

Proper Forcing Axiom 入門

青田大教養 玉野 研一 (Ken-ichi Tamano)

§1. Introduction

ある問題を解こうとする。もし、それが ZFC
(= Zermelo Fraenkel 集合論に選択公理を加えたもの
= 私達が通常用いている数学的手法) の範囲で解けるか
もたのき配がしてある。一つの解決方法は、自分に能力が
あつたらぬのだと、あきらめることである。(しかし、まだ
救いの道は残されている。その一番初歩的なものとして、Z
FC の範囲で正しいかどうかは決定できないが、成立して
おもしろいと思ふ公理群を適用してみる方法がある。
連続体仮説 (CH) と Martin の公理 (MA) が代表的で
ある。ここでは、MA により、正確には $MA(\omega_1)$ と呼ばれ
るものをとする。(なお、 $\neg MA$ のもとでは CH は成立して
いないことに注意しておく。

さて、いさ反りに、CH を適用してみたいよう。

失敗したとしても、まだあきらめる必要はない。むしろ強力な公理。例之は \diamond とか $V = L$ があからずである。ところが MA に対しては、今までそれより強い公理が考えられてこなかった。最近、Shelah と Baumgartner による、 τ 閉鎖性を持つ proper forcing axiom (PFA) は、その穴をいめるものがある。彼らの努力により、PFA は、general topology の問題に対して、かなり強力な武器となることがわかってきた。

本稿の目的は、proper forcing axiom と、その general topology への応用の概説である。内容は、Baumgartner [3] と Mill [6] の話題を中心とする。

本稿を読む。実際に PFA を使ったものと思わなければならない。まず、Kunen [4] の forcing の基本を学ぶ。それから、Baumgartner [3] を読むとよい。Forcing へと進んで学ぶかと思わなければならない。Baumgartner [2] や、Shelah [7] とお薦めがある。Topology への応用については、Handbook of Set-Theoretic Topology [5] に数多くの survey がある。集合論の勉強には、抽象的なものを、直観的、具体的に読むこともよいと思う。かなりの努力と根気が必要であるが、その楽しみを乗り越えれば、そこに広大な世界が開けているのをそのあとにすることができるといえる。

§ 2. Partially ordered set.

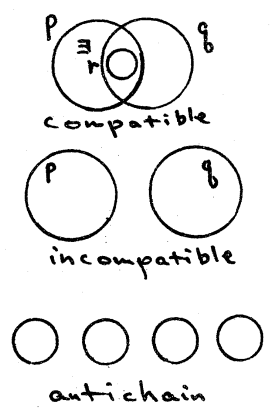
Partially ordered set に馴染む 3 用語を 3 と 2 と 1 と
 する。

$P = (P, \leq)$ は partially ordered set (p.o.)

である。 $p, q \in P$ に対して $p \leq q$ である。 p は q の
extension である。 図では \textcircled{p} と表す。 また q は p の

$p, q \in P$ 集合である。 包含関係 $p \leq q$ の図は p が q の中に
 入る。

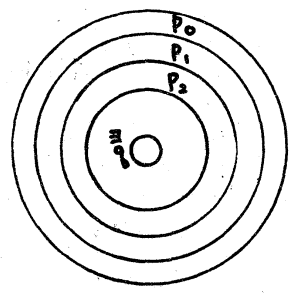
p, q に共通の extension r がある
 とき p, q は compatible である。 否
 ならば incompatible である。



$A \subseteq P$ の pairwise incompatible
 のとき A は antichain と呼ぶ。

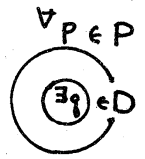
任意の antichain $A \subseteq P$ の \aleph_1 の可算
 集合であるとき P は countable chain
condition (c.c.c.) である。

$p_0 \geq p_1 \geq p_2 \geq \dots$ である任意の可
 算列 $\{p_n\} \subseteq P$ に対して $q \in P$ に対して 任意の
 n に対して $p_n \geq q$ となるものが存在する
 とき P は countably closed である。



$D \subseteq P$ は 任意の $p \in P$ に対して

$q \leq p$ とする $q \in D$ が存在するとき、dense であるという。



$G \subseteq P$ は、次の二つの条件をみたすとき、filter であるという。

(1) 任意の $p, q \in G$ に対して、 $r \leq p, q$ をみたす $r \in G$ が存在する。

(2) 任意の $p, q \in P$ に対して、 $p \leq q$ かつ $p \in G$ ならば $q \in G$ 。

§ 3. Proper partially ordered set

PFA は、proper partially ordered set を用いて定義される。Proper p.o. は、集合論の言葉を用い、generic extension にあけるある stationary 性の保存として非常に自然で、(a) も、(b) と (c) を定義することができる。(a), (b), (c) では集合論の道具を用いない定義を採用する。

P を p.o. とする。二人の player による次の game を与える。0 回戦では、まず player I が $p_0 \in P$ を選ぶ。P の要素を選ぶのは、このときだけである。つまり player I は、maximal antichain $A_0 \subseteq P$ を選ぶ。次に player II が A_0 の

可算部分集合 B_0 を選ぶ。1回戦では, player I の手だ。
 maximal antichain $A_1 \subseteq P$ を選ぶ。次に, player II の。 A_0 の
 可算部分集合 B'_0 と A_1 の可算部分集合 B'_1 を選ぶ。2回戦では,
 player I の手だ。 maximal antichain $A_2 \subseteq P$ を選ぶ。次に
 player II の。 A_0 の可算部分集合 B''_0 , A_1 の可算部分集合 B''_1 ,
 A_2 の可算部分集合 B''_2 を選ぶ。----- 以下, 同様にこの操作を
 続ける。

さて, $\omega = \tau$ としても, ω まで $q \leq p_0$ が存在して, 任意
 の i に対して $B_i \equiv \bigcup \{ B_n : n \geq i \}$ が predense below q とな
 るとす。 player II の勝ちとす。 $\omega = \tau$ 。 一般に, $p \in P$ と
 $A \subseteq P$ に対して, A が predense below p とは, p の任意の
 extension q に対して $\exists r \in A$ と compatible τ であること
 をいう。
 ω game τ において player II の winning strategy がある
 とす。 P は proper τ であること。

例. P は, 次の二つの条件を満たせば,
 proper τ である。

- P は countable chain condition を満たす。
- P は countably closed τ である。

§ 4. Martin's axiom & proper forcing axiom

MA に対して, PFA は, countable chain condition
 をみたす p.o. \mathbb{P} の proper p.o. \mathbb{P} に対して成り立つ。これ
 より、 ω_1 に対して MA とは、正統には $MA(\omega_1)$ と呼ばれるもの
 である。

Martin's axiom (MA). P o. countable
 chain condition をみたす p.o. \mathbb{P} に対して, \mathbb{P} の dense subset の
 列 $\{D_\alpha : \alpha < \omega_1\}$ に対して, \mathbb{P} 上の D_α と交わる
 filter $G \subseteq \mathbb{P}$ が存在する。

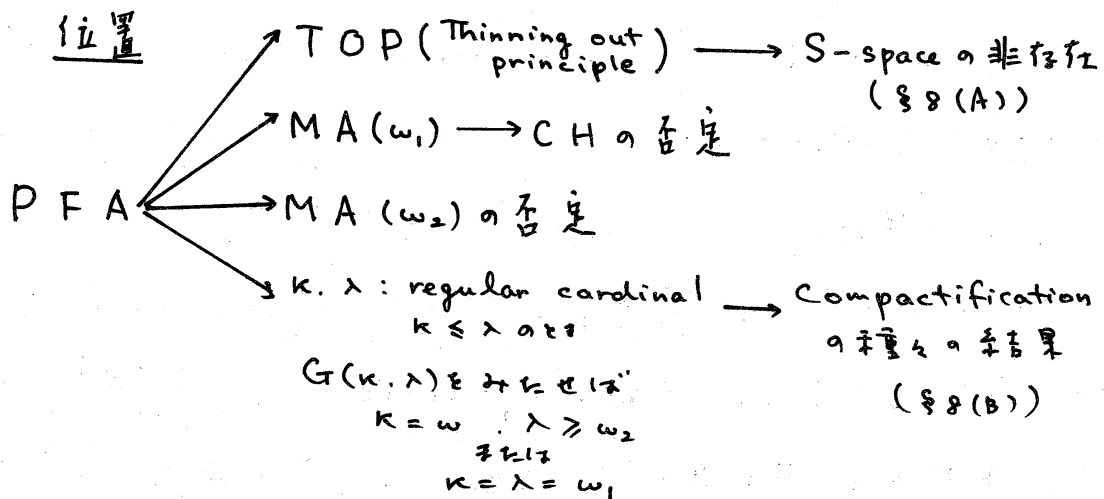
Proper forcing axiom (PFA). P o.
 proper p.o. \mathbb{P} に対して, \mathbb{P} の dense subset の列
 $\{D_\alpha : \alpha < \omega_1\}$ に対して, \mathbb{P} 上の D_α と交わる filter
 $G \subseteq \mathbb{P}$ が存在する。

§ 3 の例より, countable chain condition をみたす
 p.o. は, proper である。PFA は MA より強い公理である
 ことがわかる。

§ 5. PFAの無矛盾性と位置

定理. ZFC + 「supercompact cardinalの存在」
 が無矛盾ならば、ZFC + 「 $2^{\aleph_0} = \aleph_2$ 」 + PFAは無矛盾である。

Supercompact cardinalは、非常に大きな cardinal であり、その存在の無矛盾性は、measurable cardinal と同様、ZFC の範囲では決定できない。(したがって必ずしも PFA の無矛盾性とはいえない) のである。PFA を用いて証明された命題は、今までのは、すべて、複雑な iterated forcing による方法を用いた。ZFC と無矛盾であることばかり、という。当然、PFA は無矛盾だと思、いて、いし、の、な、い、だ、ろ、う。



§ 6. Generic extension と PFA

V を ZFC 集合論の可算モデルとする。理論体系は、もし、 V が無矛盾値であれば、必ず可算モデルをもつことに注意してあげる。これは、我々が使用している言語全体の可算性と関連している。

さて、 $P \in V$ を p.o. とするとき、filter $G \subseteq P$ で P の任意の dense subset $D \in V$ と交わるものが存在することを知らせている。このように $G \in P$ -generic over V と呼ぶ。このとき V の generic extension $V[G]$ と

$V \cup \{G\} \subseteq V[G]$ で、集合論的操作について閉じている ZFC の最小のモデルと定義する。Partially ordered set P の選び方により、 $V[G]$ は、 V を拡張した性質をみたすモデルとなる。 P の選び方の効果を調べるための主要な武器は、forcing と呼ばれる手法である。そのため、generic extension を用いて、ある条件をみたすモデルを作り、その条件の無矛盾性を示すことも、forcing による手法と呼ばれることがある。

いま、 $P \in V$ を p.o.、 $G \in P$ -generic over V 、 $Q \in V[G]$ を p.o.、 $H \in Q$ -generic over $V[G]$ とするとき、ある p.o. $P * Q \in V$ を定義して、 $P * Q$ を用いて generic

extension により, $V[G][H]$ の効果が得られるようにでき
 る。直観的に言えは, $P * Q$ は, P と Q の両方の効果を同時
 に生み出す。PFA の応用には, 次の定理が不可欠である。

定理. P が V の proper p.o. で, Q が $V[G]$ の
 proper p.o. ならば, $P * Q$ は V の proper p.o. である。

§ 7. PFA の使用法

Topology への応用法は, 少し複雑なので, こゝで
 は, 実数直線 R の部分集合の順序同型問題を例にとり, 解説
 することにしよう。よく知られているように, R の dense な
 可算部分集合は, すべて, 有理数全体の集合 Q と順序同型で
 ある。そこで, 可算濃度の濃度 \aleph_1 への拡張を試みる。部分集
 合 $A \subseteq R$ は, 任意の区間との交わりの濃度が \aleph_1 であるとき,
 \aleph_1 -dense であるという。

問題. R の \aleph_1 -dense な部分集合は, すべて, 順序同型であるか?

連続体仮説 CH のことでは、答は No である。例
 えば、 R と $R - \{0\}$ は、ともに \aleph_1 -dense な部分集合だが、
 順序同型ではない。 CH を仮定すれば、順序同型でない、
 \aleph_1 -dense な R の部分集合を ω_1 と ω_1 作ることを証明できる
 ([1])。

これに反して、Baumgartner は、次の定理を証明し
 た。

定理. PFA を仮定すれば、 R の \aleph_1 -dense な部
 分集合は、すべて順序同型である。

(証明のフウトライン) $V \models ZFC + PFA$ の可
 算モデルとし、我々は V に住んでいると考える。

まず、 V で、partially ordered set $P = \{f : f \text{ は } \omega_1 = [0, \omega_1) \text{ の部分集合を定義域とし、 } 2^\omega = \{0, 1\}^\omega \text{ を値域とする 1対1写像 (=単射)}\}$ を考える。ここで、順序は、 f が g の拡張であるとき $f \leq g$ と定義する。このとき、 P は、countably closed であり、 $G \in P$ -generic over V とすれば、 $V[G]$ は連続体仮説 CH をみたす。実際、 $\varphi = \cup G : \omega_1 \rightarrow 2^\omega$ を考えると、 $\varphi \in V[G]$ であり、 φ は ω_1 から 2^ω への bijection を与える。

次に、 $V[G]$ は countable chain condition ε により partially ordered set $Q \varepsilon$ かつ $(H$ は Q -generic over $V[G]$) なる $V[G][H]$ の中に、 A, B 間の順序同型が存在するようにとる。これは、 $V[G]$ は $CH \varepsilon$ であることを用いる。

最後の仕上げには、手品のような次の補題を用いる。遠い世界を旅して、もし、宝物のみつかり、実は、お父さんの家に、それと同じく、大切なものがあつたよといふ主張である。

補題. V は、PFA ε によるモデルとする。 $A, B \in V \varepsilon$ 濃度 $\leq \aleph_1$ の全順序集合とする。 $(P * Q)$ は proper ε 、 $V[G][H]$ の中に順序同型 $f: A \rightarrow B$ が存在すれば、ある順序同型 $g: A \rightarrow B$ が V の中に存在する。

定理の言証明にもどろう。 P, Q は、§3 例より、ともに proper p.o. なるので、§6 定理を用いると、 $P * Q$ も proper ε である。(これより、上の補題が使える。我々の世界 V の中に、 A, B 間の順序同型が存在する。

§ 8. Topology への応用

(A). S-space, L-space 問題

空間 X は、任意の部分集合が separable (Lindelöf) のとき、hereditarily separable (hereditarily Lindelöf) という。距離空間など、我々が考へる様な空間で、この2つの概念は一致しているが、ひょっとして全く同値な性質ではないかというところが、古くから問題になっている。

正則空間 X は、hereditarily separable だが hereditarily Lindelöf でないとき S-space, hereditarily Lindelöf だが hereditarily separable でないとき L-space という。上記の問題は、正則空間に限れば、次のように言い換えられる。

問題 1. S-space は存在するか?

問題 2. L-space は存在するか?

1935年に、Kurepa は、L-space が存在することの ZFC と無矛盾性であることを示した。かなり後、1972年に、Rudin は、S-space の存在の無矛盾性を証明した。彼ら

は、共に、Suslin line を用いて求める空間を構成している。
最近、S-space, L-space に関する研究が盛んに進んでおり、多くの研究者によって、さまざまな良い性質を備えた S-space, L-space の存在の無矛盾性が証明されている。

一方、存在しないことの無矛盾性に関しては、1981年に、ようやく、Todorćević によって、S-space の非存在の無矛盾性が示された。その証明法は、iterated forcing による複雑な手法だが、この直後に、Baumgartner は、PFA を仮定すれば、S-space の非存在が証明できることを示した。そして、さらに、Baumgartner は、もっと弱い条件でも証明できることを示した。すなわち、次の定理が成立する。

定理. MA + TOP を仮定すれば、S-space は存在しない。

ここで、TOP (Thinning Out Principle) とは、次の条件である。

(TOP): $A, B \subseteq [0, \omega_1)$ が非可算集合、

$\langle S_\alpha : \alpha \in B \rangle$ が任意の $\alpha \in B$ に対し $S_\alpha \subseteq [0, \alpha)$ であり、 T 可集合族とする。さらに、任意の非可算集合 $X \subseteq A$ に対し

7. ある $\beta < \omega_1$ が存在して、 $\{X \cap S_\alpha : \alpha > \beta\}$ が finite intersection property を満たすとは定すれば、ある非可算集合 $X \subseteq A$ と、 $Y \subseteq B$ が存在して、任意の $\alpha \in Y$ に対して $X \cap [0, \alpha) \subseteq S_\alpha$ となる。

PFA の TOP が導かれることがわかってゐる。
次の問題は、相当わらう、古典的の問題として残ってゐる。

問題. L-space の非存在は、ZFC と無矛盾か？

特に、PFA の仮定より L-space の非存在が言えるかどうかは美にかかるところである。

(B). 自然数空間 ω の Stone-Čech コンパクト化 $\beta\omega$

Mill [6] によれば、 $\beta\omega$ は、3つの顔をもつ怪物である。連続体仮説 CH を仮定したときの顔は、親しみやすく、ほほえみい、ほの顔で、いろいろなることばす、よりとわかる。CH を否定したときの顔は、実に混乱してゐて、今まで信じてゐたことが急に信じられなくなる。何が正しく、

何が誤りなのか断言できなくなる。最後の願は、何も仮定しないZF Cの立場だが、ZF Cで何か新しい良い結果を得ようとするとき、組合せ的議論を巧みに用いて、奴隷のように必死に働かなければならぬ。

CHを仮定した $\beta\omega$ の議論では、次のParovičenkoの定理が基本的である。空間 X は、任意のcozero集合が C^* -embeddedなとき、F-spaceという。位相空間 X に対して、 $X^* = \beta X - X$ と定義する。

定理 [CH]. 空間 X に対して、次は同値である。

- (1) X は ω^* と同相である。
- (2) X はweightが \aleph 以下のコンパクト、0次元F-spaceで、 X の任意の空でない G_δ 集合が内点をもつ。

DouwenとMillは、上記の定理が成立することと、連続体仮説CHが同値であることを示した。さらに、彼らは、明らかに同相だと予想される $(\omega \times (\omega+1))^*$ と、 ω^* が、forcingを用いて作られたShelahのモデルで、同相でないことを示した。この2つの空間は、CHが成り立つと、Parovičenkoの定理より同相であることを示すことができる。CHを仮定すれば、次の定理が成立する。

定理 (Parovičenko) [CH]. Weight が \mathfrak{c} 以下の
どんなコンパクト空間も ω^* の連続像である。

これに反して, Baumgartner は, proper forcing
axiom を用いて, 次の定理を証明した。

定理 [PFA]. Weight が \mathfrak{c} のコンパクト空間で,
 ω^* の連続像とはならないものが存在する。

その後, Mill は, \mathfrak{c} と弱い条件でも, そのよう
なものの存在が言えることを示した。

定理 (Mill). $MA(\kappa)$ と, CH の否定と,
 $G(\mathfrak{c}, \mathfrak{c})$ の否定を仮定すれば, weight \mathfrak{c} のコンパクト空間で,
 ω^* の連続像とはならないものが存在する。

ここで, $MA(\kappa)$ というのは, §4 の MA の定義に
おいて, ω_1 を任意の $\kappa < \mathfrak{c}$ にあるこの条件が成立する
という命題である。これを MA と記す場合も多い。また, κ ,
 $\lambda \in \text{regular cardinal}$ で, $\kappa \leq \lambda$ とし, $G(\kappa, \lambda)$ と
は, 次の命題を示す。

$G(\kappa, \lambda)$: ω^* の clopen set の列 $\langle U_\xi : \xi < \kappa \rangle$
 と $\langle V_\xi : \xi < \lambda \rangle$ の存在 (7). 次の 4 の条件を満たす.

$$(1) U_\xi \subset U_\eta \quad (\xi < \eta < \kappa)$$

$$(2) V_\xi \subset V_\eta \quad (\xi < \eta < \lambda)$$

$$(3) \left(\bigcup_{\xi < \kappa} U_\xi \right) \cap \left(\bigcup_{\xi < \lambda} V_\xi \right) = \emptyset$$

$$(4) \overline{\left(\bigcup_{\xi < \kappa} U_\xi \right)} \cap \overline{\left(\bigcup_{\xi < \lambda} V_\xi \right)} \neq \emptyset$$

次の定理が Baumgartner により示されている。

定理 [PFA] $G(\kappa, \lambda)$ が成立する regular
 cardinal κ, λ ならば $\kappa \leq \lambda$ と仮定してもよい。 $\kappa = \omega, \lambda \geq \omega_2$
 と仮定する場合と、 $\kappa = \lambda = \omega_1$ と仮定する場合 (0.7.1)。

この定理より、PFA を仮定すれば、 $\omega_1 < \mathfrak{c}$ に注意
 すると、 $G(\mathfrak{c}, \mathfrak{c})$ が成立する (0.7.1) とわかる。 (0.7.1) より、
 PFA を仮定すれば、Mill の定理の条件が導かれる。

$G(\kappa, \lambda)$ は $\beta\omega$ の研究に重要な役割を果たして
 いる。詳しくは Mill [6] を参照していただきたい。

REFERENCES

- [1] J. E. Baumgartner, Order types of real numbers and other uncountable linear orderings, *Ordered Sets, Proc. Banff Conference, 1981*, D. Reidel, Boston, 239-277.
- [2] _____, Iterated forcing, *Surveys in Set Theory*, London Math. Soc. Lecture Note Series 87, 1983, 1-59.
- [3] _____, Applications of the proper forcing axiom, *Handbook of Set Theoretic Topology*, North-Holland, Amsterdam, 1984.
- [4] K. Kunen, *Set Theory, An Introduction to Independence Proofs*, North-Holland, Amsterdam, 1980.
- [5] K. Kunen and J. E. Vaughan ed., *Handbook of Set Theoretic Topology*, North-Holland, Amsterdam, 1984.
- [6] J. van Mill, An introduction to $\beta\omega$, *Handbook of Set Theoretic Topology*, North-Holland, Amsterdam, 1984.
- [7] S. Shelah, *Proper Forcing*, Lecture Notes in Math. 940, Springer-Verlag, Berlin, 1982.