

連続体の関数空間

大阪教育大学 小山 晃 (Akira Koyama)

ここで考える空間はすべて連続体 (= continuum = compact connected metric space) とする。連続体 X からのすべての実数値連続関数全体の集合に各点収束の位相をいれた空間を、 $C_p(X)$ と表わす。

$C_p(X)$ に関する Pavlovskii [] の興味ある結果を示している。

定理 1. (1) 連続体 X, Y に \mathbb{R}^2 , $C_p(X) \cong C_p(Y)$ ならば、

$\dim X = \dim Y$, $\mathbb{R}^2 \cong \mathbb{R}$ は linear isomorphic であることと表わす。

(2) 有限多面体 P, Q に \mathbb{R}^2 , $C_p(P) \cong C_p(Q)$ である必要十分条件は、 $\dim P = \dim Q$ であることである。

(3) 2次元連続体 (実際 Pontryagin の連続体) B について、 $C_p(B) \not\cong C_p(I^2)$ であることが知られる。

ここで、この結果を動機として次のような問題を考へていく。得られた結果は、岡田 順直 (香川大教育) との協同研究に

よるものである。

問題 1. 任意の n -次元 ANR X に対し、 $C_p(X) \cong C_p(I^n)$ か?

定理 1 (2) から考えれば自然な発想と思われるが、Borsuk [1], Theorem VI (6.1) によれば否定的に解けることもわかる。ただし、1次元連続体に対しは、次のようにもわかる。

定義: 空間 X の点 p に対し、 $\text{ord}_p X \leq n$, であるとは、任意の $\varepsilon > 0$ に対し、open subset U of X

st. $p \in U$, $\text{diam}[U] < \varepsilon$ かつ $\text{card}(\text{Bd}(U)) \leq n$

が存在することをいう。

$\text{ord}_p X \geq 3$ である点 $p \in X$ を分岐点という。また、分岐点全体の集合を $R(X)$ と表すこともできる。

定理 2. 1次元 AR (= dendrite) X に対し、 $\text{card}(R(X)) < \aleph_0$ ならば、 $C_p(X) \cong C_p(I)$ である。

系. 1次元 ANR X に対し、連続体 $Y \subset X$

st. $Y \supset R(X)$ かつ $\text{card}(R(Y)) < \aleph_0$

が存在するならば、 $C_p(X) \cong C_p(I)$ である。

これまでの結果から、系の逆が成り立つと思われず、非可縮
らう。可縮らう。

問題 2. 1次元 ANR X について、 $C_p(X) \cong C_p(I)$ ならば、

連続体 $Y \subset X$ st. $R(X) \subset Y$ かつ $\text{card}(R(Y)) < \aleph_0$ かどうか？

連続体 X について、 $C_p(X) \cong C_p(I^n)$ ならば、 X は locally connected であると思われずともしるらう。the $\sin \frac{1}{x}$ -curve, the Warsaw circle 等があるので、1次元に限らず、 X の local connectivity は重要らう。特に、次のような class を指定できる。

定理 3. 連続な全単射 $f: [0,1] \rightarrow X$ がある連続体 X

について、 $C_p(X) \cong C_p(I)$ が成り立つ

よって、次のような問題が自然に考えられる。

問題 3. $C_p(X) \cong C_p(I^n)$ となる n 次元連続体 X を特徴づけよ。

定義: 空間 X が locally contractible at a point p of X であるとは、

任意の nbd U of p in X に対して、

nbd V of p in U st. V が contractible in U である

に存在する二をいう。

また、 $LC(X) = \{x \in X \mid X \text{ は locally contractible at } x \text{ である}\}$ である。

この概念を用いて、問題3の部分解の次のように得られる。

定理4. $\dim_x X = n$ とする点 $x \in X$ を dense に含む n -次元連続体 X について、 $C_p(X) \cong C_p(I^n)$ ならば、 $LC(X)$ は dense in X である。

特に、1次元の場合に限れば、 I を含むより少し大きい class について簡単な判定条件が得られる。

定義. 連続体 X が finitely Suslinian であるとは、任意の $\varepsilon > 0$ に対して、直径が ε より大きくなる n と交わらぬ X の部分連続体は、高々有限個しか存在しない二をいう。

定義. 空間 X が locally connected at a point p of X であるとは、任意の nbhd U of p in X に対して、connected open nbhd V of p in U が存在する二をいう。

また、 $L(X) = \{x \in X \mid X \text{ は locally connected at } x \text{ である}\}$ である。

定理5. 1次元連続体 X について、finitely Suslinian である連続体 Y で、 $C_p(X) \cong C_p(Y)$ であるものが存在するならば、 $L(X)$ は dense in X である。

定理4, 定理5 を用いると, 互いに異なる開数区間をもつ同次元連続体
 は, Pontryagin のもののような複雑なものではなく, 視覚的範囲で, 容易
 に構成できることかできる。すなわち, snake-like 連続体でも。

$I = [0, 1]$, the Knaster continuum, the pseudo-arc
 などは, 互いに異なる開数区間をもつことができる。

二つでは, 連続体について名をなした。Pavlovskii [1] 自
 身は, 定理1(1)を non-compact, non-metrizable case でも証明している。よ
 うな場合, 定理1(2)はおもしろい問題を与えるだろう。おもしろい。

問題4. (局所有限可算)無限多面体 P, Q について, $\dim P = \dim Q$
 ならば, $C_p(P) \triangleq C_p(Q)$ か?

References

- [1] K. Borsuk, Theory of Retracts, Monografie Mat. PWN, 1967
 [2] D. S. Pavlovskii, On spaces of continuous functions, Soviet Math. Dokl.
 22(1980), 34-37.