数理解析研究所講究録
583巻 1986年 87-105



# Siegel modular variety 上の Holomorphic tensor

露峰茂明
(Shigeaki Tsuyumine)

$\mathcal{A}_n = H_n / \Gamma_n$ を、Siegel modular variety とする、ここで $H_n$ は $n$ 次の Siegel space であり、$\Gamma_n = Sp_{2n}(\mathbb{Z})$ である。$\mathcal{A}_n$ は $n$ 次元の principally polarized abel 多様体の coarse moduli variety である。$\hat{\mathcal{A}}_n$ を $\mathcal{A}_n$ の non-singular model とする。$\hat{\mathcal{A}}_n$ は $n \geq 9$ の時 general type であることが Tai [6] により示されている ($n = 8$ の時は Freitag [4], $n = 7$ の時は Mumford [11] による同様の結果がある。) この性質は、(specify されるべき) 特定な subvariety を除いて、すべての $\mathcal{A}_n$ の subvariety が満たしていると思われている。

Freitag は $n$ がある数 $n_0$ 以上ならば、$\mathcal{A}_n$ のすべての余次元 1 の subvariety は type 'G' であることを示した、ここで type 'G' は general type を弱めた定義である。さらに Freitag は $n_0$ は 10 に取れると予想している (以上は Freitag [5])。

以下、次の結果を紹介する。

定理　$n \geq 10$ とする。この時 $\mathcal{A}_n$ のすべての余次元 1 の subvariety は general type である。

この系として次を得る (cf Freitag [5])。

系　$\Gamma_n(l)$ を principal congruence subgroup とする，即ち $\Gamma_n(l) = \{M \in \Gamma_n \mid M \equiv 1_{2n} \mod l\}$。$\mathcal{A}_{n,l} = H_n/\Gamma_n(l)$ とおく。$n \geq 10$ の時

$$\mathrm{Birat\ Aut}_{\mathbb{C}}(\mathcal{A}_{n,l}) = \mathrm{Aut}_{\mathbb{C}}(\mathcal{A}_{n,l}) \cong \Gamma_n/\pm\Gamma_n(l)。$$

換言すれば，$K(\Gamma_n(l))$ を $\Gamma_n(l)$ に関する Siegel modular function field とする時，

$$\mathrm{Aut}_{\mathbb{C}}(K(\Gamma_n(l))) \cong \Gamma_n/\pm\Gamma_n(l)。$$

特に $l = 1$ とすれば，$\mathrm{Birat\ Aut}_{\mathbb{C}}(\mathcal{A}_n) = \mathrm{Aut}_{\mathbb{C}}(K(\Gamma_n))$ は自明な群である。

実際、系は定理より次のように導びかれる。$l = 1$ の場合で考える。$\mathcal{A}_n$ の Satake compact 化を $\mathcal{A}_n^*$ で表わし，$f$ をその birational automorphism とする。Hironaka の定理より，$\mathcal{A}_n^*$ の適当な blowing up $\hat{\mathcal{A}}_n$

を取って，可換な図式を得る；

$$
\begin{tikzcd}
 & \tilde{\mathcal{A}}_n \arrow[dl, "g_1"'] \arrow[dr, "g_2"] \arrow[d, phantom, "\circlearrowleft"] & \\
\mathcal{A}_n^* \arrow[rr, dashed, "f"'] & & \mathcal{A}_n^*
\end{tikzcd}
$$

ここで $g_2$ による exceptional divisor の行き先を考えれば，定理より，それらはすべて潰れていなければならない。可換な図式を得るために $\mathcal{A}_n^*$ の blowing up $\tilde{\mathcal{A}}_n$ を取ったのであるが，従ってこれは不要であり，$f$ 自身が morphism であることが分かった。$f$ は $\mathcal{A}_n^*$ の automorphism となる。$\mathcal{A}_n^*$ の cusp のような特異点は $\mathcal{A}_n$ の中にはないので（$n>1$として），$f$ により cusp は cusp に移る；

$$
\begin{tikzcd}
f:\ \mathcal{A}_n^* \arrow[r, "\sim"] & \mathcal{A}_n^* \\
H_n/\Gamma_n \arrow[u, phantom, "\cup" rotate=90] \arrow[r, "\sim"] & H_n/\Gamma_n \arrow[u, phantom, "\cup" rotate=90]
\end{tikzcd}
$$

$\Gamma_n$ は maximal discrete な $Sp_{2n}(\mathbb{R})\ (=\mathrm{Aut}(H_n)^0)$ の部分群であるから $f|H_n/\Gamma_n$ は恒等写像であり，よって $f$ は恒等写像である。これで $l=1$ の場合の系が示された。$l>1$ の時も同様の議論が適用する。

注意： 小さい$n$に対しては，定理も系も成立しない。例えば $n \leq 5$ ならば $\mathcal{A}_n$ は unirational であり，general type でない subvariety をたくさん持つ。また $n=2$ の時，$K(\Gamma_2)$ は purely transcendental であり，$\mathrm{Aut}_{\mathbb{C}}(K(\Gamma_2))$ は Cremona 群となる。しかし $l$ が十分大きければ系の主張は $n \geq 2$ について成立する。

証明は outline のみを与える。詳しくは Tsuyumine [10] 参照。

1. $H_n = \{Z \in M_n(\mathbb{C}) \mid Z = {}^tZ,\ \mathrm{Im}\, Z > 0\}$ 上に symplectic 群 $Sp_{2n}(\mathbb{R})$ は

$$Z \longmapsto MZ = (AZ+B)(CZ+D)^{-1},\ M = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \in Sp_{2n}(\mathbb{R})$$

により作用している。 $Z = (z_{ij})$ とおき，さらに

$$\omega_{ij} = (-1)^{i+j} e_{ij}\, dz_{11} \wedge dz_{12} \wedge \cdots \wedge \widehat{dz_{ij}} \wedge \cdots \wedge dz_{nn}$$

$(1 \leq i \leq j \leq n)$ とおく，ただし

$$e_{ij} = \begin{cases} 2 & i = j \\ 1 & i \neq j. \end{cases}$$

$n$次の正方行列 $\omega$ を

$$\omega = (\omega_{ij})$$

で定義する。 $\omega$ は

$$M\cdot\omega = |CZ+D|^{-n-1}(CZ+D)\,\omega\,{}^t(CZ+D)$$

なる変換を満たす。

$A$, $B=(b_{ij})$ を各々 $n$, $m$ 次の正方行列とする。tensor 積 $A\otimes B$ を

$$A\otimes B = \begin{pmatrix} Ab_{11} & Ab_{12} & \cdots & Ab_{1m} \\ Ab_{21} & & & \\ \vdots & & & \\ Ab_{m1} & \cdots & \cdots & Ab_{mm} \end{pmatrix} \in M_{mn}$$

で定義する。次は容易である (i) $(A\otimes B)\cdot(A'\otimes B') = AA'\otimes BB'$, ただし $A'$, $B'$ は各々 $A$, $B$ と同じ大きさの行列とする, (ii) ${}^t(A\otimes B) = {}^tA\otimes {}^tB$, (iii) $c(A\otimes B) = (cA)\otimes B = A\otimes(cB)$, (iv) $\mathrm{tr}(A\otimes B) = \mathrm{tr}(A)\times\mathrm{tr}(B)$.

$r$ を正整数とする。$I$, $J$ を $\{1,\ldots,n\}$ から重複を許して $r$ 個の数字を取った順序集合とする。$A=(a_{ij})$ に対して

$$A^{(I,J)} = a_{i_1j_1}a_{i_2j_2}\cdots a_{i_rj_r}$$

とおく, ここで $I=\{i_1,\ldots,i_r\}$, $J=\{j_1,\ldots,j_r\}$。この時 $A^{\otimes r}$ の $(k,l)$-成分は $A^{(I,J)}$ で与えられている, ただし

$$k = 1+\sum_{s=1}^{r}(i_s-1)n^{s-1}, \quad l = 1+\sum_{s=1}^{r}(j_s-1)n^{s-1}$$

$(1\le k,\ l\le n^r)$。$\mathrm{sgn}(I)$ は $\mathrm{sgn}(I) = \prod_{i\in I}(-1)^i$

で定義する。

補題1. $M\cdot\omega^{\otimes r}=|CZ+D|^{-r(n+1)}((CZ+D)^{\otimes r}\,\omega^{\otimes r}\,{}^t((CZ+D)^{\otimes r}$.

我々の最初の目的は $H^n$ 上の正則関数を成分とする $n^r$ 次の正方行列 $\Phi=\Phi(Z)$ で $\Phi(MZ)=|CZ+D|^{r(n+1)}\times({}^t((CZ+D)^{-1})^{\otimes r}\,\Phi(Z)\,((CZ+D)^{-1})^{\otimes r}$, $M=\begin{pmatrix}A&B\\C&D\end{pmatrix}\in\Gamma_n$ なるものを構成することである。この時 $\mathrm{tr}(\Phi\omega^{\otimes r})$ は $\Gamma_n$-不変の $(\Omega^{N-1}_{H_n})^{\otimes r}$, $N=\frac{1}{2}n(n+1)$, の form である。これは, $\mathcal{A}_n^0$ を $\mathcal{A}_n$ の smooth locus とすれば, $(\Omega^{N-1}_{\mathcal{A}_n^0})^{\otimes r}$ の section とみることができる ($n\geq 3$)。Tai の pluri-canonical differentian form の場合の議論と同様に，ある条件の下に $\mathrm{tr}(\Phi\omega^{\otimes r})$ は $\tilde{\mathcal{A}}_n$ に拡張されることが分かる。

$\mathrm{tr}(\Phi\omega^{\otimes r})$ の余次元1の subvariety D への制限は, D 上の pluri-canonical differential form を与える。このようなもので消えないものが "たくさん" あれば D は general type であることが示される。$\Phi$ の構成は theta series を用いてなされる。

$H_n$ 上の正則関数 f で

$$f(MZ)=|CZ+D|^k f(Z),\qquad M=\begin{pmatrix}A&B\\C&D\end{pmatrix}\in\Gamma_n$$

なるものは, Siegel modular form of weight k とよばれ

る（$n=1$ の時は cusp でも正則という条件が必要となる）。
$f$ は Fourier 展開

$$f(Z)=\sum_{S\geq 0} a(S)\,e(\mathrm{tr}(ZS))$$

を持つ，ここで $e(*)=\exp(2\pi\sqrt{-1}\,*)$ であり，$S$ は半正定値の even 対称行列に渡る。

$$\min_{g\in\mathbb{Z}^n,\, g\neq 0}\left\{\tfrac{1}{2}S[g]\right\}<\alpha \implies a(S)=0$$

なる時 $f$ は cusp で order $\alpha$ で消えるといわれる。

2. <u>Theta series</u>　$m$ を $m\geq 2(n-1)$ なる整数とする。$\eta$ を複素 $m\times(n-1)$ 行列で，$\mathrm{rank}\,\eta=n-1$，${}^t\eta\eta=0$ なるものとする。$\eta_i$ を $(n-1)\times n$ 行列で

$$\eta_i=\begin{pmatrix}1 & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & 1\;0 & & \\ & & & 1 & \\ & & & & \ddots \\ & & & & & 1\end{pmatrix}$$

$\underbrace{\phantom{xx}}_{i}$

となるものとする。$F$ を $m$ 次の正定値対称行列，有理係数のものとし，$r$，$I,J$ は前節のものとする。この時 theta series を

$$\Theta_F^{(I,J)}\begin{bmatrix}u\\v\end{bmatrix}(Z)=\mathrm{sgn}(I)\,\mathrm{sgn}(J)\sum_{G}\prod_{i\in I}|\eta_i\,{}^t(G+u)F^{\frac{1}{2}}\eta|$$

$$\times\prod_{j\in J}|\eta_j\,{}^t(G+u)F^{\frac{1}{2}}\eta|\,e(\mathrm{tr}(\tfrac{1}{2}ZF[G+u]+{}^t(G+u)v))$$

で定義する，ここで $G$ は $M_{m,n}(\mathbb{Z})$ を動き，$u, v$ は $m\times n$ の有理係数の行列である。$\binom{u}{v}$ は theta characteristic とよばれる。

さらに行列を $\Theta_{F,r}\left[\begin{smallmatrix}u\\v\end{smallmatrix}\right](Z)$ を、その $(k, l)$-成分が
$$\theta_F^{(I,J)}\begin{bmatrix}u\\v\end{bmatrix}(Z)$$
となるものとして定義する，ここで $k, l$ と $I, J$ は前節に述べた関係にあるものとする。

命題1 $M=\begin{pmatrix}A&B\\C&D\end{pmatrix}\in Sp_{2n}(\mathbb{Q})$ で，$A$, $D$, $F\otimes B$, $F^{-1}\otimes C$ がすべて整係数であるとする。

$$u_M = uA + F^{-1}vC + \frac{1}{2}\,{}^t(F^{-1})_\Delta({}^tAC)_\Delta,$$
$$v_M = FuB + vD + \frac{1}{2}\,{}^t(F_\Delta)({}^tBD)_\Delta,$$
$$E_F\left(\binom{u}{v}, M\right) = e\left(\frac{1}{2}\operatorname{tr}\left(-{}^t(uA+F^{-1}vC)(FuB+vD)+{}^t(F_\Delta)({}^tBD)_\Delta\right)+{}^tuv\right)$$

とおく，ここで正方行列 $P$ に対し，$P_\Delta$ はその対角成分からなる vector とする。この時次の変換公式が成立する；

$$\Theta_{F,r}\begin{bmatrix}u\\v\end{bmatrix}(MZ) = \chi_F(M)\,E_F\left(\binom{u}{v}, M\right)|CZ+D|^{\frac{m}{2}+2r}$$
$$\times\left({}^tC(CZ+D)^{-1}\right)^{\otimes r}\,\Theta_{F,r}\begin{bmatrix}u_M\\v_M\end{bmatrix}(Z)\left((CZ+D)^{-1}\right)^{\otimes r},$$

$\chi_F(M)$ は $F, M$ だけによって決まる $1$ の $8$ 乗根である。

系 $u, v, F$ は上述のものとする。この時整数 $l$ があってすべての $M = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \in \Gamma_n(l)$ に対して，

$$\Phi_{F,r}\begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix}(MZ) = \chi(M)\,|CZ+D|^{\frac{m}{2}+2r}\,({}^t(CZ+D)^{-1})^{\otimes r} \times \Phi_{F,r}\begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix}(Z)\,((CZ+D)^{-1})^{\otimes r}$$

が成立する，ここで $\chi$ は $\Gamma_n(l)$ から 1 の巾根の集合への写像で，何乗かで自明になるものである。

命題の証明のためには，もうひとつの theta series が必要となる。

$$\Theta_F\begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix}(Z, X) = \sum_G e(\mathrm{tr}(\tfrac{1}{2} Z F[G+u] + {}^t(G+u)(X+v)))$$

とおく，ここで $X = (x_{ij})$ は $m \times n$ の variable matrix である。次の補題の証明は Tsuyumine [7] 又は [8] 参照。

補題 2. 命題 1 の仮定の下で

$$\Theta_F\begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix}(MZ, X)$$
$$= \chi_F(M)\,E_F\left(\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}, M\right) e\left(\tfrac{1}{2}\mathrm{tr}(C\,{}^t(CZ+D)\,{}^tX F^{-1} X)\right)|CZ+D|^{\frac{m}{2}} \times \Theta_F\begin{bmatrix} u_M \\ v_M \end{bmatrix}(Z, X(CZ+D)^{-1}).$$

$\partial = \left(\frac{\partial}{\partial x_{ij}}\right)$ を differential operator の $m \times n$ 行列とする。$r, I, J$ を上述の通りとして，

$$L_{IJ\eta} = \frac{\mathrm{sgn}(I)\,\mathrm{sgn}(J)}{(2\pi\sqrt{-1})^{2r(n-1)}} \prod_{i\in I} \det({}^t\eta\,\partial\,{}^t\eta_i) \prod_{j\in J} \det({}^t\eta\,\partial\,{}^t\eta_j)$$

とおく。この時 Andrianov–Maloletkin [1] の Lemma 3 の証明法で次が示せる。

補題3. $P$ を $n$ 次の対称行列, $Q$ を $n\times m$ −行列, $c$ を定数とする。この時

$$L_{IJ\eta}\left(e\left(\mathrm{tr}\left(\tfrac{1}{2}P\,{}^tXX + QX\right) + c\right)\right)$$

$$= \mathrm{sgn}(I)\,\mathrm{sgn}(J) \prod_{i\in I} |\eta_i(P\,{}^tX + Q)\eta| \prod_{j\in J} |\eta_j(P\,{}^tX+Q)\eta|$$

$$\times\, e\left(\mathrm{tr}\left(\tfrac{1}{2}P\,{}^tXX + QX\right) + c\right).$$

<u>命題1の証明</u> $\Theta_F^{(I,J)}\left[\begin{smallmatrix}u\\v\end{smallmatrix}\right](Z) = L_{IJ\eta}\left(\theta_F\left[\begin{smallmatrix}u\\v\end{smallmatrix}\right](Z, F^{\frac{1}{2}}X)\right)\Big|_{X=0}$ である。補題2で $X$ の代わりに $F^{\frac{1}{2}}X$ を代入して, $L_{IJ\eta}$ を $X=0$ で作用させれば, 補題3より

$$\Theta_F^{(I,J)}\left[\begin{smallmatrix}u\\v\end{smallmatrix}\right](MZ) = \chi_F(M)\; E_F\left(\left(\begin{smallmatrix}u\\v\end{smallmatrix}\right); M\right) |CZ+D|^{m/2}\, \mathrm{sgn}(I)\,\mathrm{sgn}(J)$$

$$\times \sum_G \prod_{i\in I} |\eta_i(CZ+D)\,{}^t(G+u_M)F^{\frac{1}{2}}\eta| \prod_{j\in J} |\eta_j(CZ+D)\cdot$$

$$\cdot\,{}^t(G+u_M)F^{\frac{1}{2}}\eta|\; e\left(\mathrm{tr}\left(\tfrac{1}{2}Z\,F[G+u_M] + {}^t(G+u_M)v_M\right)\right)$$

を得る。Laplace 展開 $|\eta_i(CZ+D)\,{}^t(G+u_M)F^{\frac{1}{2}}\eta| = \sum_{s=1}^{n} |\eta_i(CZ+D)\,{}^t\eta_s| \times |\eta_s\,{}^t(G+u_M)F^{\frac{1}{2}}\eta|$ より

$$= \chi_F(M)\, E_F\left(\left(\begin{smallmatrix}u\\v\end{smallmatrix}\right), M\right) |CZ+D|^{\frac{m}{2}} \sum_{S,T} \prod_{\substack{i\in I\\ s\in S}} (-1)^{i+s}$$

$$\times|\eta_i((Z+D)^t\eta_s| \prod_{\substack{j\in J\\ t\in T}} (-1)^{j+t}|\eta_j((Z+D)^t\eta_t| \times \Theta_F^{(S,T)}\begin{bmatrix} u_M\\ v_M\end{bmatrix}(Z),$$

ここで $S, T$ は $\{1,\dots,n\}$ から重複を許して $r$ 個取る順序集合すべてに渡る。$(-1)^{i+s}|\eta_i((Z+D)^t\eta_s|$ は $CZ+D$ の余因子行列 $((Z+D)^*$ の $(s,i)$-余因子であるから，

$$\Theta_F^{(I,J)}\begin{bmatrix} u\\ v\end{bmatrix}(MZ) = \chi_F(M)E_F(\begin{pmatrix} u\\ v\end{pmatrix},M)\,|(Z+D|^{m/2} \sum_{S,T} ({}^t((Z+D)^*)^{(I,S)} \times \Theta_F^{(S,T)}\begin{bmatrix} u_M\\ v_M\end{bmatrix}(Z)\,(((Z+D)^*)^{(T,J)}.$$

よって

$$\begin{aligned}\Phi_{F,r}\begin{bmatrix} u\\ v\end{bmatrix}(MZ) &= \chi_F(M)E_F(\begin{pmatrix} u\\ v\end{pmatrix},M)\,|(Z+D|^{m/2} \\ &\quad\times ({}^t(CZ+D)^*)^{\otimes r}\,\Phi_{F,r}\begin{bmatrix} u_M\\ v_M\end{bmatrix}(Z)\,(((Z+D)^*)^{\otimes r} \\ &= \chi_F(M)E_F(\begin{pmatrix} u\\ v\end{pmatrix},M)\,|(Z+D|^{m/2+2r} \\ &\quad\times ({}^t((Z+D)^{-1})^{\otimes r}\,\Phi_{F,r}\begin{bmatrix} u_M\\ v_M\end{bmatrix}(Z)\,(((Z+D)^{-1})^{\otimes r}.\end{aligned}$$

3. 次の補題は容易である。

補題 4. $P$ を $n$ 次の有理係数対称行列とし，$k \neq 0$ を $k^2P\cdot F[G]$ がすべての $G\in M_{m,n}(\mathbb{Z})$ に対して偶となるような整数とする。この時，

$$\Phi_{F,r}\begin{bmatrix} u\\ v\end{bmatrix}(Z+P) = k^{-2(n-1)r}\sum_{w} \mathbf{e}(-\tfrac{1}{2}k^2PF[w+\tfrac{u}{k}]) \cdot \Phi_{k^2F,r}\begin{bmatrix} w+u/k\\ kv+kF(kw+u)P\end{bmatrix}(Z)$$

$$\|$$

ここで $w$ は $M_{m,n}(\frac{1}{\ell}\mathbb{Z})$ mod $\mathbb{Z}$ の代表すべてに渡る。

$F, u, v$ を固定した後，$\Psi_{F,r}\left[\begin{smallmatrix}u\\v\end{smallmatrix}\right]$ は無限個の $r$ に対して non-trivial となることは，Fourier 係数を見ることによって容易に確かめられる。

補題 5. $\Psi_{F,r}\left[\begin{smallmatrix}u\\v\end{smallmatrix}\right](Z)$ は non-trivial であるとする。$W$ を $n$ 次の対称行列とする，この時

$$W=0 \iff \operatorname{tr}\left(\Psi_{F,r}\left[\begin{smallmatrix}u\\v\end{smallmatrix}\right](Z)W^{\otimes r}\right)=0$$

この補題は、容易な線形代数の議論による。

$\Psi_{F,r}\left[\begin{smallmatrix}u\\v\end{smallmatrix}\right](Z)$, $\Gamma_n(\ell)$ を命題 1 のものとする。整数 $r' > 0$ は，$\chi^{r'}=1$ なるものとする。$\left\{M_j=\begin{pmatrix}A_j & B_j\\ C_j & D_j\end{pmatrix}\right\}$ を $\Gamma_n$ の mod $\Gamma_n(\ell)$ の代表系とする。

$$\Psi(Z)=\sum_j |C_jZ+D_j|^{-(\frac{m}{2}+2r)r'}\, {}^t(C_jZ+D_j)^{\otimes rr'}$$
$$\times\left(\Psi_{F,r}\left[\begin{smallmatrix}u\\v\end{smallmatrix}\right](M_jZ)\right)^{\otimes r'}(C_jZ+D_j)^{\otimes rr'}$$

とおく。この時 $\Psi(Z)$ は

$$(*)\quad \Psi(MZ)=|CZ+D|^{(\frac{m}{2}+2r)r'}\left({}^t((CZ+D)^{-1})\right)^{\otimes rr'}\Psi(Z)\left((CZ+D)^{-1}\right)^{\otimes rr'},$$
$$M=\begin{pmatrix}A & B\\ C & D\end{pmatrix}\in\Gamma_n.$$

を満たす。

命題2. $Z_0$ を $H_n$ の任意の点とし, $W \neq 0$ を $n$ 次対称行列とする。この時無限個の $r, r'$ に対して (*) を満たす $\Phi$ が存在して, さらに

$$\operatorname{tr}(\Phi(Z_0) W^{\otimes rr'}) \neq 0$$

となる。

証明) 補題5より, $F', u, v'$ があって, 無限個の $r$ に対し

$$\operatorname{tr}(\Phi_{F',r}[{}^{u'}_{v'}](Z) W^{\otimes r}) \neq 0$$

となる。$\{Z_0 + P \mid \text{rational symmetric matrix } P \text{ of size } n\}$ の analytic closure は $H_n$ であるから, ある $P$ に対し,

$$\operatorname{tr}(\Phi_{F',r}[{}^{u'}_{v'}](Z_0+P) W^{\otimes r}) \neq 0$$

となる。補題4より $\Phi_{F',r}[{}^{u'}_{v'}](Z+P)$ は $\Phi_{F',r}[{}^{u}_{v}](Z)$ の形をしたものの和で書ける, 即ち $F, ({}^{u}_{v})$ が存在して

$$\operatorname{tr}(\Phi_{F,r}[{}^{u}_{v}](Z_0) W^{\otimes r}) \neq 0.$$

上述のようにして, $\Phi_{F,r}[{}^{u}_{v}]$ から $\Phi(Z)$ を作る, ただし $M_1 = 1_{2n}$ と取ると,

$$\operatorname{tr}(\Phi(Z_0) W^{\otimes rr'})$$
$$= (\operatorname{tr}(\Phi_{F,r}[{}^{u}_{v}](Z_0) W^{\otimes r}))^{r'}$$
$$+ \sum_{j>1} \Big(\operatorname{tr}(|C_j Z_0 + D_j|^{-(\frac{m}{2}+2r)}\, {}^t(C_j Z_0 + D_j)^{\otimes r}\, \Phi_{F,r}[{}^{u}_{v}](M_j Z_0)$$
$$\cdot (C_j Z_0 + D_j)^{\otimes r} W^{\otimes r}\Big)^{r'}.$$

最初の項が零でないので、これは無限個の $r'$ に対して零ではない。 q.e.d.

$$\lambda_{m,r,r'} = t(\Phi(z)\,\omega^{\otimes rr'})$$

とおく。補題1より次を得る。

命題3　$r(n-1) \geq m/2$ とする。この時 $f$ が weight $(r(n-1)-\frac{m}{2})r'$ の modular form とすれば、$f\lambda_{m,r,r'}$ は $\Gamma_n$-不変な $(\Omega^{n-1}_{H_{n-1}})^{\otimes rr'}$ の form である。

4. $\bar{A}_n$ を $A_n$ の toroidal compactification とする。$\bar{A}_n$ は quotient singularities を持つだけである。$\bar{A}_n^0$ で $\bar{A}_n$ の smooth locus を表わすことにする。この時 Tai [6] とまったく同じ手法で次が証明できる。

補題6.　$f$ が cusp で order $rr'$ 以上で消えていれば、$f\lambda_{m,r,r'}$ は $\bar{A}_n^0$ に拡張される。

次は $\bar{A}_n$ の quotient singularities が問題となる。Tai [ ], Theorem 3.3 と同様にして次が証明できる。

補題 7. $D$ を $\mathbb{C}^N$ の開領域とする。$G$ を $D$ に作用する有限群とし，$X = D/G$ とおく。$\tilde{X} \longrightarrow X$ を desingularization とする。$g \in G$ が固定点の tangent space に $e(s_i)$, $i = 1, \ldots, N$, $s_i \in \mathbb{Q}$, $0 \leq s_i < 1$ をかけることにより作用しているものとする。この時，もし各 $g \neq 1$ とその fixed point に対し，

$$\sum_i s_i \geq 1 + \max\{s_i\}$$

が成立していれば，$(\Omega_D^{N-1})^{\otimes r}$ の $G$-invariant form は $\tilde{X}$ に拡張される。

$\mathfrak{A}_n$ の各固定点において

$$n \geqq 7$$

の条件の下では，補題 7 の中の条件が満たされているのは確かめるのは難かしくない。

命題 3 及びこれらのことから次が示された；

命題 4. $n \geq 7$ とする。$\lambda_{m,r,r'}$ を上述のものとし，さらに $f$ を weight $(r(n-1) - \frac{m}{2})r'$ の modular form で cusp で order が少なくとも $rr'$ で消えているものとする。この時 $f\lambda_{m,r,r'}$ は $\tilde{\mathfrak{A}}_n$ に拡張される。

5. $f$ の cusp での vanishing order を $\mathrm{ord}(f)$ で書くことにする。命題4で，我々は

$$\frac{(n-1)\,\mathrm{ord}(f)}{\mathrm{weight}(f)} = \frac{r(n-1)}{r(n-1)-\frac{m}{2}}$$

なる cusp form を必要としている。$r$ は任意に大きく取っていいので，結局

$$\frac{(n-1)\,\mathrm{ord}(f)}{\mathrm{weight}(f)} > 1$$

なる cusp form が必要となる。Freitag [4], [5] は $n \geq 10$ の仮定のもとで，このような cusp forms を構成し，さらに任意の $\mathcal{A}_n$ の余次元 1 の subvariety を与えた時，その上で恒等的には消えないものがあることを示した。

<u>定理の証明</u>：$D$ を $\mathcal{A}_n$ の任意に固定した余次元 1 の subvariety とする。$n \geq 3$ ならば，modular form $h$ があってその divisor が $D$ となる，(Freitag [2], [3] 又は Tsuyumine [9])。ここで

$$\nabla_h = \left(e_{ij}\frac{\partial}{\partial z_{ij}}h\right) \qquad e_{ij} = \begin{cases} 2 & i = j \\ 1 & i \neq j \end{cases}$$

とおく。$\pi : H_n \longrightarrow \mathcal{A}_n$ を自然な射影とし，$\pi^{-1}(D)^{\circ}$ を $\pi^{-1}(D)$ の smooth locus とする。$\{\sum\left(\frac{\partial}{\partial z_{ij}}h\right)dz_{ij}\}|_{\pi^{-1}(D)^{\circ}}$

$=0$ より，$\omega|_{\pi^{-1}(D)^0} = \psi_k\omega'$ となる，ここで $\omega'$ は $\Omega^{N-1}_{\pi^{-1}(D)^0}$ の form で零でないものである。次は命題2より容易に導びかれる。（$\psi_k$ は対称行列）。

補題8　$n \geq 3$ とする。$\mathcal{A}_n$ の任意の余次元1 subvariety D に対し，無限個の $r, r'$ があって $\lambda_{m,r,r'}$ は $\pi^{-1}(D)$ 上で恒等的には消えない。

f を D 上では恒等的に消えない，

$$\frac{(n-1)\ \mathrm{ord}(f)}{\mathrm{weight}(f)} > 1$$

なる cusp form とする。g を任意の modular form とすると，適当な整数 $\alpha, \beta > 0$ があって

$$g^\alpha f^\beta \lambda_{m,r,r'}$$

（$r, r'$ も $\alpha\,\mathrm{weight}(g) + \beta\,\mathrm{weight}(f) = (r(n-1) - \frac{m}{2})r'$ と取る），は $\mathcal{A}_n$ 上に holomorphic に拡張される。これより D は general type であることが示された。

References

1. Andrianov, A. V., Maloletkin, G. N.; Behavior of theta

series of degree N under modular substitutions. Math. USSR. Izvest., 9, 227–241 (1975)

2. Freitag, E.; Stabile Modulformen. Math. Ann., 230, 197–211 (1977)

3. ————; Die Irreduzibilität der Schottky relation (Bemerkungen zu einem Satz von J. Igusa). Archiv der Math., 40, 255–259 (1983)

4. ————; Siegelsche Modulfunktionen, Grundlehren 254, Springer-Verlag, Berlin. Heidelberg, New York, 1983

5. ————; Holomorphic tensors on subvarieties of the Siegel modular variety (Automorphic forms of several variables. Taniguchi symposium, Katata 1983), Birkhäuser, Progress in Math., 46, 93–113 (1984).

6. Tai, Y.; On the Kodaira dimension of the moduli space of abelian varieties, Invent. Math. 68, 425–439 (1982)

7. Tsuyumine, S.: Constructions of modular forms by means of transformation formulas for theta series. Tsukuba J. Math, 3, 59–80 (1979)

8. ————; Theta series of a real algebraic number field, Manuscripta Math. 52, 131–150 (1985)

9. ————; Factorial property of a ring of automorphic forms, Trans. Amer. Math. Soc., to appear.

10. ————; Multi-tensors of differential forms on the Siegel modular variety and on its subvarieties, preprint.

11. Mumford. D.: On the Kodaira dimension of the Siegel modular variety (Algebraic Geometry – Open problem). Lect. Notes in Math. 997, Springer-Verlag, Berlin. Heidelberg, New York, Tokyo 348–375 (1982)