

Dimension and superposition of continuous functions

大阪教育大 服部 泰直 (Yasunao Hattori)

§ 1. Introduction.

コンパクト距離空間の位相的次元と、関数の *superposition* との関係調べた Y. Sternfeld の論文 [18] を紹介する。空間は、距離空間とし、次元は、被覆次元 \dim を意味するものとする。また、空間 X 上の実連続関数全体を、 $C(X)$ に γ を表わすものとする。Hilbert の ω 問題 を否定的に、解決した A. Kolmogorov の次の定理は、よく知られてゐる。(Hilbert の問題として、関数の *superposition* については、[4] をして [13] を参照されたい。)

1.1 定理 (A. Kolmogorov [7]). $n \geq 2$ とする。このとき、 $\varphi_{i,j} \in C(I)$, $1 \leq i \leq 2n+1$, $1 \leq j \leq n$, が存在して、任意の $f \in C(I^n)$ に対して、

$$f(x_1, \dots, x_n) = \sum_{i=1}^{2n+1} g_i \left(\sum_{j=1}^n \varphi_{i,j}(x_j) \right), \quad (x_1, \dots, x_n) \in I^n,$$

ただし、 $g_i \in C(\mathbb{R})$, $i=1, \dots, 2n+1$
とできる。

この定理を、位相空間論の立場から注目し、P. A. Ostrand
は、次のように改良した。

1.2 定理 (P. A. Ostrand [9]). $m \geq 1$ とし、任意の $j \leq m$ に
対して、 X^j を $\dim X^j \leq d_j < \infty$ なるコンパクト空間とし、
 $n = \sum_{j=1}^m d_j$ とする。このとき、 $\varphi_{i,j} \in C(X^j)$, $1 \leq i \leq 2n+1$,
 $1 \leq j \leq m$, が存在して、任意の $f \in C(\prod_{j=1}^m X^j)$ に対して、
$$f(x_1, \dots, x_m) = \sum_{i=1}^{2n+1} g_i \left(\sum_{j=1}^m \varphi_{i,j}(x_j) \right), \quad (x_1, \dots, x_m) \in \prod_{j=1}^m X^j,$$

ただし、 $g_i \in C(\mathbb{R})$, $1 \leq i \leq 2n+1$, と表わすことができ
る。

特に、この定理において、 $j=1$ とすると、次が得られる。

1.3 系. コンパクト空間 X が、 $\dim X \leq n$ ならば、
 $\varphi_i \in C(X)$, $1 \leq i \leq 2n+1$, が存在して、任意の $f \in C(X)$
に対して、

$$f(x) = \sum_{i=1}^{2n+1} g_i(\varphi_i(x)), \quad x \in X,$$

ただし、 $g_i \in C(\mathbb{R})$, $1 \leq i \leq 2n+1$, と表わすことができ

る。

系 1.3 は、コンパクト空間が、 n 次元以下であることの必要条件を述べている。一方、[14]において、Y. Sternfeld は、 $n=2, 3, 4$ の場合には、この逆も成立することを証明している。その時、鍵となったのは、次の定理である。

1.4. 定理 ([14, Theorem 4.9]). $n \leq m$ とし、 $W \subset \mathbb{R}^m$ を n 次元 Cantor manifold とする。このとき、 $\dim P_i(W) = 1$ となる i ($1 \leq i \leq m$) が、存在するならば、 $|a| = n-1$, $i \notin a$ で、かつ $\dim P_{a \cup \{i\}}(W) = n$ なる $a \subset \{1, \dots, m\}$ が、存在する。(ただし、 $b \subset \{1, \dots, m\}$ に対して、 P_b は、 \mathbb{R}^m から $\prod_{i \in b} \mathbb{R}_i$ への projection とする。)

彼は、上の定理の一般化として、 $\dim P_{i_1, \dots, i_k}(W) = k$ なる $k \leq m$ が存在する時、 $i_1, \dots, i_k \notin a$, $|a| = n-k$ として、

$\dim P_{a \cup \{i_1, \dots, i_k\}}(W) = n$ なる a が存在するかと問うた ([14, Problem 4.15])

なせならば、もし、この問題が、肯定的ならば、[14]における理論は、そのまゝ $n \geq 5$ に対しても、適用できようである。たからである。(実際、N. V. Savinov [12] は、この問題が、肯定的に解決したとして、 $n \geq 5$ の場合に、それを適用した。)

しかし、Savinovの定理は、誤りである。実際、C. Pixley [10] は、反例を示し、それを否定的に解決した。(肯定的な部分分解は、[16]において、得られている。) 従って、[14]における理論は、単純には、一般の場合に、拡張することができない。そこで、Y. Sternfeldは、[18]において、[14]における手法を修正して、コンパクト空間の次元の特徴付けを得た。その概略を、説明しようと思う。§2は、本論の為の準備的なものである。そして、§3で、主定理と、それより導かれるコンパクト空間の次元の別の特徴付けが、述べられる。主定理の証明の概略は、節を改めて、§4において説明される。最後の節では、この分野における未解決問題が、述べられる。

関数解析については、[2]と[11]を、そして、次元論については、[5]と[8]を参照されたら。

§2. Uniformly separating families and basic families of functions.

この節では、本論への準備として、関数の *superpositions* と密接に、関係している2つの概念について、考える。

2.1 定義. $X, Y_i, 1 \leq i \leq k,$ を空間, $\varphi_i: X \rightarrow Y_i, 1 \leq i \leq k,$

を連続関数とし、 $F = \{\varphi_i\}_{i=1}^k$ とおく。このとき、任意の $f \in C(X)$ に対して、

$$f(x) = \sum_{i=1}^k g_i(\varphi_i(x)), \quad x \in X$$

ただし、 $g_i \in C(Y_i)$, $1 \leq i \leq k$, とできる時、 F を X 上の basic family と呼ぶ。

集合 X に対して、

$$l_1(X) = \{\mu \mid \mu \text{ は } \sum_{x \in X} |\mu(x)| < \infty \text{ なる } X \text{ の実数値関数},$$

$$l_\infty(X) = \{\mu \mid \mu \text{ は } X \text{ 上の実数値有界関数}\}$$

とし、 $l_1(X)$, $l_\infty(X)$ に、それぞれ、 $\|\mu\| = \sum_{x \in X} |\mu(x)|$,

$\|\mu\| = \sup_{x \in X} |\mu(x)|$ により、ノルムを定義する。このとき、 \mathbb{R}

知られたように、 $l_1(X)$, $l_\infty(X)$ は Banach spaces になる。

2.2. 定義 X , Y_i , $1 \leq i \leq k$, を集合, $\varphi_i: X \rightarrow Y_i$, $1 \leq i \leq k$

を関数とし、 $F = \{\varphi_i\}_{i=1}^k$ とおく。このとき、任意の $f \in l_\infty(X)$

に対し、

$$f(x) = \sum_{i=1}^k g_i(\varphi_i(x)), \quad x \in X,$$

ただし、 $g_i \in l_\infty(Y_i)$, $1 \leq i \leq k$, とできるとき、 F を

X 上の uniformly separating family と呼ぶ。

コンパクト空間 X と、 k 個の実連続関数 $\varphi_i: X \rightarrow \mathbb{R}$, $1 \leq i \leq k$,

に対して、 $F = \{\varphi_i\}_{i=1}^k$ が uniformly separating family ならば、 F の diagonal mapping $\varphi = \sum_{i=1}^k \varphi_i : X \rightarrow \mathbb{R}^k$ は embedding となる。従って、この意味において、コンパクト空間上の uniformly separating family は、特殊な embedding と考えてもよい。さて、次に uniformly separating family の同値条件を与えるが、それには、準備が必要である。

$X, Y_i, 1 \leq i \leq k$, を集合とし、 $\mu \in \mathcal{L}_1(X)$ とする。このとき、

$$\mu = \sum_{x \in X} a_x \delta_x, \quad a_x = \mu(x), \quad \delta_x(y) = \begin{cases} 1, & \text{if } y=x \\ 0, & \text{if } y \neq x \end{cases}$$

と書ける。そして

更に、 $\sum_{x \in X} |\mu(x)| < \infty$ であるので、 μ が 0 でない値をとる $x \in X$ は、高々可算である。従って、そのような点を $\{x_n \mid n=1, 2, \dots\}$ とすると、 $\mu = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \delta_{x_n}$, $a_n = \mu(x_n)$ と書ける。さて、

$i, (1 \leq i \leq k)$ に対して、 $T_i : \mathcal{L}_1(X) \rightarrow \mathcal{L}_1(Y_i)$ を

$$T_i \mu = T_i \left(\sum_{n=1}^{\infty} a_n \delta_{x_n} \right) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \delta_{\varphi_i(x_n)}$$

により定義する。即ち、

$$(T_i \mu)(y) = \sum_{x_n \in \varphi_i^{-1}(y)} a_n, \quad y \in Y_i$$

である。この意味より $T_i \mu \in \mu \circ \varphi_i^{-1}$ と書くことも出来る。

今、 $Y = \bigoplus_{i=1}^k Y_i$ (i.e. Y は $Y_i, 1 \leq i \leq k$ の disjoint sum) と

した時、 $T : \mathcal{L}_1(X) \rightarrow \mathcal{L}_1(Y)$ を

$$T \mu = \sum_{i=1}^k T_i \mu = \sum_{i=1}^k \sum_{n=1}^{\infty} a_n \delta_{\varphi_i(x_n)}$$

により定義する。このとき、 $T_i, 1 \leq i \leq k$, として、 T は

bounded linear operators である。

2.3. 命題. 集合 X , Y_i , $1 \leq i \leq k$, $\in \mathbb{C}$. 関数 $\varphi_i: X \rightarrow Y_i$ ($1 \leq i \leq k$) に対して, 次の条件 (a) - (d) は, 同値である:

(a) $F = \{\varphi_i\}_{i=1}^k$ は, uniformly separating family である。

(b) T の conjugate operator $T^*: (l_1(Y))^* \rightarrow (l_1(X))^*$ が onto である。ただし, $Y = \bigoplus_{i=1}^k Y_i$ である。

(c) $T: l_1(X) \rightarrow l_1(Y)$ は, isomorphism into である。

(d) λ ($0 < \lambda < 1$) が存在して, 任意の $\mu \in l_1(X)$ に対し,

$\|T_i \mu\| \geq \lambda \|\mu\|$ なる i ($1 \leq i \leq k$) が, 存在する。

証明. (a) \Rightarrow (b): まず, 一般に, 集合 X に対して, $(l_1(X))^*$ と $l_\infty(X)$ とは, 同一視してよいことに注意する。従って, 以後, ことわりなく $l_\infty(X)$ の要素と $(l_1(X))^*$ の要素を同一視することがある。 (b) を示すために, $f \in l_\infty(X)$ をとる。今, F が uniformly separating family であるから, $g_i \in l_\infty(Y_i)$, $i \leq k$ が, 存在して, $f(x) = \sum_{i=1}^k g_i(\varphi_i(x))$, $x \in X$ と, 表せる。そこで, $g \in l_\infty(Y)$ を $g(y) = g_i(y)$, $y \in Y_i$, により, 定義すると,

$$\begin{aligned} (T^*g)(x) &= (T^*g)(\delta_x) = g(T\delta_x) = g\left(\sum_{i=1}^k \delta_{\varphi_i(x)}\right) = \sum_{i=1}^k g_i(\varphi_i(x)) \\ &= f(x). \end{aligned}$$

従って、 $T^*: (l_1(Y))^* \rightarrow (l_1(X))^*$ は onto である。

(b) \Rightarrow (a): $f \in l_\infty(X)$ とする。このとき、(b) より $T^*: l_\infty(Y) \rightarrow l_\infty(X)$ が onto であるから、 $T^*g = f$ なる $g \in l_\infty(Y)$ が存在する。このとき、 $g_i = g|_{Y_i}$, $1 \leq i \leq k$, $\varphi_i < \varphi_j$ と、 $g_i \in l_\infty(Y_i)$ であり、上と同様の議論より

$$f(x) = (T^*g)(x) = \sum_{i=1}^k g_i(\varphi_i(x)), \quad x \in X$$

となる。故に、 $F = \{\varphi_i\}_{i=1}^k$ は uniformly separated family である。

(b) \Leftrightarrow (c): 一般に、Banach spaces X, Y 上の bounded linear operator $T: X \rightarrow Y$ に対し、 T が isomorphism into であることと、conjugate operator $T^*: Y^* \rightarrow X^*$ が onto であることは、同等であるから、(b) と (c) が同等であることは明らかである。

(c) \Rightarrow (d): $T: l_1(X) \rightarrow l_1(Y)$ が isomorphism into であるから、ある β ($0 < \beta \leq 1$) が存在して、任意の $\mu \in l_1(X)$ に対して、 $\|T\mu\| \geq \beta \|\mu\|$ とすることができる。ところで、 $\|T\mu\| = \|\sum_{i=1}^k T_i \mu\| \leq \sum_{i=1}^k \|T_i \mu\|$ であるから、ある i ($1 \leq i \leq k$) に対し、 $\|T_i \mu\| \geq \beta/k \cdot \|\mu\|$ とできる。従って、このとき $\lambda = \beta/k$ とおけば、この λ に対して、(d) が成立する。

(d) \Rightarrow (c): Y は Y_i , $1 \leq i \leq k$, の disjoint sum であるから $\|T\mu\| = \sum_{i=1}^k \|T_i \mu\|$ である。従って、今、 $\lambda > 0$ に対して、(d)

が、成立するとする時、任意の $\mu \in \mathcal{L}_1(X)$ に対して、

$$\|T\mu\| \geq \|T_i\mu\| \geq \lambda \|\mu\|.$$

従って、 T は isomorphism into である。

basic family と uniformly separating family との間には、次の関係がある。

2.4. 命題. コンパクト空間 X , Y_i , $1 \leq i \leq k$, と連続関数 $\varphi_i: X \rightarrow Y_i$, $(1 \leq i \leq k)$ に対し、 $F = \{\varphi_i\}_{i=1}^k$ が basic family ならば、 F は また uniformly separating family である。

証明. $Y = \bigoplus_{i=1}^k Y_i$ とし、そして、任意の $g \in C(Y)$ に対し、 $g_i = g|_{Y_i}$, $(1 \leq i \leq k)$ とおく。今、operator $S: C(Y) \rightarrow C(X)$ を

$$(Sg)(x) = \sum_{i=1}^k g_i(\varphi_i(x)), \quad x \in X$$

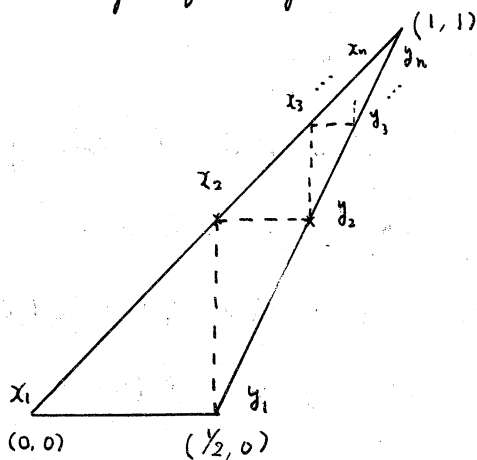
により、定義する。このとき、 S は、bounded linear operator である。ところで、 F が basic family であるから、 S は onto である。従って、 S の conjugate operator $S^*: (C(X))^* \rightarrow (C(Y))^*$ は、isomorphism である。ところで、 $\mathcal{L}_1(X) \subset (C(X))^*$, $\mathcal{L}_1(Y) \subset (C(Y))^*$, そして、 $T = S^*|_{\mathcal{L}_1(X)}$ とみなせるから、 T は isomorphism である。従って、命題 2.3 より、 F は、

uniformly separating family である。

2.5. 問題 ([14, Problem 2.17], [18, p.17]). 命題 2.4 の逆は成立するか? ($n=2$ の時は肯定的である [14] を見よ).

この節の最後に、uniformly separating family についての単純な例を与える。

2.6. 例 X を $(0,0)$, $(\frac{1}{2}, 0)$, $(1,1)$ を頂点とする三角形 (の周) とする。 $\pi_1, \pi_2 \in$ それぞれ \mathbb{R}^2 から第一座標, 第二座標への projections とし。 $\varphi_1, \varphi_2 \in$ それぞれ π_1, π_2 の X 上への制限とする。このとき $F = \{\varphi_1, \varphi_2\}$ は X 上の uniformly separating family ではない。実際 $\lambda > 0$ とし $n \in \frac{1}{\lambda} < \lambda$



なる自然数とする。このとき左図のように $x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n \in X$ をとる。そして

$$\mu = \delta_{x_1} + \dots + \delta_{x_n} - \delta_{y_1} - \dots - \delta_{y_n} \in l_1(X)$$

$$\text{と } n < \infty \text{ と } \|\mu\| = 2n, \|\mu \circ \varphi_1^{-1}\| = 2$$

$$\|\mu \circ \varphi_2^{-1}\| = 0 \text{ 従って 命題}$$

2.3 のよ) $F = \{\varphi_1, \varphi_2\}$ は uniformly separating family ではない。

2.7. 例. $X = (\frac{1}{2} \times I) \cup (I \times \frac{1}{2}) \subset \mathbb{R}^2$ とし、 φ_1, φ_2 は

例 2.6 と同様にする。このとき、 $F = \{\varphi_1, \varphi_2\}$ は uniformly separating family である。実際、 $\lambda = \frac{1}{3}$ に対して、命題 2.3 の (d) が成立する。

§3. Theorems.

この節では、主定理と、それより導かれる別のコンパクト空間の次元の特徴付けを述べる。これらは、次元論において、興味深く思われる。主定理の証明は、次の節で概説される。

3.1. 定理 (Main Theorem). $n \geq 1$ とするとき、コンパクト空間 X に対して、次の条件 (a) - (c) は、同等である。

(a) $\dim X \leq n$ 。

(b) basic family $F = \{\varphi_i\}_{i=1}^{2n+1} \subset C(X)$ が存在する。

(c) uniformly separating family $F = \{\varphi_i\}_{i=1}^{2n+1} \subset C(X)$ が存在する。

この定理は、コンパクト空間 X の次元を、 $C(X)$ の構造により特徴付ける。 $C(X)$ による次元の特徴付けは、M. Katětov [6], M. J. Cantrell [1], J. Hejman [3] などにより得られてい

る。ここで、M. Katětov の定理を、想い起こしてみよう。X をコンパクト空間とし、 $A \subset C(X)$ とする。このとき、A が次の条件 (i) - (iii) を満たす時、A は analytical subalgebra of $C(X)$ と呼ばれる。

(i) A は $C(X)$ の closed subalgebra である。

(ii) $1 \in A$.

(iii) $f \in C(X)$ に対し、もし $f^2 \in A$ ならば、 $f \in A$ である。

更に、 $F \subset C(X)$ に対して、F を含むすべての analytical subalgebra が $C(X)$ と一致するとき、F を analytical base とする。そこで、 $C(X)$ の analytical dimension $a\text{-dim } C(X)$ は、

$$a\text{-dim } C(X) = \min \{ |F| \mid F \text{ は } C(X) \text{ の analytical base } \}$$
 により、定義される。

3.2. 定理 (M. Katětov [6]). 空でないコンパクト空間 X において、 $\dim X = a\text{-dim } C(X)$ である。

定理 3.1 より導かれる次の定理は、また、空間の次元を $C(X)$ の代数的構造により、特徴付けている。

3.3. 定理. $n \geq 1$ とする時、コンパクト空間 X が、 $\dim X \leq n$

であることと、おのおのが、すべての定数値関数を含み、そして、唯一の要素により生成される $2n+1$ 個の closed sub-algebras の代数的和として、 $C(X)$ が表わされることは同等である。

証明. $\dim X \leq n$ とすると、定理 3.1 より、basic family $F = \{\varphi_i\}_{i=1}^{2n+1} \subset C(X)$ が存在する。そこで

$$C_i = \{g \circ \varphi_i \mid g \in C(\mathbb{R})\}, \quad 1 \leq i \leq 2n+1$$

とおくと、 C_i はすべての定数値関数を含む $C(X)$ の closed subalgebra である。更に、Stone-Weierstrass の定理と同様にすれば、 C_i が、唯一の要素 φ_i により生成されることもわかる。そして、 F が basic family であるから、任意の $f \in C(X)$ に対し、

$$f(x) = \sum_{i=1}^{2n+1} g_i(\varphi_i(x)), \quad x \in X,$$

左辺は、 $g_i \in C(\mathbb{R})$, $i=1, \dots, 2n+1$, と表わすことができる。

故に、 $f = \sum_{i=1}^{2n+1} g_i \circ \varphi_i \in C_1 + \dots + C_{2n+1}$ となり、 $C(X) = C_1 + \dots + C_{2n+1}$

であることがわかる。逆に、 $C(X) = C_1 + \dots + C_{2n+1}$, 左辺は

各 C_i は、一つの要素 φ_i により生成される $C(X)$ の closed sub-algebra とある。このことより、明らかに、 $F = \{\varphi_i\}_{i=1}^{2n+1}$ は

basic family である。従って、定理 3.1 が証明された。

定理 3.2 として 3.3 に関連して、次のある。

3.4. 定理 $n \geq 1$ とする時、コンパクト空間 X が $\dim X \leq n$ であることと、以下の条件 (i) - (iv) を満たす $C(X)$ の closed subalgebras A_i , ($1 \leq i \leq 2n+1$), と B_j , ($1 \leq j \leq n$) が存在することとは、同等である。

- (i) 各 A_i , B_j は、それぞれ、あべこの定数値関数を含む。
- (ii) 各 A_i は、一つの要素により生成される。
- (iii) 各 B_j は、一つの要素により、analytically に生成される。(i.e. B_j は、 $C(X)$ の analytic subalgebra であり、ある一つの B_j の要素が、存在して、それを含む B_j の analytic subalgebra は、 B_j だけである。)
- (iv) $0 \leq k \leq n$ なる任意の長、そして、右側の任意の B_j と $2(n-k)+1$ 個の任意の A_i の代数的和は、 $C(X)$ である。

証明. $\dim X \leq n$ とする。このとき、[17] より、一次元コンパクト空間 Y_j ($1 \leq j \leq n$) と連続関数 $\psi_j: X \rightarrow Y_j$ ($1 \leq j \leq n$) として、 $2n+1$ 個の関数 $\{\varphi_i\}_{i=1}^{2n+1} \subset C(X)$ が、存在して、 $0 \leq k \leq n$ なる任意の長に対し、右側の任意の ψ_j と $2(n-k)+1$ 個の任意の φ_i が basic family をなすようである。そこで

$$A_i = \{ g \circ \varphi_i \mid g \in C(\mathbb{R}) \}, \quad 1 \leq i \leq 2n+1,$$

$$B_j = \{ h \circ \varphi_j \mid h \in C(Y_j) \}, \quad 1 \leq j \leq n$$

とおく。このとき、明らかに、各 A_i は (ii) を満たし、各 A_i と各 B_j は (i) と (iv) を満たす。あとは、 B_j は (iii) を満たすことを示せばよい。明らかに、 B_j は analytic subalgebra である。さて、 $\dim Y_j = 1$ であるから、定理 3.2 より、 $C(Y_j)$ は一要素 $g_0 \in C(Y_j)$ により、analytically に生成される。このとき、明らかに、 B_j は $g_0 \circ \varphi_j$ により、analytically に生成される。逆に、(i) - (iv) を満たす $C(X)$ の closed subalgebras A_i , ($1 \leq i \leq 2n+1$) と B_j ($1 \leq j \leq n$) が存在したとある。このとき、(iv) において、 $h = 0$ の場合について、考之ると、定理 3.3 より $\dim X \leq n$ であることがわかる。

§4. Proof of the Main Theorem

この節では、Main Theorem (定理 3.1) の証明の概略を述べる。

(a) \Rightarrow (b) : 系 1.3 より明らか。

(b) \Rightarrow (c) : 命題 2.4 より明らか。

(c) \Rightarrow (a) : (c) \Rightarrow (a) を示す為には、次の \circledast を示せば十分である。

\circledast $\dim X = n$ ($n \geq 2$) であり、 $F \subset C(X)$ が uniformly

separating family ならば $|F| \geq 2n+1$ である。

④を示すためには、いくつかの準備が必要である。

4.1 定義 一般に、コンパクト空間 X に対して、

$$\alpha(X) = \min \{ |F| \mid F \text{ は } X \text{ の連続関数よりなる uniformly separating family } \}$$

と置き、 $n \geq 0$ に対し、

$$\alpha_n = \min \{ \alpha(X) \mid \dim X = n \}$$

と置く。

系 1.3 と 命題 2.4 より、 $\alpha_n \leq 2n+1$ は、すぐわかる。

4.2 補題 $n \geq 2$ に対し、 $\alpha_{n+1} > \alpha_n \geq n+1$ である。

証明 $\alpha_n \geq n+1$: ある $n \geq 2$ に対し、 $\alpha_n < n+1$ と仮定する。このとき、 α_n の定義より、 $\dim X = n$ なるコンパクト空間 X と、uniformly separating family $F = \{ \varphi_i \}_{i=1}^{\alpha_n} \subset C(X)$ が存在する。 $\varphi \in F$ の diagonal mapping $\varphi = \Delta_{i=1}^{\alpha_n} \varphi_i : X \rightarrow \mathbb{R}^{\alpha_n}$ とする。このとき、 φ は embedding であるから、 $\alpha_n = n$ なければならぬ。従って、 $\varphi(X)$ は \mathbb{R}^n の n -次元部分集合であるから、一般性を失なうことなく $[-1, 1]^n \subset \varphi(X)$ とでき

る。 $\varepsilon = (\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n)$, 互に $\varepsilon_j \in \{-1, 1\}$ ($1 \leq j \leq n$) $\in [-1, 1]^n$ の頂点とする。そして $[-1, 1]^n$ の頂点 ε に対し、 $\rho(\varepsilon) = \varepsilon_1 \cdots \varepsilon_n$ とおく。又、 $x_\varepsilon = \varphi^{-1}(\varepsilon) \in X$ とおく。このとき、 $\mu = \sum_{\varepsilon} \rho(\varepsilon) \delta_{x_\varepsilon}$ とおくと、 $\mu \in \mathcal{L}_1(X)$ であり、 $\|\mu\| = 2^n$ である。一方、任意 i , ($1 \leq i \leq n$) に対し、

$$\mu \circ \varphi_i^{-1} = \sum_{\varepsilon} \rho(\varepsilon) \cdot \delta_{\varphi_i(x_\varepsilon)} = \sum_{\varepsilon} \rho(\varepsilon) \delta_{\varepsilon_i} = 0.$$

従って、命題 2.3 より、 F は uniformly separating family とはなりえない。これは矛盾である。従って、 $\alpha_n \geq n+1$ である。

$\alpha_{n+1} > \alpha_n$: $\alpha_{n+1} \leq \alpha_n$ と仮定する。このとき、 $(n+1)$ -次元 \mathbb{R} のバナハ空間 X 上、uniformly separating family $F = \{\varphi_i\}_{i=1}^{\alpha_{n+1}}$ $\subset C(X)$ が存在する。このとき、Hurewicz の定理より、 $\dim X \leq \dim \mathbb{R} + \dim \varphi_1$ であるから、 $n+1 \leq 1 + \dim \varphi_1$ 。従って、 $\dim \varphi_1 \geq n$ である。よって $\dim \varphi_1^{-1}(t) \geq n$ なる $t \in \mathbb{R}$ となる。そして、 $F' = \{\varphi_i|_{\varphi_1^{-1}(t)}\}_{i=2}^{\alpha_{n+1}} \subset C(\varphi_1^{-1}(t))$ とおくと、 F' は $\varphi_1^{-1}(t)$ 上の uniformly separating family である。さて、もし、 $\dim \varphi_1^{-1}(t) = n+1$ ならば、 $|F'| \leq \alpha_{n+1} - 1 < \alpha_{n+1}$ であるから、 α_{n+1} の定義に矛盾。一方、もし、 $\dim \varphi_1^{-1}(t) = n$ ならば、 $|F'| \leq \alpha_{n+1} - 1 < \alpha_{n+1} \leq \alpha_n$ となり、このときは、 α_n の定義に矛盾。従って、 $\alpha_{n+1} > \alpha_n$ である。

4.3 定義 $n \geq 1$ とし、 $\beta = \{\beta_i\}_{i=1}^n$ を自然数からなる真に単調増加な列とする。そして、 K を自然数からなる有限集合とする。このとき、tree T of order n and type β of subsets of K は、 n についての帰納法により定義される。即ち、

$|T^*| \geq \beta_1$ で $T = \{i\} \mid i \in T^*\}$ となる $T^* \subset K$ が存在するとき、 $T \in$ tree of order 1 and type $\beta = \{\beta_1\}$ of subsets of K と呼ぶ。さて、tree of order r and type β of subsets of K が、 $1 \leq r < n$ に対して、定義されたとする。このとき、 $|T^*| \geq \beta_n$ なる $T^* \subset K$ が存在して、任意の $i \in T^*$ に対し、 $T = \{i\} \cup \{a \mid a \in T_i, i \in T^*\}$ となる tree T_i of order $n-1$ and type $\{\beta_1, \dots, \beta_{n-1}\}$ of subsets of $T^* - \{i\}$ が存在するとき、 $T \in$ tree of order n and type $\beta = \{\beta_1, \dots, \beta_n\}$ of subsets of K と呼ぶ。

4.4 例 $K = \{1, 2, 3, 4\}$, $\beta = \{2, 4\}$ とし、

$T = \{\{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}, \{4, 1\}, \{4, 2\}\}$ とすると、 T は tree of order 2 and type $\beta = \{2, 4\}$ of subsets of K である。実際、 $T^* = \{1, 2, 3, 4\} = K$ とし、 $T_1 = \{\{2\}, \{3\}\}$, $T_2 = \{\{3\}, \{4\}\}$, $T_3 = T_4 = \{\{1\}, \{2\}\}$ とすればよい。

空間 X から空間 Y への写像 f (必ずしも onto であるとは限らない) に対して、 X の任意の空でない閉集合 A が、 $\text{int}_Y f(A) \neq \emptyset$ である時、 f を interior mapping とする。

4.5. 補題. X を n -次元コンパクト空間 ($n \geq 2$) とし、 $\{\varphi_i\}_{i=1}^k \subset C(X)$ を X 上の uniformly separating family とする。このとき、すべての $a \in T$ に対し、 $\varphi_a = \sum_{i \in a} \varphi_i : X' \rightarrow \mathbb{R}^n$ が interior mapping になるような X の n -次元コンパクト部分集合 X' と、tree T of order n and type $\{2, \alpha_2, \alpha_3, \dots, \alpha_n\}$ of subsets of $\{1, 2, \dots, k\}$ が存在する。ただし、 $\alpha_2, \dots, \alpha_n$ は定義 4.1 のそれである。

4.6. 定義 T^* を有限集合である添字の集合とし、 $X, Y_i, i \in T^*$, を集合、そして、 $F = \{\varphi_i\}_{i \in T^*}, \varphi_i : X \rightarrow Y_i$, とする。更に、 n を自然数、 $c > 0$ を定数とする。このとき、 $\mu \in \mathcal{L}_1(X)$ は以下の条件を満たすとき、array of order n and constant c w.r.t. F と呼ばれる。

$$(ar. 1) \quad \mu = \sum_{j=1}^m \varepsilon(j) \delta_{x_j}, \quad \text{ただし } \varepsilon(j) = \{-1, 1\}, \{x_j\}_{j=1}^m \subset X \text{ と表わされる。}$$

$$(ar. 2) \quad \|\mu\| = m$$

(ar. 3) 任意の $i \in T^*$ に対し、次の (ar. 3.1), (ar. 3.2) を満

たす $L_i \subset \{1, \dots, m\}$ が存在する。

$$(ar. 3.1) \quad \mu_i = \sum_{j \in L_i} \varepsilon(j) \delta_{x_j} \quad \text{と } h < \varepsilon. \quad \mu_i \circ \varphi_i^{-1} = 0$$

$$(ar. 3.2) \quad j \leq m \text{ に対し,}$$

$$\sigma(j) = \{i \mid i \in T^*, j \in L_i\}$$

$$\text{と } h < \varepsilon \text{ とき } |\sigma(j)| \leq 2n \text{ であり,}$$

$$|\{j \mid j \leq m, |\sigma(j)| = 2n\}| \geq \|\mu\| - c \|\mu\|^{n-\frac{1}{n}}$$

である。

4.7 補題 $\mu \in$ array of order n and constant c w. r. t. $F = \{\varphi_i \mid i \in T^*\}$ とする。このとき、もし $|T^*| = 2n$ ならば、任意の $i \in T^*$ に対し、 $\|\mu \circ \varphi_i^{-1}\| / \|\mu\| \leq c \cdot \|\mu\|^{-\frac{1}{n}}$ である。

4.8 補題 $X \in$ コンパクト空間, $T \in$ tree of order n ($n \geq 2$) and type $\{2, 4, 6, \dots, 2n\}$ とし、 $F = \{\varphi_i \mid i \in T^*\} \subset C(X)$ を任意の $a \in T$ に対し、 $\varphi_a = \bigtriangleup_{i \in a} \varphi_i : X \rightarrow \mathbb{R}^{|a|}$ が interior mapping であるような family とする。このとき、定数 $c = c(n, |T^*|)$ (n と $|T^*|$ にのみよってきまる) が存在してすべての整数 $L \geq 1$ に対し、 X 上の array μ of order n and constant c w. r. t. F で $\|\mu\| = L$ なるものが存在する。

補題 4.5, 4.7 をして、4.8 の証明は、ここでは省略する。

補題 4.7 は、単純な計算により、証明することができる。

補題 4.8 の証明は、大変、長くそして煩雑である。

⊗ の証明の準備が、整ったので、これから ⊗ を証明しよう。

n についての帰納法により $\alpha_n = 2n+1$ ($n \geq 2$) を、証明する。まず、 $\alpha_n \leq 2n+1$ であったことに、注意しておく。従って、 $\alpha_n \geq 2n+1$ であることを示せばよい。まず、 $n=2$ の場合について、考える。初めに、 $\alpha_2 \geq 4$ を示す。そのために、 $\alpha_2 < 4$ と仮定すると、補題 4.2 より $\alpha_2 = 3$ 。従って、2次元コンパクト空間 X と、uniformly separating family $F = \{\varphi_i\}_{i=1}^3 \subset C(X)$ が存在する。それ故、補題 4.5 より、2次元コンパクト部分集合 $X' \subset X$ と、任意の $a \in T'$ に対し、 $\varphi_a = \sum_{i \in a} \Delta \varphi_i: X' \rightarrow \mathbb{R}^2$ が、interior mapping であるような tree T' of order 2 and type $\{2, 3\}$ が存在する。このとき、 $|a|=2$ なる $a \subset \{1, 2, 3\}$ に対しては、 $\varphi_a: X' \rightarrow \mathbb{R}^2$ は interior mapping である。さて、 $\varphi_4 = \varphi_3$ とし、 $F' = \{\varphi_i\}_{i=1}^4$ 、 $T = \{\{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}, \{4, 1\}, \{4, 2\}\}$ とおくと、 T は tree of order 2 and type $\{2, 4\}$ である (例 4.4 を見よ)。そして、 T' と F' は、 $n=2$ とした時の補題 4.8 の仮定を満たしている。従って、補題 4.8 より、ある定数 $c > 0$ が存在して、任意の自然数 k に対して、 $\|\mu\| = k$ であるような array μ of order 2 and constant c w.r.t. F が存在する。このとき、補題 4.7 より

任意の $i \in T^*$ に対して、 $\|\mu \circ \varphi_i^{-1}\| / \|\mu\| \leq C \|\mu\|^{-\frac{1}{2}}$ であるから、 $\|\mu \circ \varphi_i^{-1}\| \leq C \|\mu\|^{-\frac{1}{2}}$ である。これが、任意の k に対して成立するのだから、命題 2.3 より、 F は uniformly separating family となりえる。これは、矛盾である。従って、 $\alpha_2 \geq 4$ である。そして、また、これと同様の議論により、 $\alpha_2 \geq 5$ も示せる。従って、 $\alpha_2 = 5$ である。よって、次に、 $\alpha_r = 2r+1$ が、 $1 \leq r < n$ に対して、証明されたとする。このとき、系 1.3 と、補題 4.2 より、 $2n+1 \geq \alpha_n > \alpha_{n-1} = 2n-1$ であるので、 $\alpha_n = 2n+1$ 或いは、 $\alpha_n = 2n$ である。今、 $\alpha_n = 2n$ と仮定すると、 α_2 の時と同様の議論により、矛盾が生ずる。従って、 $\alpha_2 = 2n+1$ である。それ故、 $\textcircled{*}$ が示され、従って、定理 3.1 が証明された。

§ 5. Related topics and problems.

次は、§ 2 において述べられてゐるが、ここで、もう一度繰り返すことになる。

5.1 問題 ([14, Problem 2.17], [18, p. 17]). コンパクト空間 X , Y_i ($1 \leq i \leq k$) と、連続関数 $\varphi_i: X \rightarrow Y_i$ ($1 \leq i \leq k$) により、 $F = \{\varphi_i\}_{i=1}^k$ が uniformly separating family ならば、

F は basic family に存るか？

定理 3.1 に関して、次の問題が考えられる。

5.2. 問題 定理 3.1 のより簡単な証明を考えよ。

5.3. 問題 定理 3.1 を、無限次元空間に、拡張せよ。

[18] において、考えられている定理 3.1 の証明は、大変長く、煩雑であるので、問題 3.1 は、考えてみる価値があるように、思われる。

[18] とは、直接には、関係がないが、その周辺について、次に述べてみたい。よく知られているように、 \mathbb{R}^n の部分集合 W が、 n 次元ならば、 W は n -cube I^n を含む。

Y. Sternfeld は、[15] において、これを、一般の可分距離空間に、拡張した。

5.4. 定義 X を可分距離空間とし、 $\mathcal{H} \subseteq X$ と同じ次元を持つ閉集合からなる族とする。このとき、 $\dim F = \dim X$ なる任意の閉集合 F に対して、 $H \subset F$ なる \mathcal{H} の要素 H が、存在する時、 $\mathcal{H} \subseteq$ dimensional network と呼ぶ。そして、 $\dim X = n$

であり、かつ、高々可算な dimensional network を持つ時、
 X を countably n -dimensional としよう。

5.5. 定理 ([15, Theorem 1]). X と Y は、可分距離空間であり、 X は、countably $(\dim X)$ -dimensional であるとする。
 このとき、 $\dim W = \dim X + \dim Y$ なるコンパクト集合 $W \subset X \times Y$ に対して、 $\dim X' = \dim X$, $\dim Y' = \dim Y$ なるコンパクト集合 $X' \subset X$ と $Y' \subset Y$ で、 $X' \times Y' \subset W$ なるものが存在する。

この定理に、関して、次の問題がある。

5.6 問題 ([15, Problem 1]). 定理 5.5 において、 X の countable dimensionality の条件は、おとせるか？特に、 $\dim X = \dim Y = 1$ の時にどうか？ ($\dim X = 0$ or $\dim Y = 0$ の時は肯定的である。)

5.7 問題 ([15, Problem 2]). 定理 5.5 及 4. 問題 5.6 において、 $\dim(X' \times Y') = \dim W$ となるか？

5.8 問題 ([15, Problem 3]). 定理 5.5 及 4. 問題 5.6 に

おいて、 $\dim W = \dim X + \dim Y$ の条件を、 $\dim W = \dim(X \times Y)$
 に置きかえたら、どうなる？

References

- [1] M. J. Canfell, Uniqueness of generators of principal ideals in rings of continuous functions, Proc Amer. Math. Soc. 26 (1970), 571-573.
- [2] N. Dunford and J. Schwartz, Linear Operators, Part I, Interscience, New York, 1957.
- [3] J. Hejcman, Dimension and partition of unity, Seminar Uniform Spaces, 1973-1974, directed by Z. Frolik, MO ČSAV, Praha, 195-200.
- [4] ヒルベルト, 数学の問題 (一松信訳・解説), 共立出版, 1969.
- [5] W. Hurewicz and H. Wallman, Dimension Theory, Princeton Univ. Press, Princeton, 1948.
- [6] M. Katětov, On rings of continuous functions and dimension of compact spaces, Časopis Pěst Mat. Fys. 75 (1950), 1-16.
- [7] A. N. Kolmogorov, On the representation of continuous functions of many variables, Dokl. Acad. Nauk. SSSR 114 (1957), 953-956 (= Amer. Math. Soc. Transl. Ser. 2, 28 (1968), 55-61).
- [8] J. Nagata, Modern Dimension Theory, revised and extended edition, Heldermann Verlag, Berlin, 1983.

- [9] P. A. Ostrand, Dimension of metric spaces and Hilbert's problem 13, *Bull. Amer. Math. Soc.* 71 (1965), 619-622.
- [10] C. Pixley, A note on the dimensions of projections of cells in E^n , *Israel J. Math.* 32 (1979), 117-123.
- [11] A. P. Robertson and W. Robertson, *Topological Vector Spaces*, second edition, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1973.
- [12] N. V. Savinov, On the dimension of projections of compacta lying in R^n and uniformly separating families of functions, *Soviet Math. Dokl.* 28 (1983), 126-127.
- [13] D. A. Sprecher, A survey of solved and unsolved problems on superpositions of functions, *J. Approximation Theory* 6 (1972), 123-134.
- [14] Y. Sternfeld, Uniformly separating families of functions, *Israel J. Math.* 29 (1978), 61-91.
- [15] _____, Dimension of subsets of product spaces, *Proc. Amer. Math. Soc.* 82 (1981), 452-454.
- [16] _____, On the dimension of projections of compact subsets of R^m , *Proc. Amer. Math. Soc.* 88 (1983), 735-742.
- [17] _____, Linear superpositions with mappings which lower dimension, *Trans. Amer. Math. Soc.* 277 (1983), 529-543.
- [18] _____, Dimension, superposition of functions and separation of points, in compact metric spaces, *Israel J. Math.* 50 (1985), 13-53.