数理解析研究所講究録
587巻 1986年 157-166

工学から見たアダマール行列

足利工大 喜安善市 (KIYASU-Zen'iti)

1. はしがき. 数学の専門の方々にアダマール行列の工学上の応用について話す機会を与えられた藤原先生に感謝します. また先生からは数学者に対する希望または問題提起を要請されましたが, 演者は老齢で皆様に満足の行くようにはこたえられないのではないかとおそれています. この点については御寛恕をお願いします.

2. アダマール行列は工学にどう応用されて来たか. これを一言で申しますと, アダマール行列の

1° 直交性

2° 離散性 (または二値性)

につきると思います. 応用分野は電気通信, 光学, エレクトロニクス, 情報関係であります. (ここでは実験計画法は当然として除きます.) アダマール行列自体について言えば, いわゆるSylvester型またはWalsh関数に対応するものが

ほとんどすべてで，次数は2のべきとなっています．（後でのべる例外もあります．）年代的には古く，数学者が関心をいだく以前と思われるものがあります．主な応用分野をあげると下のようになります．

(1.) 電気通信における雑音，歪，漏話の軽減．
(2.) 測定精度の向上（水中超音波，光学，分光学，レーダ）
(3.) 高信頼度通信，多重通信．
(4.) 通信における周波数帯域または時間の圧縮
(5.) パタン認識

この内(5.)以外は主として直交性を利用したものと言えましょう．詳細は拙著[1]を御参照願い，簡単に説明します．

(1.)の代表例は裸線の交差であります．汽車の窓から線路に並行した裸線と電柱とを見られた年輩の方は多いでしょう．この裸線は平行多線條対であるため，回線相互間に漏話が生じて，良好な通話ができません．この漏話を防止する方法が1910年代に米国で発明され，世界に普及しました．これは裸線の交差といわれるもので，その原理は次のようなものであります．長さ$2l$の2対の平行な裸線があれば，対相互間の結合のため漏話が生じます．この結合は$2l$の長さにわたって一様に分布しているから，一方の対を端からlの点，すなわち中点で交差させます．こうすると前半と後半で結合が打ち消

し合って漏話はなくなります．このメカニズムは２次のアダマール行列で表現されます．この原理は，一般に2^n対の裸線に拡張されます．数学的には2^n次のアダマール行列です．実際には32次のSylvester型のアダマール行列で，これは通信技術者が試行錯誤で作り上げました．現在のアダマール行列の知識から言えば，12次，20次，28次のものも利用できるわけですが，通信技術者はSylvester型だけしか知りませんでした．

当時，現代流に言えば，ハイテクであった裸線の交差は，今はあまり使われません．ケーブルの出現で裸線そのものが使われなくなったからです．しかし直交性はケーブルの中に別の形で生きています．これは工学または技術の運命でありましょう．

アダマール行列に限らず，一般に直交系は，物理的には電力（英語のpower）の集中作用と分散作用とに利用されますが，裸線の交差はこれに相当しています．(2.)の応用もこれに当ります．

PCM（パルス符号通信，コンパクト・ディスクでアウディオ・ファンに親しまれているものと同一の原理）でもアダマール行列を利用して，特性の改善に成功しましたが，現在実用されてはおりません．半導体技術の発展によって，アダマール行列方式を利用しなくても安価で良好な通信ができるようになったからです．他の例をあげましょう．

H. F. Harmuth は 1972年 Transmission of information by orthogonal functions なる大著をあらわして，この中でアダマール行列の直交性を利用した種々の通信方式を論じているが，今に致るまで実用にならなかったようです。理由は上と同じく，今までの通信で間に合っているからです．つまり，アダマール行列の工学への応用の中には過去のものとしてすたれて行くものおよび提案されたが，経済的環境にあわずそだたないものが少くないようです．

(5.)の代表例は実験心理学上の応用です．淀川は対称図形の対称性の認識と二次元のWalsh関数展開との関係を発見しました。その他，音声の認識において類似の事実が報告されています．これらは事実であるから時代を越えるでしょう．

3. 有望な応用. 他方，アダマール行列の工学上の応用で有望なものも少くありません。応用分野としては2. の(2.)に属するものはその代表であります．光学は可視光線から，赤外線およびX線の方向に発展しています．ことにX線では可視光線のレンズや球面鏡に相当する光学部品が存在しておりません．このため，X線の取り扱いにはピンホール，スリット，回折格子しか利用できません．赤外や超音波でも事実は類似しております．小田教授はスダレによってX線天文学に新分野を開拓されましたが，一様なスダレではなく，アダマール行列に関連したパターンの

スダレによれば，さらに面白いのではないかと思います。このような考え方は分光学で一部実用されています．現に，M. Harwit と N. J. A. Sloane の共著 Hadamard transform Optics はこれを解説した250ページにおよぶ成書で，共著者の1人 Sloane は符号論で有名な Sloane その人であります．この本の中でことに興味を引くのは Golay の complementary series を使った static multislit 分光器であります．complementary series というのは長さ l の1対の $\{1,-1\}$ 上の二値系列で，たとえば

$$a_4=(+++-),\quad b_4=(+-++)$$

は4次の例であります．ただし，+は1，−は−1を意味します．ここで，a_4 の自己相関関数を $\rho_a(k)$ とします．このとき

$$\begin{aligned}\rho_a(k)+\rho_b(k)&=4\ (\text{一般には } l)\quad k=0 \text{ に対して}\\&=0\quad k\neq 0 \text{ に対して}\end{aligned}$$

となること．これが定義であります．これを利用した分光方式の動作の詳細ははぶきますが，lを十分大きくとることができれば分光感度はいくらでも大きくすることができます．これが他の方式にない長所です．この complementary series は，$l=2^m$ $(m\geq 2)$，10，10×2^m $(m\geq 1)$ などで存在が知られています．実は，l 次の complementary seriesが存在すれば，これから2l次のアダマール行列が構成されます。この意味でcomplementary seriesは工学に応用されたSylvester型でないアダマール行列の珍らしい実例といえましょう．なおcomplementary seriesの提案者GolayはGolay符号で有名であります．

アダマール行列の応用で今後とも有望なもうひとつはレーダの分野であります．ここではレーダには，これを広い意味に解釈して，電波によって遠方のものを見たり，距離を測定したり，また水中超音波によって類似のことをするものをすべて含ませることにします．さて，レーダでは極めて時間の短いパルス状の電波または超音波を発生・送信し，微弱な電波を受信し直流パルスに再現する必要があります．電子部品の側から，これには制約があります．もちろん技術の進歩によってゆるめられては行きますが，この制約を打ち破るひとつの手段がM系列の利用であります．M系列はSylvester型アダマール行列の心行列に等価（同値）な巡回行列の生成ベクトルと見ることもできます．この意味でアダマール行列の応用に相当します．Sylvester型アダマール行列の次数nを2^mとおけばM系列の長さは2^m-1でありますから，生成ベクトルから作った巡回行列は直交行列ではありませんが，mが大きい場合には近似的または実用的に直交行

列と見ることができます．生成ベクトルを周期的に並べた周期系列の（周期的な）自己相関関数は近似的にδ関数の性質を持っていて，レーダの言葉でいえば，パルスの時間幅が2^mから1に圧縮されたことになります．同じ割合で信号対雑音比も改善されます．上の議論では生成ベクトルの周期的自己相関関数を問題にしましたが，厳密にはいわゆる有限な自己相関関数で論じなければなりません．この関係の論文が多数発表されていて数学的には性格が明らかにされて来ていますが，工学的には満足の行くものではないようであります．

最近，新しい通信方式としてスペクトル拡散通信方式が注目されていますが，これにもアダマール行列が利用されます．その使われ方は上に述べたレーダでのM系列と全く同じといってよいでしょう．

アダマール行列の応用として，最も巧妙なものは1969年3月打ち上げられた火星探査衛星マリーナⅡ号で利用したテレメータ方式でしょう．ここではデータ伝送の信号対雑音比の向上に32次のアダマール行列とその補行列とを使っています．問題はアダマール行列の行ベクトルの電子的発生器を電子回路で簡単に，軽く，しかも信頼度高く（どうやって）作るかでありましょう．これはマリーナ上にのせるのですから当然です．現在（1985年）ならLSIが発達しているから問題にならないことですが，

1960年代では問題でした．この問題はSylvester型のアダマール行列の行ベクトルが群をなしていることをたくみに利用して解決しました．さらに面白いのはフレーム同期（word synchronization）の方法で，フーリエ分析で利用されるFFT（高速フーリエ変換，fast Fourier transform）のアダマール行列版，高速アダマール・ヲルシュ変換を利用したことです．

最後に，レーダでM系列を使いましたが，このM系列の代りに任意次数のアダマール行列の行ベクトルを使う方法を述べましょう．今次数nのアダマール行列を

$$H=\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} \qquad (1)$$

とします．ただしここで，$a_i\ (i=1, 2, \cdots, n)$はアダマール行列の行ベクトルで，しかも式(1)の行列Hの第j列の要素はすべて1であるものとします．このことは，次数nのアダマール行列が存在すれば常に可能であります．さて，レーダで今までのM系列のベクトルの代りに式(1)のHのn個の行ベクトルa_iを$i=1, 2, \cdots, n$に従って順次に送り出します．（これは必要条件ではありません．十分条件です．必要なのはHの行から重複をゆるして何個かをとることですが．）受信側ではa_iに対応するa_i'をうけます．a_i'は

$$a'_i = a_i + N_i \qquad (2)$$

の形と見ることができます．N_iは雑音であります．a'_iを集めて記憶装置に$\sum_{i=1}^{n} a'_i$の形で蓄積します．こうするとHの第j要素はnとなり雑音$\sum N_i$は電力としては平均値でほぼ$\sqrt{n}$倍となるにすぎませんから，信号対雑音比は$\sqrt{n}$倍に改善されます．これはM系列の場合と類似であります．M系列では相関関数によって改善しましたが，ここでは加法によります．パルス圧縮についても全く同じであります．M系列と全く異なるのはアダマール行列Hの次数について，2^mの制約が全くないことであります．

ここで述べる考え方はレーダ以外にスペクトル拡散通信方式にも応用可能であることは言うまでもありません．

4. 問題の提起　上に述べました工学でのアダマール行列の応用はほとんどすべて2^m次のSylvester型であります．これは行ベクトルが群をなしていること構造が簡単なことによって復号（decode）が比較的簡単に電子回路的によって可能なからであります．復号はHの行ベクトルa_iが与えられたとき，このベクトルa_iからiを決定することに他なりません．a_iとiとの対応関係がアルゴリズムとして簡単にあらわされるようなアダマール行列はSylvester型以外にないでしょうか．（Goethals-Seidel型は有望と思われます．）

一般のアダマール行列で，Sylvester型のFFTや，M系列の自己相関関数に相当するような旨い手はないものでしょうか．アダマール行列に限らず，一般に誤り訂正できる符号論でも事情は全く同じです．有限体の理論に基づいた有名なBCH符号系は実にすばらしいものですが，復号のアルゴリズムは簡単とは言えません．それでも，これは初期のものより簡単なものが見つかって実用可能となりました．実用可能性の判定基準は技術の発展でゆるやかになる方向に進みます．しかし，アルゴリズムは簡単なものが良いことに変りはありません．

技術の進歩とともに，高度の数学的研究が要請されます．これは丁史の教訓であります．

参考文献

1) 喜安 善市．アダマール行列とその応用．1980．電子通信学会．