

(t)-design に関する Gross タイプの定理

阪大理 永尾 浩 (Hirosi Nagao)

鹿大理 厚見 實司 (Tsuyoshi Atsumi)

上越教育大 伊藤 達郎 (Tatsuro Ito)

Def. $N = \{1, 2, \dots, n\}$, $F = \{\alpha, \beta, \dots\}$ ($|F| = g$)

$V = N \times F$ $S \subseteq V$ $S = \{(i_1, \alpha_1), \dots, (i_g, \alpha_g)\}$

S : (k) -subset $\xleftarrow{d} i_1, \dots, i_k$ はすべて異なる。

Def. B は (k) -subsets のまとまり family とす。

(V, B) が $(t) - ((n, g), k, \lambda)$ design $\xleftarrow{d} B(t)$ -subset T

を含む $B(\in B)$ の個数が丁度 λ 個。

(t) -design はまた t -design of type $g-1[2]$ といふ。
以下 $2 \leq t < k < n$, $2 \leq g$ と仮定する。

Lemma 1. (V, B) : $(t) - ((n, g), k, 1)$ design とする。

I : (i) -subset, J : (j) -subset s.t.

(i) $I \cap J = \emptyset$

(ii) $\exists B(\in B) \supseteq I \cup J$.

$$\lambda_{i,j} \text{ と } \lambda(I, J) = \#\{C \in \mathcal{B} \mid I \subseteq C, J \cap C = \emptyset\}$$

\Rightarrow 數は i, j, t, n, g, b で決まり。 $\lambda_{i,j}$ とおく。

$$\lambda_{i,j} = \lambda_{i,i-1} - \lambda_{i+1,i-1} \text{ が true なら。}$$

Theorem 1. $(V, \mathcal{B}) : (t)-((n, g), b, 1)$ design $t = \text{odd}$

$$\Rightarrow \lambda_{0,b} > 0$$

Theorem 2. $(V, \mathcal{B}) : (t)-((n, g), b, 1)$ design

$$t = \text{even} \Rightarrow \lambda_{0,b} > 0$$

上の定理は Gross の定理 1 [3] の拡張である。

t -design の時と同様に (t) -design は $\sum_i \lambda_i = t$ で "di" とか
"design の $\frac{1}{t} \lambda_i$ " 等で定義される。

次の λ_i の結果を得る。

$$\lambda_i = \frac{\lambda \binom{n-i}{t-i} g^{t-i}}{\binom{b-i}{t-i}} \quad 0 \leq i \leq t.$$

$(V, \mathcal{B}) : (t)-((n, g), b, \lambda)$ design が "拡大可能な" は

$$b(n+1)g \equiv 0 \pmod{b+1}$$

Fisher's Inequality

$(2)-((n, g), b, \lambda)$ design は

$$b \geq n g$$

$\lambda=1$ の t -design の例

例 1. $(N, \mathcal{C}) : 3-(2^d, 4, 1)$ design $\Leftrightarrow (d \geq 3)$

$$N = \{1, 2, \dots, 2^d\}, F = GF(2), V = N \times F$$

$$\mathbb{B} = \{B \mid B = \{(i_1, \alpha_1), (i_2, \alpha_2), (i_3, \alpha_3), (i_4, \alpha_4)\} \text{ } (4\text{-subset of } V, \{i_1, i_2, i_3, i_4\} \in \mathcal{C}, \sum_{i=1}^4 \alpha_i = 0)\}$$

$(V, \mathbb{B}) : 3-(2^d, 2, 4, 1)$ design である。

例 2. $(t)-((b, g), b, \lambda)$ design (V, \mathbb{B}) は 大さ $\pm b$

制約数 b , 水準 g , 強さ t の orthogonal array と定義する

$$A = \{1, 2, \dots, b\} \times F$$

(A, \mathbb{B}) : index λ の orthogonal array (b, b, g, t) と

す。 $G \triangleq N = \{1, 2, \dots, n\}$ ($n > b$) 上 大重可移群とす。

$B \in \mathbb{B}$ は $\{B^\sigma \mid B \in \mathbb{B}, \sigma \in G\}$ と定めよ。

$$V = N \times F \quad \mathbb{B}^G = \{B^\sigma \mid B \in \mathbb{B}, \sigma \in G\}$$

$(V, \mathbb{B}^G) : (t)-((n, g), b, \lambda')$ design ($\lambda' = \lambda$)

Orthogonal array $(15^5, 8, 7.5)$ は 存在する。[]

M_{24} は $\{1, 2, \dots, 24\}$ 上 5 重可移群である。

上の $= (24, 5)$

$(5)-((24, 7), 8, 1)$ design である。

Proposition 1. $(t)-((n, v), k, 1)$ design with

$1 < t+1 \leq k \leq n$ かつ存在するは

$$(n-t-1)g_k \geq (t+1)(k-t-1)$$

上は Bush, Cameron の結果の拡張である。

以下 $(V, B) : (t)-((n, v), k, 1)$ design はすべて成立する

結果である

$$\text{Lemma 2. } \lambda_{i,j} = \sum_{r=0}^j (-1)^r \binom{j}{r} \lambda_{i+r}$$

$$\text{特に } \binom{n-t}{k-t} \lambda_{0,k} = \sum_{r=0}^{t-1} (-1)^r \binom{k}{r} \binom{n-r}{k-r} \delta^{t-r} + (-1)^t \binom{k-1}{k-t} \binom{n-t}{k-t}$$

証明) Sieve method による。

$$f(t) = \sum_{r=0}^{t-1} (-1)^r \binom{k}{r} \binom{n-r}{k-r} g^{t-r} + (-1)^t \binom{k-1}{k-t} \binom{n-t}{k-t}$$

とおく

次の公式は重要である。

$$\text{Lemma 3. } f(k)g^{-k} = \sum_{r=0}^k \binom{k}{r} \binom{n-k}{k-r} \left(1 - \frac{1}{g}\right)^r > 0$$

$$\text{証明 (*) } f(t)g^{-t} = f(k)g^{-k} + (-1)^t \binom{k-1}{k-t} \binom{n-t}{k-t}$$

$$= \left\{ \sum_{r=0}^k (-1)^r \binom{k}{r} \binom{n-r}{k-r} q^{-r} \right\}.$$

証明

$$(1+x)^n \left(1 - \frac{1}{q} \frac{x}{x+1}\right)^k = (1+x)^{n-k} \left(1 + (1-\frac{1}{q})x\right)^k$$

展開で x^k の係数を考える。

$$\text{Lemma 4. } \frac{m-m}{k-m} \geq \frac{m-p}{k-p} \quad (m > k \geq p)$$

$$\frac{n-t+1}{k-t+1} \geq \frac{k}{t+1} \geq \frac{k-l}{l+1} \quad (l \geq t)$$

証明

Fisher の不等式より

定理 1 の証明

$t = \text{odd } \Rightarrow (\forall) t$ 次の $\Rightarrow l = t$ }。

$$\begin{aligned} f(t)q^{-t} &= f(k)q^{-k} + \left\{ \binom{k-1}{t-1} \binom{n-t}{k-t} q^{-t} - \binom{k}{t+1} \binom{n-t-1}{k-t-1} q^{-t-1} \right\} \\ &\quad + \sum_l \left\{ \binom{k}{l} \binom{n-l}{k-l} q^{-l} - \binom{k}{l+1} \binom{n-l-1}{k-l-1} q^{-l-1} \right\}, \\ l &\in \left\{ t+2, t+4, \dots, 2 \left[\frac{k-1}{2} \right] + 1 \right\}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \binom{k}{l} \binom{n-l}{k-l} q^{l-k} - \binom{k}{l+1} \binom{n-l-1}{k-l-1} q^{l-k-1} \\ &= q^{l-k-1} \binom{k}{l} \binom{n-l-1}{k-l-1} \left(\frac{n-l}{k-l} q - \frac{k-l}{l+1} \right) \geq 0 \end{aligned}$$

Lemma 4 5')

$$\text{5.2 } f(t) > 0 \quad \text{as } \lambda_0, b > 0.$$

定理 2 の証明 1 = 1, 2 i.e. t = even. q = 2 かつ

t = 2 一般の q = 2 が成立

t = 4 あり 2" 証明する

t ≥ 6 と仮定する。

b - t = 1 or 2 公式(*) を用いて 定理は成立

$$t \geq 2(b-t) \quad m \geq 2b \Rightarrow f(t) > 0$$

$$t \geq 6, b - t = 3 \text{ かつ } \Rightarrow f(t) > 0$$

b - t ≥ 4 かつ Proposition 1 5') m ≥ 2b.

Lemma 5 (Strong Fisher's inequality)

(2)-((m, q), b, 1) design (V, B) かつ $y - A - t$ 次の

(i), (ii) 1) $t \neq 3$ 満足し $t \neq 1, 2$.

$$(i) \quad (m-1)q = b(b-1)$$

$$(ii) (n-1)q = (k-1)(k+q)$$

$$\Rightarrow q \geq 2\sqrt{k}$$

or

$$(n-1)q > (k-1)(k + \sqrt{k})$$

(2) - $((n-t+2, 2), k-t+2, 1)$ は $\geq 1/2$ strong Fisher's

inequality を適用して $t=11, 12$

$$q=2, \quad 2\sqrt{k-t+2} \geq 2\sqrt{3} \geq 2$$

$t=2, i, iii$ の場合の可能性拡大を決定する。

可能性 λ ハラマニヤーは直接公式 (*) で計算

$$\lambda_{0,k} > 0 \text{ かつ } \lambda_{1,k} > 0$$

Proposition 2. (i) - $((n, q), k, 1)$ design $t \geq 4$, even.

$$n \geq 2k \text{ かつ}$$

$$(n-2k+t-2) \cdots (n-2k+1) q^{t-2} \frac{t!}{3}$$

$$> k(k-1)^2 \cdots (k-t+3)^2 (k-t+2)$$

$$t, j は \quad f(t) > 0$$

今 (i) - $((n, q), k, 1)$ design (V, B) は $2 \leq t \leq n-4$

仮定 (2) は

$$n \geq 2k, \quad t \geq 6, \quad k-t \geq 4$$

$$(n-t+1)2 > (k-t+1)(k-t+2 + \sqrt{k-t+2})$$

$t < b-t \leq q$ のとき

$$(n-2b+t-2) \cdots (n-2b+1) 2^{t-2} \frac{t!}{3}$$

$$> b(b-1)^2 \cdots (b-t+3)^2 (b-t+2)$$

$b-t = 8, 7, \dots, 4$ の場合と、 $t=4$ の場合が $n=3$

Remark.

$t = \text{even } n \times 3^{\frac{t}{2}}$ のとき $b-t$ は上にちぎれて t と $t+1$

が $\frac{1}{3}t$ 倍が少く (もう少く)。

References

1. Cameron. Extremal results and Configuration Theorems For Steiner systems. Annals of Discrete Mathematics 7 (1980) 43-63.
2. Delbrück. Four fundamental parameters of code and their combinatorial significance. Info. and Control 23 (1973) 407-438.
3. Gross. Intersection Triangles and Block intersection Numbers of Steiner Systems. Math. Z. 139 (1974) 87-104.