

Title	0(1, q+1) 上の wave form について (Automorphic representation の研究)
Author(s)	高瀬, 幸一
Citation	数理解析研究所講究録 (1986), 583: 59-72
Issue Date	1986-02
URL	<a href="http://hdl.handle.net/2433/99341">http://hdl.handle.net/2433/99341</a>
Right	
Type	Departmental Bulletin Paper
Textversion	publisher



$$P = \left\{ \begin{pmatrix} a & b & c \\ 0 & e & f \\ 0 & 0 & j \end{pmatrix} \in G \right\}$$

は,  $\mathbb{Q}$ 上定義された  $G$  の minimal parabolic subgroup である。  $P$  は, 分

解  $P = N \cdot A \cdot M$

$$N = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & b & c \\ 0 & 1 & f \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in P \right\}, \quad A = \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & j \end{pmatrix} \in P \right\}, \quad M = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & e & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in P \right\}$$

である。  $\mathbb{Q}$ 上の同型  $n: \mathbb{Q}^3 \xrightarrow{\sim} N_{\mathbb{Q}}$  が

$$n(x) = \begin{pmatrix} 1 - {}^t x \cdot S_0 & -\frac{1}{2} {}^t x \cdot S_0 \cdot x \\ 0 & 1 & x \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

により定義される。  $\tilde{G}_0$  は,  $\mathbb{Q}$ 上定義された, 連結 reductive 代数群  
 $\tilde{G}_0$  の  $\mathbb{Q}$ -rational points は,

$$\tilde{G}_{0, \mathbb{Q}} = \left\{ e \in GL(3, \mathbb{Q}) \mid \begin{array}{l} {}^t e \cdot S_0 \cdot e = \nu(e) \cdot S_0 \text{ for } \nu(e) \in \mathbb{Q}^{\times} \\ \det e = \nu(e)^{1/2} \text{ if } 3 \text{ is even} \end{array} \right\}$$

となる。 代数群  $\tilde{G}, G, P, \text{ etc.}$  の  $\mathbb{Q}$ 上の adelicization  $\tilde{G}_A, G_A, P_A, \text{ etc.}$  となる。

2.  $L_0 \subset \mathbb{Q}^3$  は,  $S_0$  に関する maximal integral  $\mathbb{Z}$ -lattice (i.e.  $\frac{1}{2} {}^t x \cdot S_0 \cdot x \in \mathbb{Z}$  for  $\forall x \in L_0$  となる 最大の  $\mathbb{Z}$ -lattice) となる。

$$L = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{Q}^{3+2} \mid x, z \in \mathbb{Z}, y \in L_0 \right\}$$

は,  $S$  に関する maximal integral  $\mathbb{Z}$ -lattice である。  $\mathbb{Q}$  の finite place  $p$  には

対応して,

$$\tilde{K}_p = \left\{ g \in \tilde{G}_p \mid g(L_p) = L_p \right\} \quad (L_p = L \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}_p)$$

とおく,  $\tilde{K}_f = \prod_{p < \infty} \tilde{K}_p$  は,  $\tilde{G}_A$  の finite part  $\tilde{G}_f$  の open compact subgroup  
となる.  $\tilde{G}_\infty$  の maximal compact subgroup  $\tilde{K}_\infty$

$$\tilde{K}_\infty = \left\{ g \in \tilde{G}_\infty \mid {}^t g \begin{pmatrix} 1 & & \\ & S_0 & \\ & & 1 \end{pmatrix} \cdot g = \begin{pmatrix} 1 & & \\ & S_0 & \\ & & 1 \end{pmatrix} \right\}$$

とすると,  $\tilde{K} = \tilde{K}_\infty \times \tilde{K}_f$  は  $\tilde{G}_A$  の compact subgroup である.  $K = \tilde{K} \cap G_A$  とおく.

$\mathbb{Q}$  の finite place  $p$  に対して,

$$\tilde{U}_p = \left\{ e \in \tilde{G}_{0,p} \mid e(L_{0,p}) = L_{0,p} \right\} \quad (L_{0,p} = L_0 \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}_p)$$

とおく,  $\tilde{U}_f = \prod_{p < \infty} \tilde{U}_p$  は  $\tilde{G}_{0,A}$  の finite part  $\tilde{G}_{0,f}$  の open compact sub-  
group となる.

## §2. wave forms.

3. 実 Lie 群  $G_\infty$  の Lie 環  $\mathfrak{g}$  とし,  $D = 2 \cdot (\mathfrak{g}-1) \times$  Casimir element for  
 $\mathfrak{g} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$  とおく,  $D$  は  $G_\infty$  上の両側不変微分作用素である.  $D$  の  
作用は次の様に表わされる;  $G_\infty$  上の右  $\tilde{K}_\infty$ -不変  $C^\infty$ -関数  $\varphi$  に対  
して,

$$F(x, y) = \varphi \left( n(x) \cdot \begin{pmatrix} y & & \\ & 1 & \\ & & y^{-1} \end{pmatrix} \right) \quad \text{for } x \in \mathbb{R}^k, 0 < y \in \mathbb{R}$$

とおく,

$$D \cdot F = \left\{ y^2 \frac{\partial^2}{\partial y^2} - (\mathfrak{g}-1) y \frac{\partial}{\partial y} + 2y^2 \left( \frac{\partial}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_k} \right) \cdot S_0^{-1} \cdot \left( \frac{\partial}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_k} \right) \right\} F$$

となる ( $\mathfrak{g} = n(x) \cdot \begin{pmatrix} y & & \\ & 1 & \\ & & y^{-1} \end{pmatrix} \cdot k \in G_\infty$  ( $k \in \tilde{K}_\infty$ ) は  $G_\infty$  の右分解を与える).

$\mathbb{R}^k$  の連続 unitary character  $\omega_\infty$ ,  $p \in \mathbb{C}$ , 及び  $u \in \mathbb{R}^k$  に対して, 実解析

的関数  $W: \tilde{G}_\infty \rightarrow \mathbb{C}$  で, 条件

$$1) W(z \cdot n(x) \cdot j \cdot k) = w_\infty(z) \cdot \Lambda_\infty({}^t u \cdot S_0 \cdot x) \cdot W(j) \quad \text{for } \forall z \in \mathbb{R}^x, \forall x \in \mathbb{R}^{\frac{x}{2}}, \forall k \in \tilde{K}_\infty$$

(但し,  $\Lambda_\infty(r) = \exp(-2\pi F \cdot r)$  for  $r \in \mathbb{R}$ )

$$2) D \cdot W = \left\{ p^2 - \left(\frac{x}{2}\right)^2 \right\} \cdot W$$

$$3) \left| W \begin{pmatrix} y & & \\ & 1 & \\ & & y^{-1} \end{pmatrix} \right| \leq C \cdot \text{Max} \{ y^r, y^{-r} \} \quad \text{for } \forall y \in \mathbb{R}, y > 0 \quad (\text{但し, } C > 0, r \geq 0 \text{ は } y \text{ に よる 定数})$$

を満す  $W$  の成す  $\mathbb{C}$ -vector space を  $W(w_\infty, p, u)$  とすると, 次の lemma が成り立つ。

Lemma 1. 1)  $u \neq 0$  のとき,  $\dim_{\mathbb{C}} W(w_\infty, p, u) = 1$  である

$$W_{p,u} \begin{pmatrix} y & & \\ & 1 & \\ & & y^{-1} \end{pmatrix} = K_p \left( 4\pi \cdot \left(\frac{1}{2} \cdot {}^t u \cdot S_0 \cdot u\right)^{\frac{1}{2}} \cdot |y| \right) \cdot \left| 4\pi \left(\frac{1}{2} \cdot {}^t u \cdot S_0 \cdot u\right)^{\frac{1}{2}} \cdot y \right|^{\frac{x}{2}} \quad (y \in \mathbb{R}^x)$$

なる  $\mathbb{C}$ -base  $W_{p,u} \in W(w_\infty, p, u)$  である。  $z = z''$

$$K_p(x) = \int_0^\infty \cosh(pt) \cdot \exp(-x \cdot \cosh t) dt \quad (x > 0)$$

は modified Bessel 関数である。

2)  $u = 0$  のとき,  $\dim_{\mathbb{C}} W(w_\infty, p, u) = 2$  である

$$W_p^{(1)} \begin{pmatrix} y & & \\ & 1 & \\ & & y^{-1} \end{pmatrix} = |y|^{\frac{x}{2} + p}, \quad W_p^{(2)} \begin{pmatrix} y & & \\ & 1 & \\ & & y^{-1} \end{pmatrix} = \begin{cases} |y|^{\frac{x}{2} - p} & : \text{if } p \neq 0 \\ |y|^{\frac{x}{2}} \cdot \log |y| & : \text{if } p = 0 \end{cases}$$

なる  $\mathbb{C}$ -base  $\{ W_p^{(1)}, W_p^{(2)} \} \subset W(w_\infty, p, u)$  である。

4. idele class group  $\mathbb{Q}_A^*/\mathbb{Q}^*$  の連続 unitary character  $\omega$ , &  $\forall \rho \in \mathbb{C}$  に対し,

$\Phi$  が  $\tilde{G}_A$  上の wave form of type  $(\omega, \rho)$  であるとは,

1)  $\Phi$  は  $\tilde{G}_A$  上の複素数値連続関数であり,  $\tilde{G}_A$  の infinite part に関して

それは, 実解析的である,

2)  $\Phi(x \cdot y \cdot z \cdot k) = \omega(x) \cdot \Phi(y)$  for  $\forall x \in \mathbb{Q}_A^*, \forall y \in \tilde{G}_\mathbb{Q}, \forall k \in \tilde{K}$ ,

3)  $D \cdot \Phi = \{ \rho^2 - (\frac{p}{2})^2 \} \cdot \Phi$ ,

4) slowly increasing,

を満すことである。  $\tilde{G}_A$  上の wave form of type  $(\omega, \rho)$  の成す  $\mathbb{C}$ -vector

space を  $A(\omega, \rho)$  とする。  $\dim_{\mathbb{C}} A(\omega, \rho) < \infty$  である。

$\forall \Phi \in A(\omega, \rho)$  は Fourier 展開

$$\bar{\Phi}(n(x), y) = \sum_{u \in \mathbb{Q}^*} \Phi_u(y) \cdot \Lambda(n \cdot u \cdot S, x)$$

である。 ここで,  $\Lambda$  は  $\mathbb{Q}_A/\mathbb{Q}$  の連続 unitary character として  $\Lambda_\infty(x) =$

$= \exp(-2\pi i x)$  なるものとする。  $\tilde{G}_A$  の infinite part 上の関数として

$\Phi_u$  は  $W(\omega_\infty, \rho, u)$  の元であって ( $\omega_\infty$  は  $\omega$  の infinite part), Lemma 1

より,

$$\Phi_u(y) = c_u(\Phi, y_f) \cdot W_{\rho, u}(y_\infty) \quad (u \neq 0)$$

とおく。 又,  $e \in \tilde{G}_{0, A}$ ,  $y \in \mathbb{Q}_A^*$  に対して,

$$\Phi_0 \left( \begin{pmatrix} v(e) \cdot y & & & \\ & e & & \\ & & y^{-1} & \\ & & & 1 \end{pmatrix} \right) = a(\Phi, e) \cdot W_\rho^{(1)} \left( \begin{pmatrix} |y|_A & & & \\ & 1 & & \\ & & |y|_A^{-1} & \\ & & & 1 \end{pmatrix} \right) + b(\Phi, e) \cdot W_\rho^{(2)} \left( \begin{pmatrix} |y|_A & & & \\ & 1 & & \\ & & |y|_A^{-1} & \\ & & & 1 \end{pmatrix} \right)$$

とおく ( $|y|_A$  は, idele  $y$  の絶対値)。

$S(w, \rho) = \{ \Phi \in A(w, \rho) \mid \Phi_0(g) = 0 \text{ for } \forall g \in \tilde{G}_A \}$  は, cuspidal wave forms の成る  $\mathbb{C}$ -vector space である。

$A(w, \rho) \neq 0$  となるのは,  $w = 1 \cdot |A|^\sigma$  ( $\sigma \in \sqrt{4} \cdot \mathbb{R}$ ) の場合に限りこれに注意する。

wave form の Fourier 係数に關して, 次の lemma が成り立つ。

Lemma 2 wave form  $\Phi \in A(w, \rho)$  と,  $e \in \tilde{G}_{0, f}$ ,  $a \in \mathbb{Q}_f^*$ ,  $0 \neq u \in \mathbb{Q}^2$  に對して,

$$C_u(\Phi, \begin{pmatrix} \nu(e) \cdot a & \\ & e \\ & & a^{-1} \end{pmatrix}) \neq 0$$

となるのは,  $u \in \mathbb{Q}^2 \cap (a \cdot \nu(e))^{-1} \cdot e \cdot \prod_{p < \infty} \hat{L}_{0, p}$  の場合に限り。ここで

$$\hat{L}_{0, p} = \{ y \in \mathbb{Q}_p^2 \mid {}^t y \cdot S_0 \cdot x \in \mathbb{Z}_p \text{ for } \forall x \in L_{0, p} \} \quad (p < \infty)$$

は,  $S_0$  に關して  $L_{0, p}$  の dual lattice である。

### §3. Mellin 変換.

5.  $w = 1 \cdot |A|^\sigma$  ( $\sigma \in \sqrt{4} \cdot \mathbb{R}$ ), と  $\rho \in \mathbb{C}$  を取る。wave form  $\Phi \in A(w, \rho)$  と連続関数  $\psi: \tilde{G}_{0, \mathbb{Q}} \setminus \tilde{G}_{0, f} / \tilde{U}_f \rightarrow \mathbb{C}$  に對して,

$$\begin{aligned} Z(s; \Phi, \psi) &= 2^{\frac{s}{2}-1} \cdot (2\pi)^{-s} \cdot \Gamma\left(\frac{1}{2}\left(s + \frac{s}{2} + \rho\right)\right) \cdot \Gamma\left(\frac{1}{2}\left(s + \frac{s}{2} - \rho\right)\right) \times \\ &\times \sum_{0 \neq u \in \mathbb{Q}^2} \sum_e C_u(\Phi, \begin{pmatrix} \nu(e) & \\ & e \\ & & 1 \end{pmatrix}) \cdot \psi(e) \cdot |\nu(e)|_f^{\frac{1}{2}(s-\sigma)} \cdot \left(\frac{1}{2} {}^t u \cdot S_0 \cdot u\right)^{-\frac{s}{2}} \end{aligned}$$

とおく。ここで、 $\sum_e$  は  $\tilde{G}_{0,0} \setminus \tilde{G}_{0,f} / \tilde{U}_f$  の完全代表系上の和 ( $\tilde{G}_{0,0} \setminus \tilde{G}_{0,f} / \tilde{U}_f$  は有限集合), 又  $1 \cdot 1_f$  は  $1 \cdot 1_A$  の finite part である。Lemma 2 により,  $Z(s; \underline{\alpha}, \varphi)$  は Dirichlet series となり,  $\underline{\alpha}$  の増大条件より,  $Z(s; \underline{\alpha}, \varphi)$  は,  $\text{Re } s \gg 0$  で絶対収束する。一方  $\check{\alpha}(g) = \underline{\alpha}(g) \cdot w(v(g))^{-1}$  とおくと,  $\check{\alpha} \in A(w^{-1}, \rho)$  である。このとき, 次の定理が成り立つ。

Theorem 1 Dirichlet series  $Z(s; \underline{\alpha}, \varphi)$  は全  $s$ -平面に有理的に解析接続され, 関数等式  $Z(s; \underline{\alpha}, \varphi) = Z(-s; \check{\alpha}, \check{\varphi})$  を満たす。ここで  $\check{\varphi}(e) = \varphi(v(e)^{-1} \cdot e)$  とおく。更に,

$$Z(s; \underline{\alpha}, \varphi) + a(\underline{\alpha}, \rho) \cdot (s + \frac{\rho}{2} + \rho)^{-1} + b(\underline{\alpha}, \rho) \times \begin{cases} (s + \frac{\rho}{2} - \rho)^{-1} & : \text{if } \rho \neq 0 \\ -(s + \frac{\rho}{2})^{-2} & : \text{if } \rho = 0 \end{cases} \\ - a(\check{\alpha}, \check{\rho}) \cdot (s - \frac{\check{\rho}}{2} - \rho)^{-1} - b(\check{\alpha}, \check{\rho}) \times \begin{cases} (s - \frac{\check{\rho}}{2} + \rho)^{-1} & : \text{if } \rho \neq 0 \\ (s - \frac{\check{\rho}}{2})^{-2} & : \text{if } \rho = 0 \end{cases}$$

は,  $s$  の entire function である。ここで

$$a(\underline{\alpha}, \rho) = \sum_e a(\underline{\alpha}, e) \cdot \varphi(e), \quad b(\underline{\alpha}, \rho) = \sum_e b(\underline{\alpha}, e) \cdot \varphi(e)$$

とおく ( $\sum_e$  は,  $\tilde{G}_{0,0} \setminus \tilde{G}_{0,f} / \tilde{U}_f$  の完全代表系上の和)。

Remark  $\varphi \in L^2$ ,  $\tilde{G}_{0,f}$  における  $\tilde{G}_{0,0} \tilde{U}_f$  の characteristic function を取

ると, Theorem 1 は, Dirichlet series

$$\sum_{0 \neq u \in \mathbb{Q}^s} \zeta_u(\underline{\alpha}, 1) \cdot (\frac{1}{2} \cdot \tau_u \cdot S_0 \cdot u)^{-\frac{s}{2}} \quad (\text{Re } s \gg 0)$$



の解析接続, 関数等式, 及び, possible poles を与える. 上の Dirichlet series は Maass [2] により考察された.

§4. Rankin-Selberg method.

6. この § を通して,  $S_0 = \left( \begin{array}{c|c} S'_0 & 0 \\ \hline 0 & S''_0 \end{array} \right)_{g-m}^m$  ( $0 < m < g$ ) と仮定し, 更に  $\mathbb{Z}$ -lattice  $L'_0 \subset \mathbb{Q}^m$ ,  $L''_0 \subset \mathbb{Q}^{g-m}$  があつて,

$$L_0 = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{Q}^g \mid x \in L'_0, y \in L''_0 \right\}$$

となる (i.e.  $L_0$  は orthogonal splitting  $L_0 = L'_0 \oplus L''_0$  をもつ) と仮定する.

$S' = \begin{pmatrix} & & & 1 \\ & & S'_0 & \\ & & & \\ S'_0 & & & \end{pmatrix}$  により, §1 と同様, 代数群  $G', P', N', A', M'$  を定義する.

$G'$  は, 写像

$$\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ h & i & j \end{pmatrix} \begin{matrix} \} 1 \\ \} m \\ \} 1 \end{matrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} a & b & 0 & c \\ d & e & 0 & f \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ h & i & 0 & j \end{pmatrix} \begin{matrix} \} 1 \\ \} m \\ \} g-m \\ \} 1 \end{matrix}$$

により,  $G$  の部分代数群と同一視する.

$$L' = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{Q}^{m+2} \mid x, z \in \mathbb{Z}, y \in L'_0 \right\}$$

として,  $L'$  により, §1 と同様,  $G'_A$  の compact subgroup  $K'$  を定義する. 上の同一視により  $K' \subset K$  となる.

7.  $L'$  が  $S'$  により maximal integral  $\mathbb{Z}$ -lattice であることから,

$G'_A = P'_A \cdot K'$  となるから,  $s \in \mathbb{C}$  と  $g = \begin{pmatrix} a & b & c \\ 0 & e & f \\ 0 & 0 & j \end{pmatrix} \cdot k \in G'_A$  ( $k \in K'$ ) により,

$$\theta(g, s) = |a|_A^s$$

とおく.  $M'_Q \cdot A'_A \cdot N'_A \backslash G'_A / K'$  上の複素数値連続関数  $\psi$  を取る

( $M'_Q \cdot A'_A \cdot N'_A \backslash G'_A / K'$  上の連続関数は,  $\psi \longmapsto \psi|_{M'_A}$  により),  $M'_Q \backslash M'_A / (M'_A \cap K')$

上の連続関数  $\psi$  に対して  $\psi$  に対応する  $G'$  の parabolic subgroup  $P'$  と  $\psi$  に附随する Eisenstein series は,

$$E(\psi; s, g) = \sum_{\gamma \in P'_0 \backslash G'_0} \psi(\gamma g) \cdot \theta(\gamma g, s + \frac{m}{2}) \quad (s \in \mathbb{C}, g \in G'_A)$$

により定義される。  $E(\psi; s, g)$  は  $\text{Re } s > \frac{m}{2}$  で絶対収束し、全  $s$ -平面に解析接続して、 $s$  に関して関数方程式を満す (c.f. Arthur [1])。

特に  $m=1$  のときは、  $M' = \{\pm 1\}$  で、  $E(1; s, g)$  の関数方程式は、

$$E(1; s, g) = \text{vol}(P'_0) \cdot \sqrt{2/S'_0} \cdot \frac{Z(2s)}{Z(2s+1)} \cdot E(1; -s, g)$$

となる。ここで  $Z(s) = \pi^{-\frac{s}{2}} \cdot \Gamma(\frac{s}{2}) \cdot \zeta(s)$  である。

8. 連続関数  $\psi: M'_0 A'_A N'_A \backslash G'_A / K' \rightarrow \mathbb{C}$  と wave form  $\psi \in A(w, P)$ ,

及  $w \neq 0 \neq u \in \mathbb{Q}^{\delta-m}$  に対して、

$$C_{u, \psi}(\psi) = \sum_h C_{\binom{0}{u}}(\psi, h) \cdot \psi(h)$$

とおく。ここで、  $\sum_h$  は  $M'_0 \backslash M'_j / (M'_j \cap K')$  の完全代表系上の和である

( $M'_j$  は  $M'_A$  の finite part, 又  $M'_0 \backslash M'_j / (M'_j \cap K')$  は有限集合である)。

このとき、次の定理が成り立つ。

Theorem 2. 連続関数  $\psi: M'_0 A'_A N'_A \backslash G'_A / K' \rightarrow \mathbb{C}$  と cuspidal wave form

$\psi \in S(w, P)$  に対して、次の Rankin-Selberg type の等式を得る;

$$\int_{G'_A \backslash G'_A} \Phi(g) \cdot E(\varphi; s - \frac{m}{2}, g) dg \quad (\operatorname{Re} s \gg 0)$$

$$= 2^{\frac{g}{2}-1} \cdot (2\pi)^{-s} \cdot \Gamma(\frac{1}{2}(s + \frac{g}{2} + p)) \cdot \Gamma(\frac{1}{2}(s + \frac{g}{2} - p)) \times \sum_{0 \neq u \in \mathbb{Q}^{g-m}} c_{u, \varphi}(\Phi) \cdot (\frac{1}{2} \cdot u \cdot S_0 \cdot u)^{-\frac{s}{2}}.$$

特に, Dirichlet series  $\sum_{0 \neq u \in \mathbb{Q}^{g-m}} c_{u, \varphi}(\Phi) \cdot (\frac{1}{2} \cdot u \cdot S_0 \cdot u)^{-\frac{s}{2}}$  は全  $s$ -平面に有理形に解析接続される。

連続関数  $\varphi: M_{\mathbb{Q}} \cdot A'_A \cdot N'_A \backslash G'_A / K' \rightarrow \mathbb{C}$  とし,  $\varphi|_{M'_j}$  が  $M'_j \cdot (M'_j \cap K')$  の characteristic function とするものを取れば, Theorem 2 から, 次の corollary を得る。

Corollary 1. 任意の cuspidal newform  $\Phi \in S(w, p)$  に対し, Dirichlet series  $\sum_{0 \neq u \in \mathbb{Q}^{g-m}} c_{(u)}^{(0)}(\Phi, 1) \cdot (\frac{1}{2} \cdot u \cdot S_0 \cdot u)^{-\frac{s}{2}}$  ( $\operatorname{Re} s \gg 0$ ) は, 全  $s$ -平面に, 有理形に解析接続される。

$m=1$  のときは,  $E(1; s, g)$  の関数等式と Theorem 2 から, 次の corollary を得る。

Corollary 2.  $m=1$  とする。cuspidal newform  $\Phi \in S(w, p)$  に対し,

$$\tilde{Z}(s, \Phi) = 2^{-s} \cdot \pi^{-2s} \cdot \Gamma(\frac{1}{2}(s + \frac{g}{2} + p)) \cdot \Gamma(\frac{1}{2}(s + \frac{g}{2} - p)) \times$$

$$\times \zeta(2s) \cdot \sum_{0 \neq u \in \mathbb{Q}^{g-1}} c_{(u)}^{(0)}(\Phi, 1) \cdot (\frac{1}{2} \cdot u \cdot S_0 \cdot u)^{-\frac{s}{2}} \quad (\operatorname{Re} s \gg 0)$$

は, 全  $s$ -平面 に有理形 に解析接続され, 関数等式

$$\zeta(1-s, \mathfrak{K}) = \text{vol}(\mathbb{R}X_0) \cdot \sqrt{S_0'/2} \cdot \zeta(s, \mathfrak{K})$$

が成り立つ。

§5.  $g=2$  の場合.

9. 虚 2 次体  $F = \mathbb{Q}(\sqrt{m})$  ( $m \in \mathbb{Z}$ : square-free) を取り, その整数環  $\mathcal{O}_F$  とする.  $F/\mathbb{Q}$  の norm を  $N_{F/\mathbb{Q}}$  と書くと,  $(F, N_{F/\mathbb{Q}})$  は, quadratic space over  $\mathbb{Q}$  で正定値であり,  $\mathcal{O}_F$  は  $N_{F/\mathbb{Q}}$  に関して, maximal integral  $\mathbb{Z}$ -lattice となる.  $F$  の  $\mathbb{Q}$ -base  $\{1, \sqrt{m}\}$  に対し, 2 次形式  $N_{F/\mathbb{Q}}$  は行列表現  $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2m \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$ .  $\{1, \sqrt{m}\}$  により  $F = \mathbb{Q}^2$  とし,  $S_0 = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2m \end{pmatrix}$ ,  $L_0 = \mathcal{O}_F \hookrightarrow \mathbb{Q}^2$  とおく.  $V = \{X \in \text{Mat}(2, F) \mid \text{tr} X = \bar{X}\}$  とおくと,  $(V, -\det)$  は quadratic space over  $\mathbb{Q}$  で, 符号数は  $(1, 3)$  である.

$V$  の  $\mathbb{Q}$ -base

$$\{e_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, e_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, e_3 = \begin{pmatrix} 0 & \sqrt{m} \\ -\sqrt{m} & 0 \end{pmatrix}, e_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\}$$

に関して, 2 次形式  $-\det$  は行列表現  $S = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & S_0 & & \\ & & 1 & \\ & & & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4$ .

$\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$  により  $V = \mathbb{Q}^4$  とすると,  $L = V \cap \text{Mat}(2, \mathcal{O}_F)$  は,

$$L = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{Q}^4 \mid x, z \in \mathbb{Z}, y \in L_0 \right\}$$

となる.  $(V, -\det)$  の similitude の  $\mathbb{Q}$  上直交群

$$GO_{\mathbb{Q}}(V, -\det) = \left\{ \varphi \in GL_{\mathbb{Q}}(V) \mid \det \circ \varphi = \nu(\varphi) \cdot \det \text{ for } \nu(\varphi) \in \mathbb{Q}^{\times} \right\}$$

$\varepsilon \{e_1, e_2, e_3, e_4\}$  に関する行列表現すると,  $GO_{\mathbb{Q}}(V, -det) = \tilde{G}_{\mathbb{Q}}$  となる.

$\mathcal{G}$  を  $\mathbb{Q}$  上定義された代数群で,  $\mathbb{Q}$ -rational points は,  $\mathcal{G}_{\mathbb{Q}} = GL(2, F)$

なるものとする.  $\pi: \mathcal{G} \rightarrow \tilde{G}$  を  $\mathbb{Q}$  上定義された準同型写像で,

$$\pi_{\mathbb{Q}}(g) \cdot X = g \cdot X \cdot c\bar{g} \quad \text{for } g \in \mathcal{G}_{\mathbb{Q}}, X \in V$$

なるものとする.  $\pi$  は, adelicization  $\pi_A: \mathcal{G}_A \rightarrow \tilde{G}_A$  に延長される.

$$F^* \ni x + y\sqrt{m} \xrightarrow{\sim} \begin{pmatrix} x & my \\ y & x \end{pmatrix} \in \tilde{G}_{0, \mathbb{Q}} \quad (x, y \in \mathbb{Q})$$

なる  $\mathbb{Q}$  上の同型に注意する.

10. wave form  $\tilde{\Phi} \in A(w, \rho)$  に対して,  $\tilde{\Phi} = \tilde{\Phi}_0 \cdot \pi_A$  は, automorphic form on  $GL(2)$  over  $F$  となり (c.f. Weil [4]), Fourier 展開

$$\tilde{\Phi} \begin{pmatrix} y & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \tilde{\Phi}_0 \begin{pmatrix} y & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \sum_{t \in F^*} c(\tilde{\Phi}, t \cdot \text{dir } y) \cdot W \begin{pmatrix} t \cdot y_{\infty} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (y \in F_A^*)$$

である. ここで  $\text{dir } y$  は  $y \in F_A^*$  に対応する  $F$  の ideal,  $y_{\infty}$  は  $y \in F_A^*$  の infinite part, 又  $W$  は  $GL(2, \mathbb{C})$  上の複素数値実解析的関数で

$$W \begin{pmatrix} \sqrt{y} & 0 \\ 0 & 1/\sqrt{y} \end{pmatrix} = K_{\rho}(4\pi \cdot y) \cdot (4\pi \cdot y) \quad (0 < y \in \mathbb{R})$$

なるものである ( $K_{\rho}$  は modified Bessel 関数). 更に

$$c(\tilde{\Phi}, \text{dir } y) = c \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} (\tilde{\Phi}, \pi_p \begin{pmatrix} y_f & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}) \quad (y \in F_A^*)$$

となる. ここで,  $y_f$  (resp.  $\pi_p$ ) は  $y \in F_A^*$  (resp.  $\pi_A$ ) の finite part

である. このとき,

$$\int_{F_A^*/F^*} (\tilde{\chi} - \tilde{\chi}_0) \begin{pmatrix} y & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot |y|_A^s d^*y$$

$$= (2\pi)^{1-2s-\sigma} \cdot \Gamma(s + \frac{\sigma}{2} + \frac{1+p}{2}) \cdot \Gamma(s + \frac{\sigma}{2} + \frac{1-p}{2}) \times \sum_{\mathfrak{a} \subset F} c(\tilde{\chi}, \mathfrak{a}) \cdot N(\mathfrak{a})^{-s}$$

( $N(\mathfrak{a})$  は,  $F$  の ideal  $\mathfrak{a}$  の 絶対 norm) は,  $\tilde{\chi}$  に 附随し  $F$  上 standard L-function である。一方

$$\int_{F_A^*/F^*} (\tilde{\chi} - \tilde{\chi}_0) \begin{pmatrix} y & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot |y|_A^s d^*y = \int_{F_A^*} \tilde{\chi} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} (\pi_A \begin{pmatrix} y & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}) \cdot |y|_A^s d^*y$$

$$= \frac{2\pi}{|U_F|} \cdot Z(2s+\sigma; \tilde{\chi}, 1) \quad (U_F: F \text{ の 単数群})$$

である。よって,  $Z(2s+\sigma; \tilde{\chi}, 1)$  は  $\tilde{\chi}$  の standard L-function に 対応する。

11.  $m \equiv 2, 3 \pmod{4}$  とする。  $L_0 = \mathbb{Z} \oplus \sqrt{m}\mathbb{Z}$  なる orthogonal splitting を 生ずるので,  $L'_0 = \sqrt{m}\mathbb{Z}$ ,  $L''_0 = \mathbb{Z}$  とし, §4 の 議論を適用する。

$$\sum_{0 < u \in \mathbb{Q}} c_{\begin{pmatrix} u \\ 0 \end{pmatrix}}(\tilde{\chi}, 1) \cdot u^{-s} = \sum_{0 < t \in \mathbb{Q}} c(\tilde{\chi}, (t)) \cdot t^{-s}$$

となるが ( $(t) = t \cdot \mathcal{O}_F$  は,  $F$  の principal ideal),

$$\int_{\mathbb{Q}_A^*} \tilde{\chi} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y & & \\ & 1 & \\ & & y^{-1} \end{pmatrix} \cdot |y|_A^s d^*y$$

$$= (2\pi)^{-s} \cdot \Gamma(\frac{1}{2}(s+1+p)) \cdot \Gamma(\frac{1}{2}(s+1-p)) \times \sum_{0 < u \in \mathbb{Q}} c_{\begin{pmatrix} u \\ 0 \end{pmatrix}}(\tilde{\chi}, 1) \cdot u^{-s}$$

であるから、 $\Phi$  が  $\mathbb{Z}$  の Hecke operator の eigen function であるならば、Dirichlet series  $\sum_{0 < u \in \mathbb{Q}} c_{\left(\frac{u}{0}\right)}(\Phi, \tau) \cdot u^{-s}$  は Euler 積をもち (c.f. Sugano [3, §3]), これは、Langlands の意味で、 $\Phi$  に附随する standard L-function となる。よって、

$$\sum_{0 < t \in \mathbb{Q}} c(\tilde{\Phi}, (t)) \cdot t^{-s}$$

は、 $\Phi$  の standard L-function に対応する。

#### References.

- [1] Arthur, J.: Eisenstein series and the trace formula.  
Proc. Sympos. Pure Math. vol 33. Part I, Amer. Math. Soc.  
Providence R.I. (1979) 253-274.
- [2] Maass, H.: Automorphe Funktionen von mehreren Veränderlichen  
und Dirichletsche Reihen.  
Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg 16 (1949) 72-100.
- [3] Sugano, T.: On Dirichlet series attached to holomorphic cusp  
forms on  $SO(2, q)$ . (to appear)
- [4] Weil, A.: Dirichlet series and automorphic forms.  
Lecture Notes in Math. 189. (1971) Springer-Verlag.