は ある多項式) が成り立つ。

我々が実験をしたのは 補題 1 の (2) の検証であった。それから 定理 1 が得られた。しかし p をさらに大きくすれば weight $\frac{p+3}{2}$ が大きくなり, $S_{\frac{p+3}{2}}$ の次元が大きくなり, (2) を検証することも容易ではなくなる。その時は, 次の補題が役に立つ。

補題 2 p によって 条件 (*) が成り立つ。(*) の中の primitive な cusp form $f(z) = \sum a_n q^n$ によってある n に対して $a_n \not\equiv a_n^p \pmod{\tilde{p}}$ と仮定する。
(このことは $(\frac{n}{p}) = -1$ となる n で $a_n \not\equiv 0 \pmod{\tilde{p}}$ が成立するようなものがあればよいためから容易にわかる)

この時, $S_{\frac{p+3}{2}}$ に作用してゐる degree l の Hecke 作用素 $T(l)$ の固有多項式を $H_l(X)$ とかくと, p と異なる素数 l によって $H_l(X) \pmod{p\mathbb{Z}[X]}$ は

$$\left(\frac{l}{p}\right) = 1 \text{ ならば } (X-\alpha)^2, \quad \left(\frac{l}{p}\right) = -1 \text{ ならば } (X-\alpha)(X+\alpha)$$

の形の因子を持つ。ただし $\alpha \in \mathbb{F}_p$ とは限らぬ。

補題 2 が成りたっているかどうかを見るだけならば $T(2)$, $T(3)$, ... で充分なわけでも (＊) を p がみたさないことはいえる。それでも p が大きくなればひとつの計算が大変なので全ての p についてみることは能率が悪い。又ある予測が得られたので p について次の条件をみることにしてだけ実験を進めた:

条件(C-3): 実 2 次体 $\mathbb{Q}(\sqrt{p})$ の類数が 3 で割れる。

定理 2 p が素数で条件(C-3)をみたして

$p < 2090$ とする。この時、次の p :

229, 257, 761, 1129, 1229, 1489, 2089

以外の p は (＊) をみたさない。

定理 2 で (＊) をみたさない p は 733, 1373, 1901 の

3 つで、定理 2 にあはれり p についてある程度たくましの l について補題 2 が成りたつことを確かめた。

これらで実験 1 については、数学的に無意味ではない現象がとらえられたと思う。

次に

実験 II

p が (*) をみたしているとする。(*) が成立する primitive な $f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n z^n$, $a_1 = 1$ について他のフーリエ係数 a_n , $(n, p) = 1$ は $\text{mod } \tilde{p}$ でどんな規則をもち定まっているか?

(*) が成りたつ $f(z)$ に何かを期待するのは虫がよいこともいえるが、我々は運のよいことに次の予想を教値実験から得ることができた。

予想 1

$f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n z^n$, $a_1 = 1$ が $S_2(p, \frac{p}{p})$ の primitive な元で

(*) をみたしているとする。この時 p と異なる素数 l について以下の合同式のどれかが成りたつ:

$$a_l^2 \equiv \begin{cases} 0 \\ l \\ 4l \end{cases} \pmod{\tilde{p}} \quad \text{if } \left(\frac{l}{p}\right) = 1,$$

$$a_l^2 \equiv \begin{cases} 0 \\ -2l \end{cases} \pmod{\tilde{p}} \quad \text{if } \left(\frac{l}{p}\right) = -1.$$

しかも上の全ての型の合同式のどれをとっても、それが成りたつような l は無数に存在する。

定理 2 の p 達のうち 229, 257 以外の p については
 (木) とみえす $f(z)$ はその候補しか分らないわけだが
 その候補の q -リエ係数達も 予想の合同式とみたしている。
 このことから、定理 2 の p 達が (木) とみえしている可能性
 は充分高いと思える。

§2. 実験から予想の背景へ

我々は §1 での数値実験から ある種のよい性質をもつ
 保型形式の系列の存在をさぐりあてることができたとい
 えると思うが、ここではそれをより確実なものとするた
 めに、予想を weight 1 の保型形式との関連で見直す。そ
 には \mathbb{Q} 上ガロア群が S_4 と同型になる拡大で p の外側で不
 分岐なものがある。その体は実 2 次体 $\mathbb{Q}(\sqrt{p})$ を含み、
 それ上 A_4 拡大 (i.e. ガロア群が A_4 と同型) となる。これ
 が志村先生の場合に $\mathbb{Q}(\sqrt{p})$ 上のアーベル拡大と対応するもの
 になる。

2.1 cusp forms of weight 1

ここで weight 1 の保型形式について復習しておく。

Deligne - Serre によつて primitive な weight 1 の cusp
 form $h(z) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n z^n$, $c_1 = 1$ に対して $G_{\mathbb{Q}} = \text{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$
 の既約な 2 次元表現 ρ

$$\rho : G_{\mathbb{Q}} \longrightarrow GL_2(\mathbb{C})$$

で $\det \rho$ が odd ならば存在し、その Artin L 関数 $L(s, \rho)$

はついで

$$(4) \quad L(s, \rho) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n n^{-s}$$

が成りたつことを示すために、逆に上記のような ρ が与えら

れた時、 $GL_2(\mathbb{C})$ から $PGL_2(\mathbb{C})$ への射影 ε をとり

$$\tilde{\rho} : G_{\mathbb{Q}} \longrightarrow PGL_2(\mathbb{C})$$

とすれば $Im \tilde{\rho}$ は有限群で次の形のものに限られる。

(1) dihedral group

(2) A_4, S_4

(3) A_5

ρ に対して weight 1 の cusp form $h(z)$ が (4) をみたすものが存在するかどうかという問題は (1) の case は Hecke により証明され、(2)(3) については Weil-Langlands τ ρ とおきの twist 連関にて Artin 予想が成りたつことは示された。最近 (1976年) Langlands と Tunnell により、(2) の case は Artin 予想が証明でき、従って weight 1 の cusp form の存在も示された。

primitive の weight 1 の cusp form に対して対応する $G_{\mathbb{Q}}$ の表現 ρ の像により、 $h(z)$ が dihedral 型 とか S_4 型 とかと呼ぶことになる。

志村先生の [7][8] の結論の 1) の ... のえとして.

$S_2(p, (\bar{p}))$ の primitive な元 $f(z)$ に対して K_f/F_f を分解してあるあゝ種の素イデアル $\tilde{\nu}$ に対して dihedral 型 の weight 1 の cusp form $h(z)$ が存在して 合同式

$$f(z) \equiv h(z) \pmod{\tilde{\nu}}$$

が成りたつことがいえる ([3] 参照)

[7][8] の時点では Langlands 等の仕事はまだなくて weight 1 の cusp form の存在等については dihedral 型のみが自由に取っ扱かえたのに 現在の我々は A_4 型 S_4 型の form まで取っ扱かえるという利点がある。

2.2

以下では $f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n q^n \in S_2(p, (\bar{p}))$, $a_1 = 1$ 且 primitive な元で (本) とみたして ... のみを考える。

この時 補題 1 によつて $S_{\frac{k+2}{2}}$ の primitive な元

$$g(z) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n q^n, \quad b_1 = 1, \quad \tau$$

$$a_n \equiv b_n \pmod{\tilde{\nu}} \quad \forall n \geq 1$$

を満たすものが存在する。(補題 1 の証明の中で $g(z)$ の存在が示される。)

$f(z)$ に対しては weight 2 故に志村理論によつて

① 上定義されたア-バール多様体 A_f が存在させられ A_f の

等分点を調べることが出来る。一方、 $f(z)$ に対しては Serre, Swinnerton-Dyer, Ribet 等による p -進表現の像の研究が使える。我々はその両方を用いることにより、この次の定理を証明できる。

定理 3. 上記の $f(z)$ に対して予想が正しいとする。

この時、次の性質をみたす \mathbb{Q} 上のガロア拡大 M が存在する。

- (1) $\text{Gal}(M/\mathbb{Q}) \simeq S_4$.
- (2) M は p の外で不分岐
- (3) $M \supset \mathbb{Q}(\sqrt{p})$
- (4) $L \in A_4$ に含まれる (2,2) 型の正規部分群に対応する M の部分体を L とし、 $L/\mathbb{Q}(\sqrt{p})$ は不分岐拡大。
- (5) $\mathbb{Q}(\sqrt{p})$ の次数は 3 で割れる。
- (6) $l \in p$ と異なる素数に対して l の M/\mathbb{Q} のフロベニウス元の位数は予想により q_l の合同式、型の順番に 2, 3, 1, 2, 4 である。

(5) が成り立つことから 実験 I を p の条件 (C-3) をみたすものの中から探す理由が少しは正吉にされた。

更に この時 S_4 の部分群で S_3 と同型なものに対応する M の部分体の 1 つを K とする。 K は \mathbb{Q} 上非ガロア拡大で相異なる 4 個の共役体がある。

命題 定理 3 と同じ仮定で同じ記号を使うと、次のことが成り立つ。

- (1) K は \mathbb{Q} 上 4 次拡大で 総虚
- (2) K は p の外で 不分裂で 判別式は p である。
- (3) K の 真の 部分体は \mathbb{Q} しかない。
- (4) p の K での 素イデアル分解は $\mathfrak{p}_1^2 \mathfrak{p}_2$ である。
- (5) K の \mathbb{Q} 上の ガロア 閉包が M で M は \mathbb{Q} 上の ガロア 群が S_4 と同型である。

上記の命題にいう性質を持つ 4 次拡大 K については Godwin [2] の仕事があり それによれば $p < 1458$ のほかに K が存在する p は 以下 :

$$229, 257, 761, 1129, 1229$$

の 5 つしかない。

Godwin の結果と 定理 2 とは完全に整合している。

そこで 命題にいう K を出発点にする。 K から M へ入ることによって $\tilde{\rho}: G_{\mathbb{Q}} \longrightarrow S_4 \hookrightarrow \mathrm{PGL}_2(\mathbb{C})$ がつくれ。 $\tilde{\rho}$ が $\mathrm{GL}_2(\mathbb{C})$ への持ち上げが p の外で 不分裂なままとする。 後、 ρ (2.1 で説明したよ) に p に対応する weight 1 の cusp form $h(z)$ の存在がわかる。 Serre [6] の結果を

見れば $h(z)$ は $\Gamma_0(p^2)$ に属する cusp form であり、 $\Gamma_0(p)$ 上のものとなる。ここでわかる。 $h(z)$ は mod p の Dirichlet 指標の twist の自由度があるが、我々の次のことを予想している。

予想 2 K を命題に... 体とする。記号 ε は ε と同じとする。この時 primitive の weight 1 の cusp form $h(z)$ の level が p^2 のものに対する性質をみる。この唯一のものがある:

(1) $h(z)$ に対応する $G_{\mathbb{Q}}$ の表現 $\tilde{\rho}$ の kernel

に対応する体は M である。

(2) $S_2(p, \frac{1}{p})$ の primitive な元 $f(z)$ が存在して

$$\text{合同式} : f(z) \equiv h(z) \pmod{\tilde{\rho}}$$

が成り立つ。

我々が $\S 1$ の実験の中で見つけた $f(z)$ は全て上の予想の中に現れるように考えている。これはすでに証明できているものが、次のことを示している。

定理 4. $p = 229, 257$ に対して 予想 1, 2 は正しい。

詳しい証明は [5] を参照してください。

References

- [1] P. Deligne and J.-P. Serre, *Formes modulaires de poids 1*,
Ann. Sci. E.N.S., 7 (1974), 507-530.
- [2] H. J. Godwin, *On totally complex quartic fields with
small discriminants*, Proc. Cambridge Phil. Soc., 53
(1957), 1-4.
- [3] M. Koike, *Congruences between cusp forms and
linear representations of the Galois group*, Nagoya
Math. J., 64 (1976), 63-85.
- [4] M. Koike, *A note on modular forms mod p*, Nagoya
Math. J., 89 (1983), 89-107.
- [5] M. Koike and Y. Tanigawa, *A_4 -extensions over real
quadratic fields and Hecke operators*, preprint.
- [6] J.-P. Serre, *Modular forms of weight one and Galois
representations*, Algebraic Number fields edited by
A. Fröhlich, 193-268, London, Academic press 1977.
- [7] G. Shimura, *Introduction to the arithmetic theory of
automorphic functions*, Iwanami Shoten 1971.
- [8] G. Shimura, *Class fields over real quadratic fields
and Hecke operators*, Ann. of Math., 95 (1972), 130-190