

## $T_j$ 空間 ( $j=0, 1, 2, 3, 3\frac{1}{2}$ ) について

静岡大 教育 勝田雄吉 (Yukiti Katuta)

### 1. 序

$P$  を位相的性質としたとき、この性質をもつ位相空間を  $P$  空間、その位相(開集合の全体)を  $P$  位相とよぶ。任意の位相空間  $X$  に対し、 $P$  空間  $P(X)$  と連続写像  $p_X : X \rightarrow P(X)$  が対応し、任意の  $P$  空間  $Y$  と任意の連続写像  $f : X \rightarrow Y$  に対し、連続写像  $\hat{f} : P(X) \rightarrow Y$  で  $\hat{f} \circ p_X = f$  をみたすものが一意的に存在するとき、 $P$  を  $P$  関手とよぶことにする<sup>1)</sup>。  
 $P$  関手が常に存在するとは限らないが、もし存在すれば、同相を除いて一意的に定まる。 $T_{3\frac{1}{2}}$  関手の存在は知られている。また、 $T_{3\frac{1}{2}}$  関手と Stone-Cech コンパク化の合成はコンパクト  $T_2$  関手である。

こゝでの主な目的は  $T_j$  関手 ( $j=0, 1, 2, 3, 3\frac{1}{2}$ ) を構成することである。その骨子は、まず [1] の中で導入されている  $S_j$  空間 ( $j=1, 2, 3, 3\frac{1}{2}$ ) を用いて  $S_j$  関手を構成する。ついで

$T_0$  関手を作り、この  $S_j$  関手と  $T_0$  関手の合成として、残りの  $T_j$  関手が得られる。[1]にならって、以後  $T_{3\frac{1}{2}}$ ,  $S_{3\frac{1}{2}}$  の代りに  $T_\pi$ ,  $S_\pi$  を用いる。

## 2. $S_j$ 関手 ( $j=1, 2, 3, \pi$ ) .

つきの公理  $(S_1)$ ,  $(S_2)$  をみたす位相空間  $X$  をそれぞれ  $S_1$  空間,  $S_2$  空間という。

$(S_1)$   $x, y \in X$  で  $x \neq \bar{y}$  ならば  $y \neq \bar{x}$ .

$(S_2)$   $x, y \in X$  で  $x \neq \bar{y}$  ならば  $x$  の近傍  $U$ ,  $y$  の近傍  $V$  で  $U \cap V = \emptyset$  であるものが存在する。

$S_3$ ,  $S_\pi$  はそれぞれ通常の regular, completely regular のことである。以下、 $j$  は  $1, 2, 3, \pi$  のうちのいずれかを表すものとする。 $T_j$  の場合と同じく、 $S_\pi \Rightarrow S_3 \Rightarrow S_2 \Rightarrow S_1$  . また、 $T_j \Leftrightarrow S_j + T_0$  .

定理 1.  $\Omega = \{\mathcal{U}_\lambda \mid \lambda \in \Lambda\}$  は集合  $X$  の上の幾つかの位相の集りとする。すべての  $\mathcal{U}_\lambda$  が  $S_j$  位相ならば、その上限の位相  $\sup \Omega^{(2)}$  も  $S_j$  位相である。

さて、 $X$  を位相空間とし、その位相を  $\mathcal{U}$  とする。 $X$  とその基礎集合を区別するために、しばらくの間、これを  $X^*$  で示す。すなわち、 $X = (X^*, \mathcal{U})$  .

$$\Omega_j = \{\mathcal{V} \mid \mathcal{V} \text{ は } X^* \text{ の上 } S_j \text{ 位相で, } \mathcal{V} \subset \mathcal{U}\}^{(3)}, \quad \mathcal{U}_j = \text{Amp } \Omega_j$$

とおく。明かに  $\mathcal{U} \supset \mathcal{U}_1 \supset \mathcal{U}_2 \supset \mathcal{U}_3 \supset \mathcal{U}_\pi$ 。定理1により、 $\mathcal{U}_j$  は  $S_j$  位相である。特に  $\mathcal{U}_\pi$  は  $X$  の（すなわち  $\mathcal{U}$  に関する）すべてのコゼロ集合によって生成される位相である。また、 $\mathcal{U}$  自身が  $S_j$  位相ならば  $\mathcal{U} = \mathcal{U}_j$ 。このように  $\mathcal{U}_j$  を定め、位相空間  $(X^*, \mathcal{U}_j)$  を  $\sigma_j(X)$  で示そう。 $\sigma_j X$  を  $X^*$  の恒等写像とすれば、 $\mathcal{U} \supset \mathcal{U}_j$  だから、 $\sigma_j X : X \rightarrow \sigma_j(X)$  は連続である。

定理2.  $\sigma_j$  は  $S_j$  関手である。

### 3. $T_j$ 関手 ( $j = 0, 1, 2, 3, \pi$ )

まず  $T$  関手を作る。位相空間  $X$  において、その上の同値関係  $\sim$  を  $x \sim y \Leftrightarrow \bar{x} = \bar{y}$  で与える。 $\sim$  による商空間  $X/\sim$  を  $\tau_0(X)$  で表し、 $\tau_0 X : X \rightarrow \tau_0(X)$  を商写像とする。この  $\tau_0$  は [5] の意味の  $T_0$ -identification にはならない。

定理3.  $\tau_0$  は  $T$  関手である。

つきに、先に与えた  $S_j$  関手  $\sigma_j$  との  $T$  関手  $\tau_0$  の合成を  $\tau_j$  とする。すなわち、任意の位相空間  $X$  に対し、 $\tau_j(X) = \tau_0(\sigma_j(X))$ 、 $\tau_j X = \tau_0 \circ \sigma_j(X) \circ \sigma_j X$  と定める。

定理4.  $\tau_j$  は  $T_j$  関手である。

なお、 $\tau_0$  に関しては、つきの(1), (2), (3), が成り立つ。

(1)  $i : A \rightarrow X$  が埋め込み (imbedding) ならば  $\tau_0(i) : \tau_0(A)$

$\rightarrow \tau_0(X)$  も埋め込みである。

(2)  $f: X \rightarrow Y$  が商写像ならば  $\tau_0(f): \tau_0(X) \rightarrow \tau_0(Y)$  も商写像である。

(3) 位相空間の族  $\{X_\lambda | \lambda \in \Lambda\}$  に対し,  $\tau_0(\prod_{\lambda \in \Lambda} X_\lambda) = \prod_{\lambda \in \Lambda} \tau_0(X_\lambda)$ .<sup>4)</sup>

問題1.  $\tau_0$  を  $T_j$  または  $S_j$  でおきかえたとき, 上の (1), (2), (3) は (どの) ような条件の下で成り立つか<sup>5)</sup>.

$T_0$  関手は別の方まで作らることができる。2つの元 0, 1 から成る集合に  $\emptyset, \{0\}, \{0, 1\}$  を開集合とするような位相を入れた空間を  $E$  で表す。明かに  $E$  は  $T_0$  空間である。位相空間  $X$  から  $E$  へのすべての連続写像の集合を  $C(X)$  で表す。 $C(X)$  個の  $E$  の積空間  $\prod_{f \in C(X)} E_f$  ( $E_f = E$ ) の部分空間  $\{(f(x))_{f \in C(X)} | x \in X\}$  を  $P(X)$ ,  $P_X: X \rightarrow P(X)$  を  $P(x) = (f(x))_{f \in C(X)}$ ,  $x \in X$ , とすれば、この  $P$  は  $T_0$  関手になる。 $E$  を  $I = [0, 1]$  でおきかえれば  $T_\pi$  関手が得られる ([3] 参照)。

問題2. 他の  $T_j$  関手や  $S_j$  関手についてもこのような方法で構成することができるか。すなわち,  $E$  や  $I$  に相当する空間が存在するか。

## 注

1) 関手は functor の和訳である (岩波数学辞典第2版).

実際、任意の連続写像  $f: X \rightarrow Y$  に対し、連続写像  $\rho(f) = (\sigma_Y \circ f)^*: \rho(X) \rightarrow \rho(Y)$  が  $\rho(f) \cdot \rho_x = \rho_Y \circ f$  をみたすように一意的に存在する。したがって、この  $\rho$  は位相空間のカテゴリーから  $P$  空間の full 部分カテゴリーへの (coreflector とよばれる) 関手になっている。 $P$  が  $T_{3\frac{1}{2}}$  (すなわち Tychonoff) の場合には、[3] では、これを Tychonoff functor とよんでいる。これにちなんで、かく命名した。

2)  $\sup \Omega$  は  $\bigcup_{x \in \Lambda} U_x$  によって生成される  $X$  の上の位相.

3)  $\Omega_j$  は空ではない。実際、 $X^*$  の上の最小の位相、すなわち 中と  $X^*$  のみを開集合とする位相はどの  $\Omega_j$  にも属す。

4)  $\tau_{\alpha_X}: X_\lambda \rightarrow \tau_0(X_\lambda)$ ,  $\lambda \in \Lambda$  の積を  $\varphi: \prod_{\lambda \in \Lambda} X_\lambda \rightarrow \prod_{\lambda \in \Lambda} \tau_0(X_\lambda)$  で表す。各  $\tau_0(X_\lambda)$  が  $T_0$  空間だからその積空間  $\prod_{\lambda \in \Lambda} \tau_0(X_\lambda)$  も  $T_0$  空間である。したがって、 $\hat{\varphi}: \tau_0(\prod_{\lambda \in \Lambda} X_\lambda) \rightarrow \prod_{\lambda \in \Lambda} \tau_0(X_\lambda)$  が得られるが、この  $\hat{\varphi}$  が同相写像のとき、 $\tau_0(\prod_{\lambda \in \Lambda} X_\lambda) = \prod_{\lambda \in \Lambda} \tau_0(X_\lambda)$  とかく。

5)  $\tau_\pi$  に関しては、2つの位相空間  $X, Y$  の積空間の場合でも、無条件では  $\tau_\pi(X \times Y) = \tau_\pi(X) \times \tau_\pi(Y)$  は成り立たない ([2], [4] 参照)。

## 文 献

- [1] Á Császár, General topology, Adam Hilger, Bristol 1978.
- [2] T. Ishii, On the Tychonoff functor and  $w$ -compactness, Topology and its Applications 11 (1980) 173-187.
- [3] K. Morita, Čech cohomology and covering dimension for topological spaces, Fund. Math. 87 (1975) 31-52.
- [4] S. Oka, Tychonoff functor and product spaces, Proc. Japan Acad. 54 (1978) 97-100.
- [5] S. Willard, Genral topology, Addison-Wesly, Reading 1970.