

測度と位相空間論の関連について

神戸大教育 奥山晃弘 (Akihiro Okuyama)

§1 序論

最近，位相空間論の中で，関数空間を扱う場合，線形空間における共役空間を取り扱うことと同様の考え方で，測度と位相空間論の関連が深まってきている様に思われる。この様な立場から，この関連性について紹介する。

ここで取り扱う空間はすべて完全正則ハウスドルフ空間とする。

空間 X 上の実数値連続関数の全体を $C(X)$ で表す。

$C(X)$ に点収束位相を入れたとき， $C_p(X)$ とかき，コンパクト開位相を入れたとき， $C_k(X)$ と表すことにする。

局所凸線形位相空間 E について， E^* を E 上の実数値連続な線形汎関の全体とする。このとき， E による E^* の弱位相を τ_E と表す。また， $E \subset E^{**}$ とみたとき， E を位相 τ_{E^*} をもつ E^{**} の部分空間としての E の位相を σ_E と

とかく。

定義1. 集合 X の部分集合族 \mathcal{B} について, 次の条件をみたすとき, \mathcal{B} を σ -集合体という。

$$(1) \quad \emptyset \in \mathcal{B}$$

$$(2) \quad \mathcal{B} \ni B \Rightarrow X \setminus B \in \mathcal{B}$$

$$(3) \quad \mathcal{B} \text{ の任意の可算部分集合 } \{B_n\}_{n=1}^{\infty} \text{ に対し, } \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n \in \mathcal{B}$$

定義2. \mathcal{B} 上の $[0, +\infty]$ 値関数 μ について, 次の条件をみたすとき, μ を \mathcal{B} 上の測度という。

$$(1) \quad \mu(\emptyset) = 0$$

$$(2) \quad \mathcal{B} \text{ の互に交わらない任意の可算部分集合 } \{B_n\}_{n=1}^{\infty} \text{ に対し, } \mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(B_n)$$

とくに,

$$B_1 \subset B_2 \Rightarrow \mu(B_1) \leq \mu(B_2) \text{ となるとき, } \mu \text{ は単調,}$$

$$\mu(B_1 \cup B_2) \leq \mu(B_1) + \mu(B_2) \text{ が常に成立するとき, } \mu \text{ は弱加法的,}$$

$$\mu(B) < +\infty \text{ が常に成立するとき, } \mu \text{ は有限,}$$

また, X が位相空間で, \mathcal{B} を X における σ -集合体とする。このとき,

\mathcal{B} の任意の要素 B に対し

$$\mu(B) = \sup \{ \mu(K) \mid K \text{ は } B \text{ のコンパクト部分集合} \}$$

$$= \inf \{ \mu(G) \mid G \text{ は } B \text{ を含む } X \text{ の開集合} \}$$

が成立するとき， $\mu \in \mathcal{M}$ 正則，
とよぶ。

空間 X について， X の開集合全体を $\mathcal{G}(X)$ ， $\mathcal{G}(X)$ を含む X における最小の σ -集合体を $\mathcal{B}(X)$ ， X のコンパクト部分集合全体を $\mathcal{K}(X)$ と表す。また， X 上の有限正則測度全体の集合を $\mathcal{M}(X)$ と表すことにする。

命題. ν を $\mathcal{G}(X)$ 上の有限，単調，弱加法的関数で，

$$G_1 \cap G_2 = \emptyset \Rightarrow \nu(G_1 \cup G_2) = \nu(G_1) + \nu(G_2) \quad (G_1, G_2 \in \mathcal{G}(X))$$

をみたすとき，次の性質をもつ正則測度が存在する。

(a) $\mathcal{G}(X)$ の任意の G に対し， $\mu(G) \leq \nu(G)$

(b) $\mathcal{B}(X)$ の任意の B に対し，

$$\mu(B) = \sup_{K \in \mathcal{K}} \inf_{B \subset G} \{ \nu(G) \mid K \in \mathcal{K}(X), G \in \mathcal{G}(X) \}$$

次の定理は有名なリースの表現定理である。

定理. X を局所コンパクト， $C_c(X)$ をコンパクト台をもつ $C(X)$ の要素全体， L を $C_c(X)$ 上の正線形汎関数とすると，下の等式をみたす $\mathcal{M}(X)$ の要素 μ が存在する。

$$L(f) = \int_X f d\mu \quad (f \in C_c(X))$$

§ 2 共役空間

空間 X について, $L(X)$ は X の各元 x に対して x を基底とする
 実数体上の一次結合の全体, 即ち

$$\left\{ \sum_{i=1}^n a_i x_i \mid a_i \in \mathbb{R}, x_i \in X, i=1, 2, \dots, n; n=1, 2, \dots \right\}$$

とする。

定理 1 E を局所凸線形位相空間とするとき,
 (E^*, τ_{E^*}) と (E, τ_E) は線形位相同型である。

空間 X の $C_p(X)$ 以上の定理を適用すると,

系 1 $(C_p(X)^*, \tau_{C_p(X)^*})$ と $(L(X), \tau_{C_p(X)}) \cong L_p(X)$ は
 線形位相同型である。

命題 ([3]) $L_p(X)$ の要素 $l = \sum_{i=1}^n a_i x_i$ ($a_i \neq 0, i=1, \dots, n$)

について,

$$\left\{ \sum_{i=1}^n W_i U_i \mid W_i \text{ は } 0 \text{ を含む } a_i \text{ の開近傍}, i=1, 2, \dots, n; \right. \\ \left. \{U_i\}_{i=1}^n \text{ は互に交わらない } \{x_i\}_{i=1}^n \text{ の開近傍} \right\}$$

が l の近傍基となる。

上の命題を使うと,

系 2 (1) X は $L_p(X)$ の閉部分集合である。

(2) $(L_p(X)^*, \tau_{L_p(X)^*})$ と $C_p(X)$ は線形位相同型と
 なる。

定理 2 $l_1(X) = \{f \mid f: X \rightarrow \mathbb{R} \text{ st } \sum_{x \in X} |f(x)| < +\infty\}$,
 $B(X) = \{f \mid f: X \rightarrow \mathbb{R} : \text{有界}\}$ とし, $l_1(X) \ni f$ に対し,
 $\|f\| \equiv \sum_{x \in X} |f(x)|$ とおき, $B(X) \ni g$ に対し, $\|g\| \equiv \sup_{x \in X} |g(x)|$
 とおくとき, $l_1(X)^*$ と $B(X)$ は $\|\cdot\|$ による距離保存の
 線形位相同型である。

§ 3 共役空間と測度

空間 X について,

$$\mathcal{M}_k(X) = \left\{ \mu \in \mathcal{M}(X) \mid X \supset \exists K: \text{コンパクト st } \mu(X \setminus K) = 0 \right\}$$

とおくと,

定理 1 $C_k(X)^*$ と $\mathcal{M}_k(X)$ の間には, 集合として,
 1対1の対応がある。しかも, その対応に従って
 $\xi \in C_k(X)^*$ が $\mu_\xi \in \mathcal{M}_k(X)$ に対応するとき,

$$\xi(f) = \int_{K_\xi} f d\mu_\xi \quad (f \in C(X))$$

が成立する。ただし, K_ξ は $\mu_\xi(X \setminus K_\xi) = 0$ となる X のコンパクト部分集合である。

定理 2 ([5]) X をコンパクト scattered 空間とし,
 $\mathcal{M}_0(X) = \left\{ \mu \in \mathcal{M}(X) \mid \sum_{x \in X} |\mu(x)| < +\infty \right\}$ とおくと, $l_1(X)$
 と $\mathcal{M}_0(X)$ は線形位相同型となる。

§ 4 付録

以上、証明をすべて省略して列挙したが、基本的な定義や概念については、文献 [1], [2], [6] を参照されたい。また、定理等の出典については、門外漢の著者には新しくみえても古いものも多く、位相解析の専門家にとっては常識とされている様にも思われるので、明示を省略させていた。

ここで、あえて位相空間論的立場でとりあげられたいらと思われることから列記する。

- (1) $M(X)$ にいろいろな位相を入れることにより、位相空間論的に興味ある様に扱えるのでは無いだろうか。
- (2) $M(X)$ を位相空間とするとき、 X と $M(X)$ の位相的性質の関連を調べる。
- (3) 2つの位相空間 X, Y について、 $M(X)$ と $M(Y)$ の位相的關係から、 X と Y の位相的關係を調べる。
- (4) $M_k(X)$ の性質と $K(X)$ の性質を関連づけられるだろうか。

これらの観点について、(1)には [7], [8], [9] が、(2)には [4], [9] が、(3)には [3], [4] がそれぞれ関連している様に思われる。

参 考 文 献

1. G. J. O. Jameson : Topology and normed spaces,
Chapman & Hall Math. Ser. 1974.
2. 越昭三 : 線形位相入門, サイエンス社
3. D. S. Pavlovskii : On spaces of continuous functions,
Sov. Math. Dokl. 22(1980), 34-37
4. V. G. Pestov : The coincidence of the dimensions \dim
of l -equivalent topological spaces,
Sov. Math. Dokl. 26(1982), 380-383
5. Z. Semadeni : Banach spaces non-isomorphic to
their cartesian squares II, Bull. de
l'Acad. Pol. 8 (1960), No. 2, 81-84
6. 竹之内脩 : l^{∞} -ノ積分, 培風館
7. F. Topsøe : Compactness in spaces of measures,
Studia Math. 36(1970), 195-212
8. ——— : Compactness and tightness in a space of
measures with the topology of weak conver-
gence, Math. Scand. 34(1974), 187-210
9. V. V. Uspenskii : On the topology of a free locally convex
spaces, Sov. Math. Dokl. 27(1983), 1781-1785