数理解析研究所講究録
584巻 1986年 91-101

Banach 空間上の位相的性質

香川大教育　岡田順直（Toshinao Okada）

Banach 空間の位相的性質を研究することは、Banach 空間論の主要な研究テーマの一つであると思われる。ここでは、よく知られているいくつかの位相的性質と、最近 Edgar と Wheeler によって得られた結果の簡単な紹介をおこないたいと思います。

§1. 準備

以後空間はとくに断わりがなければ、すべて実数$\mathbb{R}$上の Banach sp. とする。linear form $x^*: X \to \mathbb{R}$ に対しては、x^*の連続性とx^*の有界性 '$\exists \gamma > 0$ s.t. $\forall x \in X$, $\|x^*(x)\| \leq \gamma \|x\|$' とは一致する。このとき、

$\|x^*\| = \inf\{\gamma : \|x^*(x)\| \leq \gamma \|x\|\} = \sup_{\|x\| \leq 1} |x^*(x)|$ をx^*のノルムという。X^*をX上の bdd. l.f. の全体とすれば、上で定めたノルムによってX^*は又 Banach sp. となる。X^*をXの dual sp. という。同様にして、X^*の dual sp. $(X^*)^* = X^{**}$, X^{**}の dual sp. X^{***}等が次々と考えられる。

< weak top. について> X^*の任意のfinite subset $\{x_1^*, \cdots, x_n^*\}$、および任意の$\varepsilon>0$に対して、
$\{x : |x_i^*(x)|<\varepsilon,\ i=1,\cdots n\}$ の形の集合の全体を0-nbd. baseとする位相をX上のweak top.といって(X, weak)と表わす。また、Xの任意のfinite subset $\{x_1, \cdots, x_n\}$、および任意の$\varepsilon>0$に対して、$\{x^* : |x^*(x_i)|<\varepsilon,\ i=1,\cdots,n\}$の形の集合の全体を$X^*$の0-nbd. baseとする位相を$X^*$上のweak* top.といって$(X^*, \text{weak}^*)$とかく。$B_X$をXのclosed unit ball ($\{x : \|x\|\le 1\}$)とする。このとき、
$(B_X, \text{weak}|_{B_X})$を$(B_X, \text{weak})$とかく。$(B_{X^*}, \text{weak}^*)$も同様。

< quotient sp. について> Xのclosed subsp. Yに対して、そのquotient sp.をX/Yとする。
$\hat{x}\in X/Y$に対して、$\|\hat{x}\| = \inf\{\|x\| : x\in\hat{x}\} = \inf\{\|x+y\| : y\in Y\}$によって、$\hat{x}$のノルムを定めれば、$X/Y$もこのノルムによってBanach sp.となる。Xの任意のsubset Aに対して、$A^\perp = \{x^*\in X^* : x^*(x)=0,\ {}^\forall x\in A\}$、$X^*$の任意のsubset Bに対して、$B_\perp = \{x\in X : x^*(x)=0,\ {}^\forall x^*\in B\}$とおくと、quotient sp.とdual sp.に関して次の性質が成りたつ。

(1.1) $Y^* = X^*/Y^\perp$, $(X/Y)^* = Y^\perp$

< direct sum について> $X_1\times X_2 \ni (x_1, x_2)$に対

して、$\|(x_1,x_2)\|=\|x_1\|+\|x_2\|$ によってノルムを定めれば、$X_1\times X_2$ は Banach sp. とする。この Banach sp. を X_1, X_2 の direct sum といって $X_1\oplus X_2$ とかく。

(1.2) $(X_1\oplus X_2)^*=X_1^*\oplus X_2^*$

但し、$\|(x_1^*,x_2^*)\|=\max\{\|x_1^*\|,\|x_2^*\|\}$.

$(X_1\oplus X_2)^{**}=X_1^{**}\oplus X_2^{**}$

但し、$\|(x_1^{**},x_2^{**})\|=\|x_1^{**}\|+\|x_2^{**}\|$.

§2 よく知られている位相的性質

各 $x\in X$ に対して、$\hat{x}(x^*)=x^*(x)$, $^\forall x^*\in X^*$ と定義すれば、$\hat{x}\in X^{**}$ であって、$\|x\|=\|\hat{x}\|$ (i.e. $\|x\|=\sup_{\|x^*\|\le 1}|x^*(x)|$) とする。従って X は X^{**} の subsp. とみなせる。

(2.1) (B_{X^*},weak^*) が metrizable である $\rightleftarrows$ X が(ノルムの意味で)separable である。

□(証明の概略)(←) X が separable より、countable dense subset $\{x_n : n\in\mathbb{N}\}$ が存在する。このとき、$^\forall x^*,y^*\in B_{X^*}$,

$$d(x^*,y^*)=\sum_{n=1}^{\infty}2^{-n}\frac{|x^*(x_n)-y^*(x_n)|}{1+|x^*(x_n)-y^*(x_n)|}$$ と定めればよい。

(→) (B_{X^*},weak^*) を metrizable とすれば、0 の countable nbd. base $\{U_n : n\in\mathbb{N}\}$ が存在する。このとき、$^\forall n\in\mathbb{N}$, $U_n=\{x^* : |x^*(x_i)|<1,\ x_i\in F_n\}$ (F_n は X の finite subset)

であるとしておいてよい。$F=\bigcup_{n=1}^{\infty} F_n$ とすれば、$X=\overline{\mathrm{span}\, F}$
(span F は F によってはられる最小の subsp. i.e.
$\mathrm{span}\, F=\{\sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i : x_i \in F, \alpha_i \in \mathbb{R}\}$)。従って X は separable
である。

(2.2) (B_X, weak) が metrizable である $\rightleftarrows$
X^* が separable である。

□ ($\leftarrow$) (2.1) によって ($B_{X^{**}}$, weak*) は
metrizable である。(B_X, weak) は ($B_{X^{**}}$, weak*) の subsp.
より、(B_X, weak) は metrizable である。

(2.3) X が separable である $\rightleftarrows$ (X, weak)
が separable である。

(2.4) (X, weak) は countable tightness をも
つ。i.e. $A \subset X$, $x \in w\text{-}\mathrm{cl}\, A \to {}^{\exists}$countable set $D \subset A$ s.t.
$x \in w\text{-}\mathrm{cl}\, D$。

□ (B_{X^*}, weak*) は compact である。(2.6より)
(X, weak) は $C_p(B_{X^*})$ の subsp. より、(X, weak) は
countable tightness をもつ。

(2.5) (Eberlein-Šmulian の定理)
A は (X, weak) の closed subset とする。A が sequentially
compact である $\rightleftarrows$ A が compact である。

(2.6) (Alaoglu の定理)

(B_{X^*}, weak^*) は compact である。

□ X' を X 上の l.f. の全体とすれば、X' は $\mathbb{R}^X$ の closed subset であるから、$B_X^\circ = \{x' \in X' : |x'(x)| \le 1, x \in B_X\}$ とすれば、B_X° は X' 上の weak* top. で compact となる。

一方、$B_X^\circ = B_{X^*}$ より (B_{X^*}, weak^*) は compact である。

(2.7) B_X は $(B_{X^{**}}, \text{weak}^*)$ で dense である。

□ $w^*\text{-cl}\, B_X \subsetneq B_{X^{**}}$ とする。i.e. $\exists x_0^{**} \in B_{X^{**}}$ s.t. $x_0^{**} \notin w^*\text{-cl}\, B_X$ とすると、

$\exists x^* \in X^*$ s.t. $x_0^{**}(x^*) > \sup\{|x^{**}(x^*)| : x^{**} \in w^*\text{-cl}\, B_X\}$.

このとき、$x_0^{**}(x^*) \le \|x^*\| \|x_0^{**}\| \le \|x^*\|$。

一方、$\sup\{|x^{**}(x^*)| : x^{**} \in w^*\text{-cl}\, B_X\}$

$\ge \sup\{|x^*(x)| : x \in B_X\} = \|x^*\|$。

これは矛盾である。

<reflexive sp. について>

定義. X が reflexive sp である $\Leftrightarrow$ $X = X^{**}$.

例。(数列空間)

(i) $c_0 = \{(a_n) : \lim a_n = 0\}$ (0に収束する seq. の全体)。

$\|x\| = \sup|a_n|$ でノルムを定めれば、separable Banach sp. となる。

(ii) $1 \le p < \infty$ なる実数 p に対して、$\ell_p = \{(a_n) : \Sigma|a_n|^p < \infty\}$.

ノルム $\|x\| = (\Sigma|a_n|^p)^{1/p}$ によって、separable Banach sp. となる。

(iii) $l_\infty=\{(a_n):\text{ bdd seq}\}$. ノルムを $\|x\|=\sup|a_n|$ とすれば、l_∞ は Banach sp. となるが、separable ではない。

このとき、$c_0^*=l_1$, $l_1^*=l_\infty$, $1<p<\infty$ のとき、$l_p^*=l_q$ (但し $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$)。従って $1<p<\infty$ のとき、l_p は reflexive sp. となるが、c_0, l_1, l_∞ は reflexive sp. ではない。

(2.8) X が reflexive である $\rightleftarrows$ (B_X, weak) が compact である。

□ $(\longrightarrow)$ 2.6より　$(\longleftarrow)$ 2.7より

なお、§1, §2の詳細については、[2], [5]を参照されたい。

§3 Edgar and Wheeler の結果について

§2. 2.8 よりもし X が separable Banach sp. ならば、(B_X, weak) は compact metrizable sp. になる。従って、次のような問題が自然に生ずる。

問題. どのようなとき、(B_X, weak) は complete metrizable sp. になるか？

定義. (i) completely regular Hausdorff sp. T が Čech complete である $\Leftrightarrow$ 次の性質をもつ open covering の seq $\{\mathcal{U}_n\}$ が存在する; finite intersection property をもつ closed set の family $\mathcal{F}$ で、$\mathcal{F}$ が任意の n に対して $\mathcal{U}_n$-small (i.e. $\exists F_n \in \mathcal{F}$, $\exists U_n \in \mathcal{U}_n$ with $F_n \subset U_n$) ならば、$\cap \mathcal{F} \neq \phi$.

このとき、T が Čech complete であることと T の任意の compactification において T が G_δ-set であることは同値である。

(ii) top. sp. T が Polish sp である $\Leftrightarrow$ T が separable complete metrizable sp である。

(iii) Banach sp X が Čech complete ball をもつ $\Leftrightarrow$ (B_X, weak) が Čech complete sp である。

(iV) Banach sp X が Polish ball をもつ $\Leftrightarrow$ (B_X, weak) が Polish sp である。

例. (James tree sp JT) [4]

$T = \{(n, i) : n = 1, 2, \cdots, \ 0 \leq i < 2^n\}$ とする。

$(m, j), (n, i) \in T$ に対して、順序 $(m, j) \geqq (n, i)$ を次のように定める；$m > n$ で $\exists i_0 = i, i_1, \cdots, i_k = j$ (但し $k = m - n$) s.t. $i_1 \in \{2i, 2i+1\}$, $i_2 \in \{2i_1, 2i_1+1\}, \cdots$, $i_k \in \{2i_{k-1}, 2i_{k-1}+1\}$.

index の集合 $\{(n, i), (n+1, i_1), \cdots, (m, j)\}$ を segment という。James tree sp JT とは次の集合、

$JT = \{x : T \to \mathbb{R} \mid \|x\| = \sup(\sum_{j=1}^{k}(\sum_{(n,i)\in S_j} x(n,i)^2)^{\frac{1}{2}}) < \infty\}$ である。

但し、supは pairwise disjoint segment $S_1, S_2, \cdots, S_k$ のすべてを動かす。

$e_{n,i} \in JT$ $(n=0,1,2,\cdots, 0 \leq i < 2^n)$ とは、$e_{n,i}(m,j)=\delta_{n,m}\delta_{i,j}$ によって定められるJTの元とする。$f_{n,i} \in JT^*$ とは、$f_{n,i}(e_{m,j})=\delta_{n,m}\delta_{i,j}$ によって定められるJT^*の元とする。このとき、$\{f_{n,i} : n=0,1,2,\cdots, 0 \leq i < 2^n\}$ の norm closed linear span をBとすると$B^*=JT$となる。このとき、(1) JTは Polish ball をもたない。(2) JT^*は Čech complete ball をもたない。(3) Bは Polish ball をもつ。(4) BとJT^*/Bは Čech complete ball をもつ。

Proposition 3.1. Banach sp Xにおいて、次の条件は同値である。(1) (B_X, weak) は Čech complete である。(2) $B_{X^{**}}-B_X$ は weak* σ-compact である。(3) Xは (X^{**}, weak^*) で G_δ-set である。(4) $X^{**}-X$は weak* σ-compact である。

□ 2.6によって、$(B_{X^{**}}, \text{weak}^*)$ は compact で 2.7からBxは $(B_{X^{**}}, \text{weak}^*)$ で dense であるから、(1)と(2)の同値がえられる。

Lemma 3.2. Xが Čech complete ball をもつ separable Banach sp であるならばX^*は separable である。

□ 3.1. によって、$X=\cap U_n$ とする X^{**} の weak* open subset U_n $(n=1,2,\cdots)$ が存在する。U_n は 0-nbd であるから、weak top の定義より X^* の finite set F_n が定まる。X が separable より、(X^*, weak^*) は separable であるから、countable dense subset D が存在する。

$D \cup \bigcup_{n=1}^{\infty} F_n \,(\subset X^*)$ の norm closed linear span を Y とすると、$Y^{\perp}=\{0\}$。故に $Y=X^*$。従って X^* は separable である。

Corollary 3.3. X が Polish ball をもつ $\rightleftarrows$ X が separable で Čech complete ball をもつ。

Theorem 3.4. Banach sp X が Čech complete ball をもつ $\rightleftarrows$ X が $R \oplus S$ に isomorphic である。

但し、R は reflexive sp で S は Polish ball をもつ Banach sp である。

□ $(\rightarrow)$ $(X, \text{weak}) \approx (R, \text{weak}) \times (S, \text{weak})$ より (B_X, weak) は $(B_R, \text{weak}) \times (B_S, \text{weak})$ の closed subset である。(B_R, weak), (B_S, weak) は Čech complete より (B_X, weak) は Čech complete である。

$(\leftarrow)$ 3.2. のように $\{U_n\}$ と $\{F_n\}$ を定める。$\bigcup_{n=1}^{\infty} F_n \,(\subset X^*)$ の closed linear span を G とおく。$B_{G^{\perp}}$ は $\sigma(X^{**}, X^*)$-compact であるから、$R_1 = G^{\perp}$ は X の reflexive subsp である。$(X/R_1)^* = G$ は separable より X/R_1 は又 separable sp

となる。従って、$\exists S_1$: separable subsp of X s.t. $X=R_1+S_1$。
故に、X はW.C.G. (i.e. $\exists$ weak compact subset A s.t. $\overline{\mathrm{span} A}=X$) となるから、Amir and Lindenstrauss の定理 [1] によって、$S_1 \subset S$, $X=R \oplus S$ なる separable subsp S が存在する。
従って、$R = X/S = \dfrac{X/S_1}{S/S_1} = \dfrac{R_1}{S/S_1}$ より R は reflexive sp である。一方、S は separable で Čech complete ball をもつから 3.3. より S は Polish ball をもつ。

例1. C_0 は separable dual をもつが、Polish ball をもたない。$A_n = \{x=(x_k) : |x_k| \leq \frac{1}{2}, \forall k \geq n\}$ は closed で nowhere dense subset そして $C_0 = \bigcup A_n$ より明らかである。

Theorem 3.5. separable Banach sp X において次の条件は同値である。

(1) (B_X, weak) は complete metrizable である。

(2) (B_X, weak) は Polish sp である。

(3) X は性質 (P.C) をもち、Asplund sp である。

(4) (B_X, weak) は metrizable で任意の closed subset は Baire sp である。 (証明 略)

上の定理 3.5. は最初に述べた問題の解答である。なお、ひき続いて、R.N.P., P.C, angelic sp 等の議論を用いて、更に詳しい結果や応用が得られている。

References

[1] D. Amir and J. Lindenstrauss, The structure of weakly compact sets in Banach spaces, Annals of Math., 88 (1968) 35–46.

[2] N. Dunford and J. Schwartz, Linear Operators, Part I, Interscience, 1957.

[3] G. A. Edgar and R. F. Wheeler, Topological properties of Banach spaces, Pacific J. Math., 115 (1984) 317–350.

[4] J. Lindenstrauss and C. Stegall, Examples of separable spaces which do not contain ℓ^1 and whose duals are non-separable, Studia Math., 54 (1975) 81–105.