

Title	Forcing and consistency proof in General topology(General Topology and Set Theory)
Author(s)	家本, 宣幸
Citation	数理解析研究所講究録 (1986), 584: 43-45
Issue Date	1986-02
URL	http://hdl.handle.net/2433/99356
Right	
Type	Departmental Bulletin Paper
Textversion	publisher

Forcing and consistency proof in General topology

琉大教育 家本 宣幸 (Nobuyuki kemoto)

M, N は ZFC のモデルで, $M \subset N$ を満たして欲しいとする。
 M で X を ベース B を持つ位相空間とすると, あきらかに, N で B は X のベースとなる。このことから N で X を位相空間と考えることができる。簡単な計算で M で X が T_0 ($T_1, T_2, T_3, T_{3\frac{1}{2}}$) ならば, N で X は T_0 (それぞれ $T_1, T_2, T_3, T_{3\frac{1}{2}}$) かわかる。更に M で X が距離空間であれば, N で X は距離空間に存在することもわかる。又, M で X を正則位相空間とし, X のベースの最小濃度を κ とし, \mathbb{P} を κ を可算順序数につぶす半順序集合, たとえば $F_n(\kappa, w, w)$, とする。 G を \mathbb{P} -generic over M なるフィルタとすると, $M[G]$ で X は可算ベースを持つ正則位相空間となり, X は距離空間となる。このことは, あるモデルで正則位相空間はモデルを拡張することにより距離空間にあることができるという主張している。
 特に, 正規位相空間はモデルを拡張することにより,

正規にできる。逆に、 M, N が ZFC のモデルで $M \subset N$ を満たしている時、 M で正規な空間 X は N で X は正規に保つかというところが次の問題に付てくる。これは一般には肯定的である。 $M \models MA$ (Martin's axiom) と CH (Continuum Hypothesis) の否定を満たすモデルとし、 M で B を濃度 \aleph_1 の実数の部分集合とする。 $X = B \times \{0\} \cup \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y > 0\}$ とし $y > 0$ なる (x, y) の近傍は普通の Euclid の意味の近傍で、 $(x, 0)$ の近傍は、 $(x, 0)$ で接する円板の中身と $\{(x, 0)\}$ の和集合で与える。 $\mathbb{P} = \text{Fn}(w_1, 2, w_1)$ とすると $M[G]$ で X は正規に保たれることがわかる。一方、 M で X は正規である。ここで G は \mathbb{P} -generic over M のフィルターである。この例は、 $MA + \neg CH$ を満たすモデルで構成される距離化不可能な、separable Moore 空間である。同様な方法で $\beta\omega$ の正規な部分空間 X で、 $\text{Fn}(w_1, 2, w_1)$ で拡張したモデルでは正規に保たれる real 存例を作ることが出来るか。 Moore (非可算) では保たれない。ここで、real 存例とは、集合論の付加的な axiom とせば、 MA, CH などを仮定せずに構成出来る例のことである。この周辺の問題として次をあげておく。

問題 1 real な正規 Moore (非可算) 空間に保たれないモデルで正規とは保たれない例があるか。

問題 2 M で X を正規空間とする時、半順序集合 \mathcal{K} がどのような条件を満たしていれば、 $M[\mathcal{K}]$ で X は正規となるか。