数理解析研究所講究録
588巻 1986年 1-8

Ultrafilters over $P_\kappa\lambda$

福島高専 阿部吉弘 (Yoshihiro Abe)

κを regular cardinal とする時、κ上の filter U について、次の(1)〜(4)が同値である事は良く知られている。

(1) U is weakly normal

(2) $U \subset V \wedge V$ is a filter $\longrightarrow V$ is weakly normal

(3) $\{X_\alpha \mid \alpha < \kappa\} \subset U^+ \wedge \forall \alpha < \beta (X_\beta \subset X_\alpha) \longrightarrow \underset{\alpha}{\triangle} X_\alpha \in U^+$

(4) U is a p-point $\wedge U \supset C_\kappa$ = the club filter on κ

また κ上の countably complete uniform ultrafilter の RK-ordering については、

U: weakly normal $\longleftrightarrow U$: minimal.

ここでは、$P_\kappa\lambda$ 上の fine filter U について、同様な事が成立するかどうか調べてみる。以下、$\kappa \leq \lambda$ は cardinals で、κ は regular と仮定する。

§1 Easy observations

Def. 1.1 Uは $P_\kappa\lambda$上の filter とする。

(i) U is fine $\underset{\Delta}{\leftrightarrow} \forall \alpha < \lambda (\{x \mid \alpha \in x\} \in U)$

(ii) U is a fine measure $\underset{\Delta}{\longleftrightarrow}$ U is a κ-complete fine ultrafilter.

(iii) U is weakly normal $\underset{\Delta}{\longleftrightarrow}$ $\forall f : P_\kappa\lambda \to \lambda\ (\{x \mid f(x) \in x\} \in U \longrightarrow \exists \alpha < \lambda (\{x \mid f(x) \le \alpha\} \in U))$.

(iv) U is a p-point $\underset{\Delta}{\longleftrightarrow}$ $\forall f$: unbounded $(\mathrm{mod}\ U)$ $\exists X \in U^+$ $\forall \alpha < \lambda\ \exists \beta < \lambda\ (f^{-1}(\{\alpha\}) \cap X \subset P_\kappa\beta)$.

Proposition 1.2. 次の (1)〜(3) は同値

(1) U is weakly normal.

(2) $V \supset U \longrightarrow V$ is weakly normal

(3) $\{X_\alpha \mid \alpha < \lambda\} \subset U^+ \wedge (\alpha < \beta \longrightarrow X_\beta \subset X_\alpha) \longrightarrow \underset{\alpha}{\Delta} X_\alpha \in U^+$.

(proof) (1)$\to$(2) は明らか．まず，(2)$\to$(3) を示す．V を U と $\{X_\alpha \mid \alpha < \lambda\}$ から generate される filter とすると V は weakly normal である。$\underset{\alpha}{\Delta} X_\alpha \notin V^+$ とすると，

$$(\underset{\alpha}{\Delta} X_\alpha)^c = \{x \mid \exists \alpha \in x\ (x \notin X_\alpha)\} \in V.$$

従って，$\exists f\ (\{x \mid f(x) \in x \wedge x \notin X_{f(x)}\} \in V)$。$f$ に V の weak-normality を用いて，$\exists \alpha < \lambda (\{x \mid f(x) \le \alpha\} \in V)$.

$f(x) \le \alpha \longrightarrow X_\alpha \subset X_{f(x)}$ であるから．$\{x \mid x \notin X_\alpha\} \in V$ となり．$X_\alpha \in V^+$ に反する． $\therefore \underset{\alpha<\lambda}{\Delta} X_\alpha \in V^+ \subset U^+$.

次に (3)$\to$(1) を示す。 $X = \{x \mid f(x) \in x\} \in U$ とする。$\forall \alpha < \lambda\ (X_\alpha = \{x \mid f(x) > \alpha\} \in U^+)$ とする。 $\alpha < \beta \longrightarrow X_\beta \subset X_\alpha$ だ

から、$\underset{\alpha}{\triangle} X_\alpha \in \mathcal{U}^+$。 $x \in \underset{\alpha}{\triangle} X_\alpha$ とすると、$f(x) \in X_\alpha$ for $\alpha \in x$
つまり、$\forall \alpha \in x (f(x) > \alpha)$ となり、$f(x) \in x$ に反する。 ⊠

Proposition 1.3.

(i) $\mathcal{U}$ is weakly normal $\longrightarrow$ $\mathcal{U}$ is a p-point.

(ii) $\mathcal{U}$ is a p-point $\wedge$ $\mathcal{U} \supset C_{\kappa,\lambda}$ = the club. filter on $P_\kappa\lambda$ $\longrightarrow$ $\mathcal{U}$ is weakly normal.

(Proof). (i) f: unbounded (mod. $\mathcal{U}$) とする。即ち、$\forall \alpha < \lambda \, (X_\alpha = \{x \mid f(x) > \alpha\} \in \mathcal{U}^+)$ である。$\alpha < \beta$ なら、$X_\beta \subset X_\alpha$ だから、仮定により (1.2. により) $X = \triangle X_\alpha \in \mathcal{U}^+$。

$X \cap f^{-1}(\{\beta\}) = \{x \mid \forall \alpha \in x (f(x) > \alpha) \wedge f(x) = \beta\} \subset \{x \mid \sup(x) \leq \beta\}$。

(ii) f を $P_\kappa\lambda$ 上の regressive function とする。
$\forall \alpha < \lambda (\{x \mid f(x) > \alpha\} = X_\alpha \in \mathcal{U}^+)$ とすると、f は unbounded (mod. $\mathcal{U}$) であり、$\mathcal{U}$ は p-point だから、$\exists X \in \mathcal{U}^+ \, \forall \alpha \, \exists \beta < \lambda (X \cap f^{-1}(\{\alpha\}) \subset P_\kappa\beta)$ となる。しかし、$\mathcal{U} \supset C_{\kappa,\lambda}$ から、X は stationary で、$\exists \alpha < \lambda \, \exists Y \subset X$ (Y is stationary $\wedge$ $Y \subset f^{-1}(\{\alpha\})$) となって矛盾する。 ⊠

§2. $C_{\kappa,\lambda}$ を含まない weakly normal filter の存在。

Prop. 1.3. (ii) の逆が成立しない場合を示し、$\lambda = \kappa$ の時と、$\lambda > \kappa$ の時で状況が異なることを示す。

Lemma 2.1. $\bar{U}$を κ-complete filter on κ, $\mathcal{U}_\alpha$ を weakly normal filter on $P_\alpha\lambda$ とする。$\mathcal{U}$ を次のように定める。

$X \in \mathcal{U} \longleftrightarrow \{\alpha<\kappa \mid X\cap P_\alpha\lambda \in \mathcal{U}_\alpha\}\in \bar{U} \wedge X\subset P_\kappa\lambda$

この時, $cf(\lambda)\neq\kappa$ ならば, $\mathcal{U}$ は weakly normal.

(この lemma は, [ ] の proposition 2.4. の拡張になっている。また, $cf(\lambda)=\kappa$ の時, $\mathcal{U}$は weakly normal にならないことを, 最近になって証明した。)

(proof) (i) $cf(\lambda)>\kappa$ の時. f を $P_\kappa\lambda$ 上の regressive function とする. $\forall\alpha<\kappa\ \exists\gamma_\alpha<\lambda\,(\{x\mid f(x)\le\gamma_\alpha\}\in\mathcal{U}_\alpha)$ であるから, $\gamma=\sup_{\alpha<\kappa}\gamma_\alpha$ とすれば, $\{x\in P_\kappa\lambda\mid f(x)\le\gamma\}\in\mathcal{U}$ で, $\gamma<\lambda$ なことは, $cf(\lambda)>\kappa$ から得られる。

(ii) $cf(\lambda)<\kappa$ の時. $\mathcal{U}_\alpha$ は weakly normal だから,
$\exists\gamma_\alpha<\lambda\ (\{x\in P_\alpha\lambda\mid f(x)\le\gamma_\alpha\}\in\mathcal{U}_\alpha)$　$\{\lambda_\xi\mid\xi<\delta<\kappa\}$ を λ の cofinal increasing sequence とする。$\forall\alpha<\kappa\ \exists\xi_\alpha<\delta\,(\gamma_\alpha\le\lambda_{\xi_\alpha})$ より, $\{x\in P_\alpha\lambda\mid f(x)\le\lambda_{\xi_\alpha}\}\in\mathcal{U}_\alpha$.　$\delta<\kappa$ だから,
$\exists\xi<\delta\,(A=\{\alpha<\kappa\mid\xi_\alpha=\xi\}\in\bar{U})$.　$\alpha\in A$ の時,
$\{x\in P_\alpha\lambda\mid f(x)\le\lambda_\xi\}\in\mathcal{U}_\alpha$ だから, $\{x\mid f(x)\le\lambda_\xi\}\in\mathcal{U}$. ☒

Lemma 2.2　$\lambda^{<\kappa}=\lambda$, $A\subset\kappa$ とする。この時,
$\exists C$: c.ub $\subset P_\kappa\lambda$ $\forall\alpha\in A-\lim(A)\,(C\cap P_\alpha\lambda\notin\mathcal{U}_\alpha)$.

(この C としては, strongly closed unbounded, i.e.

Cは closed unbounded で $\forall X \subset C(|X|<\kappa \longrightarrow \bigcup X \in C)$. なものがとれる。また, $\lim(A)=\{\alpha \mid \alpha$ is a limit point of $A\}$である)

(proof). $\{x_\xi \mid \xi<\lambda\}$を $P_\kappa\lambda$ の enumeration とする。α_ξ を, the least element of $A>|x_\xi|$ とする。$\forall x_\xi \exists y_\xi \supset x_\xi(|y_\xi| \geq \alpha_\xi)$

$C=\underset{\xi<\lambda}{\triangle}\langle \hat{y}_\xi \mid \xi<\lambda\rangle$ は strongly closed unbounded となる

([ ] の Theorem 2.1. 参照。 $\hat{y}_\xi=\{x \in P_\kappa\lambda \mid y_\xi \subset x\}$).

$\alpha \in A-\lim(A)$ とすると, $\exists x_\xi \in P_\alpha\lambda\ (\alpha=\alpha_\xi)$.

$C \cap P_\alpha\lambda \in \mathcal{U}_\alpha$ とすると,

$\{x \in P_\alpha\lambda \mid x \in C, \xi \in x\} \in \mathcal{U}_\alpha$ だから,

$\{x \in P_\alpha\lambda \mid x \in \hat{y}_\xi\} \in \mathcal{U}_\alpha$. しかし, $x \in \hat{y}_\xi \longrightarrow x \supset y_\xi \longrightarrow$ $|x| \geq |y_\xi| \geq \alpha_\xi=\alpha$ で $x \in P_\alpha\lambda$ に矛盾する.

$\therefore C \cap P_\alpha\lambda \notin \mathcal{U}_\alpha$ ☒

この proof で, 実際は, $C \cap P_\alpha\lambda$ は unbounded in $P_\alpha\lambda$ でない。$\bigcup C=\lambda$ ですらない事がわかる。

Corollary 2.3. $\lambda^{<\kappa}=\lambda$, $A \subset \kappa$, $|A|=\kappa$ とする。

$\exists C$: strongly closed unbounded $\subset P_\kappa\lambda$ $\forall \alpha \in A-\lim(A)$

($C \cap P_\alpha\lambda$ is not unbounded in $P_\alpha\lambda$.)

Theorem 2.4. $\exists \mathcal{U}$: weakly normal filter ($C_{\kappa,\lambda} \notin \mathcal{U}$)

(proof) 例えば, κ を the least measurable limit of strongly compact cardinals とすれば良い。 ☒

Theorem 3 は，$\forall U$: normal ($U \supset C_{\kappa,\lambda}$) である事と比べると興味深い．

§3. RK-ordering on fine measures on $P_\kappa\lambda$

次の事が知られている．([ ])

(i) f を least unbounded function (mod. U) とする時，f is injective on a set of measure one なら，U は minimal である．

(ii) $cf(\lambda) < \kappa$ or λ is regular の時，normal measure on $P_\kappa\lambda$ は minimal.

weakly normal filter に関係して，次の事がわかる．

Proposition 3.1. $\forall U\, \exists V \leq_{RK} U$ (V is weakly normal)

(proof). $f: P_\kappa\lambda \longrightarrow \lambda$ を $[f]_U = \sup j''\lambda$ となる function とする。ここで $j: V \longrightarrow M \simeq V^{P_\kappa\lambda}/U$ である． $g: P_\kappa\lambda \longrightarrow P_\kappa\lambda$ を $g(x) = x \cap f(x)$ で定める． U が fine であり、f の定義から，$\{x \mid \alpha \in g(x)\} \in U$ が、すべての $\alpha < \lambda$ に対して成り立つので，$V = g_*(U)$ ($X \in V \underset{\Delta}{\Leftrightarrow} g^{-1}(X) \in U$) も fine measure である． $\{x \mid F(x) \in x\} \in V$ とすると、$\{x \mid F(g(x)) \in f(x)\} \in U$ f の定義から $\exists \alpha < \lambda$ $\{x \mid F(g(x)) \leq \alpha\} \in U$. したがって．$\{x \mid F(x) \leq \alpha\} \in V$ となるので V は weakly normal. ☒

また，$f_*(U)$ が fine measure になる為には，すべての $\alpha<\lambda$ について $\{x \mid \alpha \in f(x)\} \in U$ でなければならないことから次の事は明らかである。

Proposition 3.2　U, V が normal measure の時は，$U \simeq_{Rk} V$ とはならない。

(proof)　$V = f_*(U)$ とすると，$\{x \mid f(x) \supset x\} \in U$.　$V \simeq U$ とすれば，$U = f^{-1}_*(V)$。　☒

Open problem 3.3　(i) $\kappa \leq cf(\lambda) < \lambda$ の時，normal measure on $P_\kappa\lambda$ は minimal か？

(ii) U, V は fine measure で $U, V \supset C_{\kappa,\lambda}$ とする．$U \neq V$ が言えるか．（$\lambda = \kappa$ の時は Yes.）

最近，$cf(\kappa) < \lambda$ の時，U が minimal ならば weakly normal であることがわかったが，すべての weakly normal measure が minimal かどうかはわかっていない。

References

[1] Y. Abe, Some results concerning strongly compact cardinals. J. Symbolic Logic (to appear)

[2] D. M. Carr, *The minimal normal filter on $P_\kappa\lambda$*, Proc. Amer. Math. Soc., vol. 86 (1982), 316–320

[3] A. Kanamori, *Weakly normal filters and irregular ultra-filters*, Trans. Amer. Math. Soc. vol. 220 (1976), 393–399

[4] J. Ketonen, *Strong compactness and other cardinal sins*, Ann. Math. Logic. vol. 5 (1972), 47–76

[5] T. K. Menas, *On strong compactness and supercompactness*, Ann. Math. Logic. vol. 7 (1974), 327–359