

Title	Kripkeモデルの基底としての \mathbb{R} と \mathbb{Q} (数学基礎論)
Author(s)	高野, 道夫
Citation	数理解析研究所講究録 (1986), 588: 162-174
Issue Date	1986-04
URL	http://hdl.handle.net/2433/99417
Right	
Type	Departmental Bulletin Paper
Textversion	publisher

Kripke モデルの基底としての \mathbb{R} と \mathbb{Q}

新潟大教育 高野道夫 (Mitio Takano)

小論の目的は下に述べる定理を示すことである。ただし、LJ は直観主義論理を表し、 P_2, D, K°, C はそれぞれ次の公理型のことである (P_2, D, K° の名称は Umezawa [4] によった)。

$$P_2 \text{ ----- } (A \supset B) \vee (B \supset A)$$

$$D \text{ ----- } \forall x(A(x) \vee B) \supset \forall x A(x) \vee B$$

$$K^\circ \text{ ----- } \neg\neg \forall x(A(x) \vee \neg A(x))$$

$$C \text{ ----- } (\forall y B(y) \supset \exists x A(x))$$

$$\supset \exists x(C \supset A(x)) \vee \exists y(B(y) \supset C)$$

定理. 1°) 論理式が \mathbb{Q} を基底とする定領域の Kripke モデルでつねに真であるためには、 $\exists x$ が論理 LJ + $P_2 + D$ で証明可能なことが、必要十分である。

2°) \mathbb{R} を基底とする定領域の Kripke モデルでつねに真

であるためには, $LJ + D + C$ が証明可能なことが, 必要十分である。

3°) $[0, 1] \cap \mathbb{Q}$ を基底とする定領域の Kripke モデル \mathfrak{M} によって真であるためには, $LJ + P_2 + D + K^0$ が証明可能なことが, 必要十分である。

4°) $[0, 1]$ を基底とする定領域の Kripke モデル \mathfrak{M} によって真であるためには, $LJ + D + K^0 + C$ が証明可能なことが, 必要十分である。

注意. 1°) P_2 は $LJ + C$ が証明可能である。

2°) C' を, C を特殊化した次の公理型とする:

$$C' \text{ ----- } (\forall y B(y) \supset \exists x A(x))$$

$$\supset \exists x (\exists z A(z) \supset A(x)) \vee \exists y (B(y) \supset \exists z A(z))$$

このとき, $LJ + D + C$ と $LJ + P_2 + D + C'$ とは同じ論理になる。

3°) 定理は前提なしでの証明可能性を特徴づける弱完全性の形で述べてあるが, 可算言語では, 以下に述べる証明がそのまま強完全性の証明になっている。

関連する結果としては, 次の 2° が知られている。

事実 1 (Ono [3]). 1°) 論理式について, (a) 線型な基底をもつ定領域の Kripke モデルでつねに真であること, (b) 可算で線型な基底をもつ定領域の Kripke モデルでつねに真であること, (c) $LJ + P_2 + D$ で証明可能なこと, はいずれも同値である.

2°) 論理式について, (d) 最大元のある線型な基底をもつ定領域の Kripke モデルでつねに真であること, (e) 可算で最大元のある線型な基底をもつ定領域の Kripke モデルでつねに真であること, (f) $LJ + P_2 + D + K^0$ で証明可能なこと, はいずれも同値である.

事実 2 (Horn [1]). 論理式について, (a) 線型な擬 Boole 代数を基底とする代数的モデルでつねに真であること (b) 可算で線型な擬 Boole 代数を基底とする代数的モデルでつねに真であること, (c) $[0, 1]$ を基底とする代数的モデルでつねに真であること, (d) $[0, 1] \cap \mathbb{Q}$ を基底とする代数的モデルでつねに真であること, (e) $LJ + P_2 + D$ で証明可能なこと, はいずれも同値である.

定理の十分性のほうの証明はいずれも略す. 必要性については, 3°) と 4°) は事実 1 の 1°) の代わりに事実 1 の 2°) を

利用すれば定理の (1°), (2°) と同様に証明されるので略す。

小論では簡単のため, 対象 u を表す定数記号を同じく u と書く。また, $S \subseteq \mathcal{R}$ に対し順序構造 (S, \equiv) を単に S と表す。

§1. 準備

はじめに定理にかがめるいくつかの用語を確認しておく。

集合 U に対し, 論理式 A の U -例とは, A に含まれるすべての自由変数に U の元に対応する定数記号をいっせいに代入して得られるもののことである。

定領域の Kripke モデル (以下では単にモデルという。) とは, 順序構造 $\mathcal{L} = (\|\mathcal{L}\|, \equiv_{\mathcal{L}})$, 空でない集合 U , \mathcal{L} に後述の条件 M0-M6 を満たす $\|\mathcal{L}\|$ の元と論理式の U -例との間の関係 \Vdash からなる \Rightarrow -組 (\mathcal{L}, U, \Vdash) のことである。 \mathcal{L} をこのモデルの基底という。

$$M0. \quad \mathcal{L} \Vdash A, \mathcal{L} \equiv_{\mathcal{L}} \mathcal{L}' \Rightarrow \mathcal{L}' \Vdash A.$$

$$M1. \quad \mathcal{L} \Vdash A \wedge B \iff \mathcal{L} \Vdash A \ \& \ \mathcal{L} \Vdash B.$$

$$M2. \quad \mathcal{L} \Vdash A \vee B \iff \mathcal{L} \Vdash A \ \text{or} \ \mathcal{L} \Vdash B.$$

$$M3. \quad \mathcal{L} \Vdash A \supset B \iff \forall \mathcal{L}' \in \|\mathcal{L}\| [\mathcal{L} \equiv_{\mathcal{L}} \mathcal{L}' \ \& \ \mathcal{L}' \Vdash A. \\ \Rightarrow \mathcal{L}' \Vdash B].$$

$$M4. \mathcal{L} \models \neg A \iff \forall l' \in |\mathcal{L}| [l \equiv_{\mathcal{L}} l' \implies l' \not\models A].$$

$$M5. \mathcal{L} \models \forall x A(x) \iff \forall u \in U [l \models A(u)].$$

$$M6. \mathcal{L} \models \exists x A(x) \iff \exists u \in U [l \models A(u)].$$

論理式 A がモデル $(\mathcal{L}, U, \models)$ で真であるとは, $|\mathcal{L}|$ の任意の元 l と A の任意の U -例 A' について $l \models A'$ となることである.

線型な基底をもつモデルを線型モデルという.

モデルの作り替えに関する以下の3つの補題は容易に証明される.

補題1 (Ono [2]). $(\mathcal{L}, U, \models)$ を線型モデル, \mathcal{M} を線型順序構造, f を $|\mathcal{M}|$ から $|\mathcal{L}| \wedge$ の写像とし,

$$\left\{ \begin{array}{l} \forall m, m' \in |\mathcal{M}| [m \equiv_{\mathcal{M}} m' \implies f(m) \equiv_{\mathcal{L}} f(m')], \\ \forall l \in |\mathcal{L}| \forall m \in |\mathcal{M}| [f(m) \equiv_{\mathcal{L}} l \\ \implies \exists m' \in |\mathcal{M}| (m \equiv_{\mathcal{M}} m' \ \& \ f(m') = l)], \end{array} \right.$$

と仮定する. このとき $|\mathcal{M}|$ の元と論理式の U -例との間の関係 \models^* を

$$m \models^* A \iff f(m) \models A$$

と定義すれば, $(\mathcal{M}, U, \models^*)$ はモデルになる.

補題2. $(\mathcal{M}, U, \models^*)$ を線型モデル, \mathcal{L} を線型順序構造,

f を $|M|$ から $|L|$ への写像とし,

$$\begin{cases} \forall m, m' \in |M| [m <_m m' \implies f(m) <_L f(m')] , \\ \forall l \in |L| \exists m \in |M| [f(m) \equiv_L l] , \end{cases}$$

と仮定する。このとき $|L|$ の元と論理式の U -例との間の関係 \vdash を

$$l \vdash A \iff \exists m \in |M| [f(m) \equiv_L l \ \& \ m \vdash^* A]$$

と定義すれば、3-組 (L, U, \vdash) がモデルになる条件は
 “M5 の \Leftarrow ” 以外はすべて成り立つ。

補題3. 補題2の2つめの仮定を

$$\forall l \in |L| \exists m \in |M| [l \equiv_L f(m)]$$

に取り換える。このとき $|L|$ の元と論理式の U -例との間の関係 \vdash を

$$l \vdash A \iff \forall m \in |M| [l \equiv_L f(m) \implies m \vdash^* A]$$

と定義すれば、3-組 (L, U, \vdash) がモデルになる条件は
 “M6 の \implies ” 以外はすべて成り立つ。

§2. 定理10)の必要性の部分の証明

次の補題は前進後退法によって容易に証明される。

補題4. 可算な線型順序構造 \mathcal{L} に対し, \mathbb{Q} から $|\mathcal{L}|$ への写像 f ぞ,

$$\begin{cases} \forall a, a' \in \mathbb{Q} [a \leq a' \Rightarrow f(a) \leq_{\mathcal{L}} f(a')], \\ f \text{ は } |\mathcal{L}| \text{ への全射,} \end{cases}$$

であるものが存在する.

定理10)の必要性の部分の証明. 対偶を示すため, 論理式 A が $LJ + P_2 + D$ ぞ証明不可能だと仮定する. 事実1, 10)の“(b) \Rightarrow (c)”より, 可算な線型な基底をもつあるモデル (\mathcal{L}, U, \vDash) ぞ A は真ぞはない. \mathcal{L} ぞ \mathcal{L} のある元 l と A のある U -例 A' ぞ $l \not\vDash A'$. そこでこの \mathcal{L} ぞ対して補題4の f ぞとり, さらに (\mathcal{L}, U, \vDash) と \mathbb{Q} , f ぞ対して補題1の \vDash^* ぞとってモデル $(\mathbb{Q}, U, \vDash^*)$ ぞ考える. 上の l ぞ対して $f(a) = l$ ぞなる $a \in \mathbb{Q}$ ぞとせば $a \not\vDash^* A'$ ぞなる. \mathcal{L} ぞ対して, A は \mathbb{Q} ぞ基底とするあるモデルぞ真ぞはない. \square

§3. 定理20)の必要性の部分の証明

補題5. a_0 ぞ \mathbb{Q} の元, $(\mathbb{Q} \cap [a_0, \infty), U, \vDash^*)$ ぞ公理型 C ぞ属するすべての公理ぞ真にするモデルとし,

$$S = (\mathbb{Q} \cap [a_0, \infty)) \cup \left\{ \inf \{ a \in \mathbb{Q} \cap [a_0, \infty) \mid a \not\models^* \exists x A(x) \} \mid \begin{array}{l} \exists x A(x) \text{ は } a_0 \not\models^* \exists x (\exists z A(z) \supset A(x)) \\ \text{である } U\text{-例} \end{array} \right\}$$

とおく。

1°) S の元と論理式の U -例 との間 の 関係 \models^* を

$$\sigma \models^* A \iff \exists a \in \mathbb{Q} \cap [a_0, \infty) [a \leq \sigma \ \& \ a \models^* A]$$

と定義すれば,

(i) (S, U, \models^*) はモデルになる;

(ii) $a_0 \not\models^* \exists x (\exists z A(z) \supset A(x))$ ならば, 集合

$$\{ \sigma \in S \mid \sigma \not\models^* \exists x A(x) \}$$

は最大元をもつ。

2°) $[a_0, \infty)$ の元と論理式の U -例 との間 の 関係 \models を

$$\alpha \models A \iff \forall \sigma \in S [\alpha \leq \sigma \implies \sigma \models^* A]$$

と定義すれば, $([a_0, \infty), U, \models)$ はモデルになる。

1°) の (i) の証明. 補題 2 より “M5 の \Leftarrow ”, つまり

$$\forall u \in U [\sigma \models^* B(u)] \implies \sigma \models^* \forall y B(y),$$

すなわち

$$\begin{aligned} \forall u \in U \exists a \in \mathbb{Q} \cap [a_0, \infty) [a \leq \sigma \ \& \ a \models^* B(u)] \\ \implies \exists a \in \mathbb{Q} \cap [a_0, \infty) [a \leq \sigma \ \& \ a \models^* \forall y B(y)] \end{aligned}$$

を示せばよい. \Leftarrow “ $\forall u \in U \exists a \in \mathbb{Q} \cap [a_0, \infty) [a \leq \sigma \ \&$

$a \not\models^* B(u)$] と仮定して, $a \equiv \sigma$ & $a \not\models^* \forall y B(y)$ とする
 $a \in \mathbb{Q} \cap [a_0, \infty)$ を求める.

場合 1. $\sigma \in \mathbb{Q}$ のとき. σ が求める a である.

場合 2. $\sigma \notin \mathbb{Q}$ のとき. このときは $\sigma \in S$ より

$$(1) \quad a_0 \not\models^* \exists x (\exists z A(z) \supset A(x))$$

とあるある U -例 $\exists x A(x)$ について $\sigma = \inf \{ a \in \mathbb{Q} \cap [a_0, \infty) \mid a \not\models^* \exists x A(x) \}$ とする. ここで

$$(2) \quad a_0 \not\models^* \exists y (B(y) \supset \exists z A(z))$$

を示そう. (2) を否定すると, ある $u \in U$ に対して $a_0 \not\models^* B(u) \supset \exists z A(z)$. この u に対して仮定から $a \equiv \sigma$ & $a \not\models^* B(u)$ とある $a \in \mathbb{Q} \cap [a_0, \infty)$ をとると, $a \equiv \sigma$ & $a \not\models^* \exists z A(z)$, よって $\sigma = a \in \mathbb{Q}$ となってしまふ. したがって (2) が成り立つ. 補題の仮定より

$$a_0 \not\models^* (\forall y B(y) \supset \exists x A(x))$$

$$\supset \exists x (\exists z A(z) \supset A(x)) \vee \exists y (B(y) \supset \exists z A(z))$$

だから, (1), (2) より $a_0 \not\models^* \forall y B(y) \supset \exists x A(x)$. したがってある $a \in \mathbb{Q} \cap [a_0, \infty)$ に対して $a \not\models^* \forall y B(y)$ & $a \not\models^* \exists x A(x)$. この a が求めるものである. \square

1°) の (ii) の証明. $a_0 \not\models^* \exists x (\exists z A(z) \supset A(x))$ と仮定する. $a_0 \not\models^* \exists x (\exists z A(z) \supset A(x))$ とあるから,

$$\sigma_0 \equiv \inf\{a \in \mathbb{Q} \cap [a_0, \infty) \mid a \not\models^* \exists x A(x)\} \in S.$$

そこで,

$$(3) \quad \sigma_0 = \max\{\sigma \in S \mid \sigma \not\models^* \exists x A(x)\},$$

つまり

$$(3a) \quad \sigma \in S, \sigma \not\models^* \exists x A(x) \implies \sigma \leq \sigma_0, \text{ および}$$

$$(3b) \quad \sigma_0 \not\models^* \exists x A(x)$$

を示せばよい。まず (3a) を示すために $\sigma \in S$ と $\sigma_0 < \sigma$ とす

ると, σ_0 の定義より $\exists a \in \mathbb{Q} \cap [a_0, \infty) [a < \sigma \ \& \ a \not\models^*$

$\exists x A(x)]$, したがって $\sigma \not\models^* \exists x A(x)$. したがって (3b) を示すた

めに (3b) を否定する。するとある $u \in U$ に対して $\sigma_0 \not\models^*$

$A(u)$. ところがこの u に対して

$$(4) \quad a_0 \not\models^* \exists z A(z) \supset A(u),$$

したがって $a_0 \not\models^* \exists x (\exists z A(z) \supset A(x))$ となって仮定に反

し, (3b) が成り立つ。そこで (4) を示すために, $\sigma \in S, a_0$

$\leq \sigma, \sigma \not\models^* \exists z A(z)$ と仮定する。するとある $a \in \mathbb{Q} \cap [a_0, \infty)$

に対して $a \leq \sigma \ \& \ a \not\models^* \exists z A(z)$. したがって σ_0 の定義よ

り $\sigma_0 \leq a \leq \sigma$ となるから $\sigma \not\models^* A(u)$. ところで (4) も証明さ

れた。□

2°) の証明. 補題 3 より “M6 の \implies ”, つまり

$$\alpha \not\models^* \exists x A(x) \implies \exists u \in U [\alpha \not\models^* A(u)],$$

すなわち

$$\begin{aligned} & \forall \sigma \in S [\alpha \leq \sigma \Rightarrow \sigma \vDash \exists x A(x)] \\ & \Rightarrow \exists u \in U \forall \sigma \in S [\alpha \leq \sigma \Rightarrow \sigma \vDash A(u)] \end{aligned}$$

を示せばよい。そこで $\forall \sigma \in S [\alpha \leq \sigma \Rightarrow \sigma \vDash \exists x A(x)]$ と仮定して $\forall \sigma \in S [\alpha \leq \sigma \Rightarrow \sigma \vDash A(u)]$ となる $u \in U$ を求める。

場合1. $\alpha \vDash \exists x (\exists z A(z) \supset A(x))$ のとき。このときはある $u \in U$ に対して $\alpha \vDash \exists z A(z) \supset A(u)$ となるが、この u が求めるものである。

場合2. $\alpha \not\vDash \exists x (\exists z A(z) \supset A(x))$ のとき。1°) の (ii) より $\sigma_0 = \max \{ \sigma \in S \mid \sigma \not\vDash \exists x A(x) \}$ とする。 $\sigma_0 \not\vDash \exists x A(x)$ だから仮定より $\sigma_0 < \alpha$ 。したがってある $\sigma_1 \in S$ に対して $\sigma_0 < \sigma_1 < \alpha$ 。 σ_0 のとり方より $\sigma_1 \vDash \exists x A(x)$ 、したがってある $u \in U$ に対して $\sigma_1 \vDash A(u)$ 。この u が求めるものである。 \square

定理2°) の必要性の部分の証明。対偶を示すため、論理式 A が $LJ + D + C$ で証明不可能だと仮定する。

定理1°) の必要性の部分の証明を事実1の“(u) \Rightarrow (c)”の証明にまどさかのぼってやり直せば、あるモデル $(\mathcal{Q}, U, \vDash^*)$ において、公理型 C に属するすべての公理は真になるが A は真にはならないことがわかる。したがってある $\alpha_0 \in \mathcal{Q}$

と A のある U -例 A' について $a_0 \not\models^* A'$.

\mathcal{F}^* を $\mathbb{Q} \cap [a_0, \infty)$ の元と論理式の U -例との間の関係に制限したものを改めて \mathcal{F}^* とすれば, $(\mathbb{Q} \cap [a_0, \infty), U, \mathcal{F}^*)$ は公理型 C に属するすべての公理を真にするモデルになり, さらに $a_0 \not\models^* A'$ となる. — このことはよく知られた事実だが, $(\mathbb{Q}, U, \mathcal{F}^*)$ と $\mathbb{Q} \cap [a_0, \infty)$, さらに $\mathbb{Q} \cap [a_0, \infty)$ から \mathbb{Q} への標準的単射に対して補題 1 を適用することによっても示される.

したがって補題 5 の 1°) のモデル (S, U, \mathcal{F}^0) に関して $a_0 \not\models^0 A'$, さらに 2°) のモデル $([a_0, \infty), U, \mathcal{F})$ に関して $a_0 \not\models A'$ となる.

そして \mathcal{F} を \mathbb{R} の元と論理式の U -例との間の関係に, a_0 より小さい元は a_0 と同じ働きをするように, 拡張したものを改めて \mathcal{F} とすれば, $(\mathbb{R}, U, \mathcal{F})$ はモデルになり, さらに $a_0 \not\models A'$ となる. — このこともよく知られた事実だが, $([a_0, \infty), U, \mathcal{F})$ と \mathbb{R} , さらに α に $\max\{\alpha, a_0\}$ を対応させる \mathbb{R} から $[a_0, \infty)$ への写像に対して補題 1 を適用することによっても示される.

したがって, A は \mathbb{R} を基底とするあるモデルで真ではない. \square

文 献

- [1] Horn, A., Logic with truth values in a linearly ordered Heyting algebra, *J. Symbolic Logic*, 34(1969), 395-408.
- [2] Ono, H., Kripke models and intermediate logics, *Publ. RIMS Kyoto Univ.*, 6(1970/71), 461-476.
- [3] -----, Model extension theorem and Craig's interpolation theorem for intermediate predicate logics, *Rep. Math. Logic*, 15(1983), 41-58.
- [4] Umezawa, T., On logics intermediate between intuitionistic and classical predicate logic, *J. Symbolic Logic*, 24(1959), 141-153.