

$\mathcal{P}$ -ル代数  $\mathcal{P}(\omega_1)/\mathfrak{m}$  と  $\mathcal{P}(\omega)/\mathfrak{m}$  との同型問題

防衛大 加藤昭男  
(AKIO KATO)

最近 General Topologists の間では  $\omega_1^* = \mathcal{P}\omega_1 \setminus \omega_1$  と  $\omega^* = \mathcal{P}\omega \setminus \omega$  とは同相になり得るか、という問題がしばしば脚光を浴びてきた。この小論では、この問題に対する "one small step" として、random real extension に於ては答えは否定的であることを示す。

§1. Introduction Cardinal  $\kappa$  に對し  $\kappa^* = \mathcal{P}\kappa \setminus \kappa$  は、discrete space  $\kappa$  の Stone-Čech compactification  $\mathcal{P}\kappa$  の remainder を表わす。 $\mathcal{P}\kappa$  は power set  $\mathcal{P}(\kappa)$  of  $\kappa$  の Stone space であり、 $\kappa^*$  は、 $\mathcal{P}(\kappa)$  を finite sets の ideal で割って得られる商  $\mathcal{P}(\kappa)/\mathfrak{m}$  の Stone space に一致する。従って  $\omega_1^*$  と  $\omega^*$  が同相になるか、という問題は、 $\mathcal{P}$ -ル代数  $\mathcal{P}(\omega_1)/\mathfrak{m}$  と  $\mathcal{P}(\omega)/\mathfrak{m}$  が同型になるか、という問題と同じであり、本質的に

集合論的性格を持っている。なお一般の cardinals  $\kappa, \lambda$   $\kappa < \omega < \lambda$  の同様の問題は否定的に解決されており、我々の問題のみが未解決として残されている [1]。即ち、

$$\kappa > \lambda \geq \omega, \quad \kappa^* \cong \lambda^* \quad \rightarrow \quad \kappa = \omega_1 \text{ \& \ } \lambda = \omega$$

(i.e.  $\mathcal{P}(\kappa)/\mathfrak{fin} \cong \mathcal{P}(\lambda)/\mathfrak{fin}$ )

§2. Similarity  $\mathcal{P}(\omega_1)/\mathfrak{fin} \cong \mathcal{P}(\omega)/\mathfrak{fin}$  が成立するならば  $2^{\omega_1} = |\mathcal{P}(\omega_1)/\mathfrak{fin}| = |\mathcal{P}(\omega)/\mathfrak{fin}| = 2^\omega$  であるから、我々は条件  $2^{\omega_1} = 2^\omega$  が成立する時のみ関心がある。(例えは連続体仮説 CH が成立する状況は除外される。)

この必要条件  $2^{\omega_1} = 2^\omega$  は、ブール代数の構造を全く無視することにより得られたものであるが、実は意外と無視して いた ということが次の定理よりわかる。

定理 1. 次は equivalent である。

(1)  $2^{\omega_1} = 2^\omega$

(2) Homeomorphic embedding  $\omega_1^* \hookrightarrow \omega^*$  が存在する。  
i.e. Homomorphism, onto  $\mathcal{P}(\omega_1)/\mathfrak{fin} \leftarrow \mathcal{P}(\omega)/\mathfrak{fin}$  が存在。

(3)  $\mathcal{P}(\omega_1)/\mathfrak{fin} \cong \mathcal{P}(\omega)/I$  とはる ideal  $I$  of  $\mathcal{P}(\omega)$   $2^n$  finite sets を含むものが存在する。

(証明) (2)  $\rightarrow$  (3) は明らか。 (3)  $\rightarrow$  (1) は、  $2^{\omega_1} = |\mathcal{P}(\omega_1)/\mathcal{I}_n| = |\mathcal{P}(\omega)/\mathcal{I}| \leq |\mathcal{P}(\omega)| = 2^\omega$  より従う。 (1)  $\rightarrow$  (2) を示すには、  $2^{\omega_1} = \kappa (= 2^\omega)$  のとき  $\mathcal{P}\omega_1 \supset \mathcal{P}\omega$  となることを示せば十分であるが、  $\mathcal{P}\omega_1$  は extremally disconnected であることに注意すれば次のよく知られた結果から従う。

Fact. 1. Extremally disconnected compact  $T_2$  space  $X$  of weight  $\leq \kappa$  は、  $\omega^*$  の中に homeomorphic に embed される。 すなわち、 complete Boolean alg.  $\mathcal{B}$  of card.  $\kappa$  は Boolean alg.  $\mathcal{P}(\omega)/\mathcal{I}_n$  の homomorphic image になる。

これは Efimov の結果だが、本質的には Sikorski extension theorem による ([5] 参照)。

なお、この定理 1 (3) において、ideal  $\mathcal{I}$  を  $\sigma$ -ideal に選ぶかどうかはまだわかっていない。 Martin's Axiom を仮定すれば  $\sigma$ -ideal に選ぶことは可能である ([5])。

定理 2.  $\omega_1^*$  及び  $\omega^*$  は共に homeomorph of  $\kappa \times \omega^*$  を dense に含む。従って、  $\omega_1^*$  及び  $\omega^*$  の regular open sets 全体のつくる  $\Gamma$ -ル代数は同じである。 すなわち、  $\mathcal{P}(\omega_1)/\mathcal{I}_n$  及び  $\mathcal{P}(\omega)/\mathcal{I}_n$  の completion は一致する。

この定理は、countable sets から成る maximal almost disjoint collection of card.  $\phi$  をみつければよいと容易に証明される。詳細は読者にゆだねる。

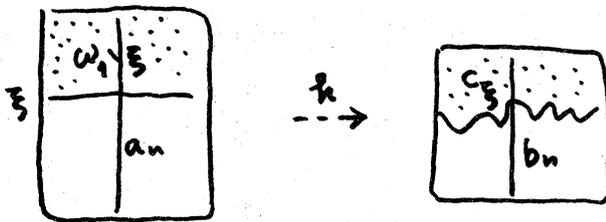
§3. A Breakthrough 問題の解決に一步踏み出したのは Frankiewicz & Balcar [3] による次の結果である。

定理 3.  $\mathcal{P}(\omega_1)/\sim$  が  $\mathcal{P}(\omega)/\sim$  の中に embed されることは、 $\omega$  から  $\omega$  への関数全体  ${}^\omega\omega$  の中に  $\omega_1$ -scale が存在する。

( ${}^\omega\omega$  の中に  $f < g \iff \exists m \in \omega \forall n > m f(n) < g(n)$  により order を入れたとき、 $S \subseteq {}^\omega\omega$  が  $\omega_1$  同型 order isomorphic であり、 $\forall f \in {}^\omega\omega \exists g \in S f < g$  となるとき、 $S$  を  $\omega_1$ -scale とする。)

(証明)  $h: \mathcal{P}(\omega_1)/\sim \rightarrow \mathcal{P}(\omega)/\sim$  を embedding とする。 $\omega_1$  の分割  $\omega_1 = \bigoplus_{n \in \omega} a_n$ ,  $|a_n| = \omega_1$  を考え、 $h$  により対応する  $\omega$  の分割を  $\omega = \bigoplus_{n \in \omega} b_n$  とする。すなわち  $h([a_n]) = \langle b_n \rangle$  である。(  $a \in \mathcal{P}(\omega_1)$ ,  $b \in \mathcal{P}(\omega)$  に対応する equivalence class in  $\mathcal{P}(\omega_1)/\sim, \mathcal{P}(\omega)/\sim$  )

をそれぞれ  $[a]$ ,  $\langle b \rangle$  で表わすことにする。) 各  $\xi \in \omega_1$  に対し  $h([\omega_1, \xi]) = \langle c_\xi \rangle$ ,  $c_\xi \in \omega$  とする。  $[a_n] \cdot [\omega_1, \xi] > 0$  より  $\langle b_n \rangle \cdot \langle c_\xi \rangle > 0$ . 各  $\xi \in \omega_1$  に対し  $f_\xi \in \omega$  を  $f_\xi(n) = \text{Min}(b_n \cap c_\xi)$  により定めれば  $\xi < \eta \in \omega_1$  の時  $f_\xi < f_\eta$  in  $\omega$  とする。 よって、  $\{f_\xi : \xi \in \omega_1\}$  から求める  $\omega_1$ -scale が得られる。



§4. Aspects in Models 今までの考察から.

もし  $\beta(\omega_1)/\mathfrak{m} \approx \beta(\omega)/\mathfrak{m}$  ならば条件

$$(*) \quad 2^{\omega_1} = 2^\omega \quad \& \quad \exists \omega_1\text{-scale in } \omega$$

が成立しなければならぬ。この条件が成立する model of ZFC として最もシンプルなのは、いわゆる random real extension である。よって、この model の中で  $\beta(\omega_1)/\mathfrak{m} \approx \beta(\omega)/\mathfrak{m}$  が成立するかどうかを調べよう。答えは否定的である。

定理 4. Model  $M$  of CH に  $\omega_2$  個の random reals を add した extension  $M[G]$  において embedding  $\beta(\omega_1)/\mathfrak{m} \hookrightarrow \beta(\omega)/\mathfrak{m}$  は存在しない。

(証明)  $M \models CH$  とする。 " $\omega_2$  個の random reals を add する" とは、Cantor space  $2^I$  where  $I = \omega_2$  の中に標準的な probability measure を入れ、Baire subsets 全体を ideal of null sets で割った商  $\sigma$ -代数  $B(I) = \text{Baire}(2^I)/\text{null}$  による extension を与えることである。  $G$  を  $M$ -generic filter in  $B(I)$  とし、

$M[G] \models \exists \varphi: \mathcal{P}(\omega_1)/\mathcal{I}_M \rightarrow \mathcal{P}(\omega)/\mathcal{I}_M$  embedding"

(emb. = 1-1, into. homomorph.) と仮定すると矛盾を導く。

各  $\xi < \omega_1$  に対し  $\varphi([ \xi ]) = \langle c_\xi \rangle$  とおき、

$$J_1 \triangleq \{ [ \xi ] : \xi \in \omega_1 \} \subseteq \mathcal{P}(\omega_1)/\mathcal{I}_M$$

$$J_0 \triangleq \{ \langle c_\xi \rangle : \xi \in \omega_1 \} \subseteq \mathcal{P}(\omega)/\mathcal{I}_M$$

と定める。  $\varphi(J_1) = J_0$ 。  $\varphi$  は embedding であるから

$$\xi < \eta \rightarrow \langle c_\xi \rangle \leq \langle c_\eta \rangle$$

$J_0$  は  $\omega_1 \times \omega$  の subset により決定され、 $|\omega_1 \times \omega| = \omega_1$

であることから subset  $I_0 \subseteq I$ ,  $|I_0| = \omega_1$  と

$$J_0 \in M[G_0] \text{ where } G_0 \triangleq G \cap B(I_0)$$

なるものがみつかる。  $M[G_0]$  において  $\omega$  も  $CH$  が成立するから、一般性を失うことなく、初めから

$$J_0 \in M$$

と仮定してよい。

さて、よく知られたように、 $\omega_1$  の中において

$\omega_2$ -sequence  $\{a_\alpha : \alpha \in \omega_2\}$  of subsets of  $\omega_1$  such that  $\alpha < \beta$   
 のとき  $a_\alpha \supseteq a_\beta \pmod{\text{countable}}$ ,  $a_\alpha \setminus a_\beta$  uncountable  
 なるものがある。 (これらは "closed unbounded sets" を  
 含む。  $\omega_2$  は  $\omega_1$  の induction step による diagonal  
 intersection を含む。 ) したがって、  $\mathcal{P}(\omega_1)/\text{fn}$  の中  
 には、  $\alpha < \beta$  のとき  $[a_\alpha] \supset [a_\beta] \pmod{J_1}$  がある。

$\varphi([a_\alpha]) = \langle b_\alpha \rangle$ ,  $b_\alpha \subseteq \omega$  とおくと  $\varphi$  は embedding かつ  
 $\alpha < \beta < \omega_2 \rightarrow \langle b_\alpha \rangle \supset \langle b_\beta \rangle \pmod{J_0}$  in  $\mathcal{P}(\omega)/\text{fn}$

である。  $\varphi$  は  $M[G]$  の中で成立し続けるから

$\exists p \in G, \forall \alpha < \beta < \omega_2 \quad p \Vdash \langle \dot{b}_\alpha \rangle \supset \langle \dot{b}_\beta \rangle \pmod{J_0}$

各 name  $\dot{b}_\alpha \in M^{B(I)}$  は function  $\dot{b}_\alpha : \omega \rightarrow B(I)$  である。  
 $\text{rng}(\dot{b}_\alpha) \subseteq B(I_\alpha)$  となる countable set  $I_\alpha \subseteq I$  がある。

$p \in B(I_p) \subseteq B(I)$ ,  $|I_p| \leq \omega$  とするときは明らか  $I_p \subseteq I_\alpha$   
 for all  $\alpha \in \omega_2$  となる。

$M \models CH$  である collec.  $\{I_\alpha : \alpha < \omega_2\}$  of countable subsets  
 に対して  $\Delta$ -system lemma が適用できる。 従って一般  
 性を失うことなく  $\{I_\alpha : \alpha < \omega_2\}$  は  $\Delta$ -system with root  
 $K \supseteq I_p$  となる ([4] 参照)。 更に、  $\exists i \in \omega + 1$   
 $\forall \alpha < \omega_2 \quad |I_\alpha \setminus K| = i$  となるから、  $\forall \alpha, \beta \in \omega_2$  に対して  
 $K$  上の点を fix する bijection  $\pi_{\alpha\beta} : I_\alpha \rightarrow I_\beta$  かつ  $\pi_{\beta\alpha} = \pi_{\alpha\beta}^{-1}$   
 なるものが定まる。  $\pi_{\alpha\beta}, \pi_{\beta\alpha}$  の両方を extend して

permutation of  $I$  を  $\tilde{\pi}_{\alpha\beta}: I \rightarrow I$  とする。  $\pi_{\alpha\beta}, \tilde{\pi}_{\alpha\beta}$  が induce する automorphisms を同じ文字で表わす。

$$\pi_{\alpha\beta}: B(I_\alpha) \rightarrow B(I_\beta), \quad \tilde{\pi}_{\alpha\beta}: B(I) \rightarrow B(I)$$

$\omega$  が  $B(I_*)$  where  $|I_*| = \omega$  の関数は  $CH$  により高い  $\omega_1 = \phi$  以下しかたないから、次の diagram が可換になるような  $\alpha < \beta < \omega_2$  が存在するはずである。

$$\begin{array}{ccc} \omega & \xrightarrow{\dot{b}_\alpha} & B(I_\alpha) \\ \parallel & \curvearrowright & \downarrow \pi_{\alpha\beta} \\ \omega & \xrightarrow{\dot{b}_\beta} & B(I_\beta) \end{array}$$

これは、 $\tilde{\pi}_{\alpha\beta}$  が induce する isomorph.  $\tilde{\pi}_{\alpha\beta}: M^{B(I)} \rightarrow M^{B(I)}$  を考えれば、 $\tilde{\pi}_{\alpha\beta}(\dot{b}_\alpha) = \dot{b}_\beta, \tilde{\pi}_{\alpha\beta}(\dot{b}_\beta) = \dot{b}_\alpha$  となることを示さなくてはならない。よって、 $p \in \langle \dot{b}_\alpha \rangle \langle \dot{b}_\beta \rangle \text{ mod. } J_0$  なる関係を  $\tilde{\pi}_{\alpha\beta}$  により写せば

$$\pi_{\alpha\beta}(p) \in \langle \dot{b}_\beta \rangle \langle \dot{b}_\alpha \rangle \text{ mod. } \tilde{\pi}_{\alpha\beta}(J_0)$$

となる。  $I_p \subseteq K$  より  $\pi_{\alpha\beta}(p) = p$ 。また  $J_0 \in M$  より  $\tilde{\pi}_{\alpha\beta}(J_0) = J_0$  である

$$p \in \langle \dot{b}_\beta \rangle \langle \dot{b}_\alpha \rangle \text{ mod. } J_0$$

ゆえに、 $M[G]$  において  $\langle \dot{b}_\alpha \rangle \langle \dot{b}_\beta \rangle \text{ mod. } J_0$

かつ  $\langle \dot{b}_\beta \rangle \langle \dot{b}_\alpha \rangle \text{ mod. } J_0$  となり、矛盾である。

(証明終)

この証明においては、"random" real の特性は全く使用してないので、この定理の結果は、"random"に限らず一般の reals を add するときにも、その付加の仕方が "side-by-side" すなわち "product" forcing ならば成立する。たとえば Cohen reals を add するときも OK である。しかし Cohen reals の場合は  $\omega_1$ -scale は存在しない。

定理 4 の結論は、"topological" に表現すれば、 $\omega^*$  から  $\omega_1^*$  の上への continuous map は存在しないという事である。上のように automorphisms を利用する証明方法は Kunen により開発されたものである。(Kunen の Doctor 論文参照)。しかし、この方法だと "iterated" forcing の場合は全くわからない。

問題 Iterated random extension のときに定理 4 が成立するか？ 一般に ccc iterated extension のときはどうか？

なお、 $\mathbb{Z}$ -ル代数の automorphism を利用した研究として、難波先生によるおぐのた記述 (数理科学講究録 No. 480) があるので参照されたい。

## 《文献》

- [1] W.W. Comfort "Compactifications: recent results from several countries" *Topology Proc.* 2 (1977) 61-87
- [2] R. Frankiewicz "Assertion  $\mathcal{Q}$  distinguishes topologically  $w^*$  &  $m^*$ " *Coll. Math.* 38 (1978) 175-177
- [3] R. Frankiewicz, B. Balcar "To distinguish topologically the spaces  $m^*$  II" *Bull. Polo. Soc.* 26 (1978) 521-523
- [4] K. Kunen's book "Set Theory" North-Holland  
( $\Delta$ -system lemma  $\kappa \rightarrow \kappa \kappa$  p.49)
- [5] K. Kunen "Some points in  $\mathfrak{N}$ "  
*Math. Proc. Camb. Phil. Soc.* 80 (1976) 385-398.