数理解析研究所講究録
589巻 1986年 32-51

楕円単数と2変数p-進L-関数

九大理 小塚和人 (Kazuhito Kozuka)

§1. 序

pを奇素数とし，各整数$n \geq 0$に対し，$\zeta_{p^{n+1}}$を1の原始p^{n+1}乗根とする。$\mathbb{Q}_p$をp進有理数体，U_nを$\mathbb{Q}_p(\zeta_{p^{n+1}})$の主単数群とする。$C_n$を$\mathbb{Q}(\zeta_{p^{n+1}})$の円単数で，$U_n$に属するもの全体のなす群とし，$C_n$の$U_n$における閉包を$\overline{C}_n$と書き，$Y_\infty = \varprojlim U_n/\overline{C}_n$とおく。ここに逆極限は，ノルムに関するものである。このとき，Y_∞は自然に岩沢代数$\mathbb{Z}_p[[T]]$上の加群になり，$\mathrm{Gal}(\mathbb{Q}_p(\zeta_p)/\mathbb{Q}_p)$の自明でない各偶指標$\kappa$に対し，$Y_\infty$の$\kappa$-固有空間のcharacteristic power seriesは，p進L-関数の補間級数と$\mathbb{Z}_p[[T]]$において同伴になる。これはColeman power seriesを用いると，次の方針で証明される。

$\zeta_{p^{n+1}}$ $(n=0,1,2,\cdots)$を，$\zeta_{p^{n+1}}^p = \zeta_{p^n}$となるようにとる。このとき，pと素な$a \in \mathbb{Z}$に対し，$(\zeta_{p^{n+1}}^a - 1/\zeta_{p^{n+1}} - 1)_{n=0}^{\infty} \in \varprojlim_{(\mathrm{Norm})} \mathcal{O}^\times_{\mathbb{Q}_p(\zeta_{p^{n+1}})}$となる。ここに，$\mathcal{O}^\times_{\mathbb{Q}_p(\zeta_{p^{n+1}})}$は，$\mathbb{Q}_p(\zeta_{p^{n+1}})$の単数群である。$C_a(T) = (1+T)^a - 1/T$とおくと，$\zeta_{p^{n+1}}^a - 1/\zeta_{p^{n+1}} - 1 = C_a(\zeta_{p^{n+1}} - 1)$ $(\forall n \geq 0)$。即ち，$C_a(T)$は，乗

法的形式群G_mの Tate-module $\varprojlim (G_m)_{p^{n+1}}$ の生成元 $(\zeta_{p^{n+1}}-1)_{n=0}^{\infty}$ に関する $(\zeta_{p^{n+1}}^{a}-1/\zeta_{p^{n+1}}-1)_{n=0}^{\infty}$ の Coleman power series である．このとき，parameter $Z=\log(1+T)$ による対数微分 $d/dZ \log C_a(T)$ の係数に，Bernoulli 数が現われる．従って，巾級数 $d/dZ \log C_a(T)$ と，$Gal(\mathbb{Q}_p(\mu_p)/\mathbb{Q}_p)$ の自明でない各偶指標 k に付随した Γ-変換の補間級数から，Cyclotomic な p 進 L-関数の補間級数が容易に構成され，さらに Y_∞ の k-固有空間の characteristic power series がこの補間級数であることも導かれる．

上記の内容の elliptic な場合での analogy は，1変数の場合については Coates-Wiles [1]，Goldstein [3] 等で，2変数の場合の結果は，Yager [7] で述べられている．

ここでは，Yager [7] における楕円単数の定義を若干修正して，改良された結果を述べる．主結果は，§6，§7 で紹介するが，これは，Goldstein [3] の定理 3.10.1) と定理 3.11.1) の2変数の場合における analogy に相当する．

§2. 記法

K を複素数体 $\mathbb{C}$ に含まれる類数1の虚2次体，$-d_K$ を，K の判別式，$\mathcal{O}$ を K の整数環とする．E を K 上定義された楕円曲線で，$\mathcal{O}$ による虚数乗法を持つものとし，ψ_E を E の K 上の量指標，f を ψ_E の導手とする．E の Weierstrass model

(2.1) $$y^2=4x^3-g_2x-g_3$$

を，$g_2, g_3 \in \mathcal{O}$で，(2.1)の判別式が$6f$の素因子のみで割りきれるように固定する．$\wp(z)$を，(2.1)に関するWeierstrass $\wp$-関数，Lを$\wp(z)$の周期格子とし，$L=\Omega_\infty\mathcal{O}$なる$\Omega_\infty\in\mathcal{O}$を固定する．$\xi(z)=(\wp(z),\wp'(z))$とおく．$\mathcal{O}$の元$\alpha$を，$E$の自己準同型$\xi(z)\mapsto\xi(\alpha z)$ともみなすことにより，$\mathcal{O}$と$\mathrm{End}(E)$とを同一視する．

Kの素イデアル$\mathfrak{p}$を，$(\mathfrak{p}, 6d_K Nf)=(1)$かつ，$\mathfrak{p}$の絶対次数が1となるようにとり，$p=N\mathfrak{p}$とおく．$(p)$は$K$で完全分解する：$(p)=\mathfrak{p}\mathfrak{p}^*$．$\pi=\psi_E(\mathfrak{p})$，$\pi^*=\psi_E(\mathfrak{p}^*)$とおく．$\pi$，$\pi^*$はそれぞれ，$\mathfrak{p}$，$\mathfrak{p}^*$の生成元である．各$\alpha\in\mathcal{O}$に対し，$E_\alpha=\ker(E\xrightarrow{\alpha}E)$と書くことにし，$0\leq m,n\in\mathbb{Z}$に対し，

$$F_m=K(E_{\pi^{*m+1}}),\quad K_n=K(E_{\pi^{n+1}}),\quad K_{n,m}=F_m(E_{\pi^{n+1}}),$$

$$F_\infty=\bigcup_{m\geq 0}F_m,\qquad K_\infty=\bigcup_{n,m\geq 0}K_{n,m}$$

とおく．このとき$\mathfrak{p}$は，拡大F_∞/Kで不分岐，$\bigcup_{n\geq 0}K_n/K$で完全分岐する．さらに，$\mathfrak{p}$の上にあるF_∞の素イデアルの個数は有限である．

$\mathfrak{p}$の上にあるF_∞の素イデアル$\mathfrak{P}_\infty$を1つ固定し，$\mathfrak{P}_m=\mathfrak{P}_\infty\cap F_m$とおく．$\mathfrak{p}$の上にある$F_m$の各素イデアル$\mathfrak{v}$に対し，$\mathcal{F}_m^{(\mathfrak{v})}$を$F_m$の$\mathfrak{v}$による完備化とし，$\mathcal{F}_m^{(\mathfrak{v})}$の整数環を，$\mathcal{O}_m^{(\mathfrak{v})}$と書く．$\mathfrak{v}$の上にある$K_{n,m}$の素イデアルは唯一つである．この素イデアルによる$K_{n,m}$の完備化を，$\mathcal{K}_{n,m}^{(\mathfrak{v})}$と書く．特に，$\mathfrak{v}=\mathfrak{P}_m$のときは，添字の$\mathfrak{v}$を省略し，単に$\mathcal{F}_m$，$\mathcal{O}_m$，$\mathcal{K}_{n,m}$と書くことにする．$K_{\mathfrak{p}}$を$K$

の$\mathfrak{p}$による完備化，$\mathcal{O}_{\mathfrak{p}}$を$K_{\mathfrak{p}}$の整数環とし，以下$\mathcal{O}_{\mathfrak{p}}$を$\mathbb{Q}_p$の整数環$\mathbb{Z}_p$と同一視する．

$\tau_{\mathfrak{p}}=(\mathfrak{p}, F_\infty/K)\in Gal(F_\infty/K)$とおく．$\mathcal{F}_\infty=\bigcup_{m\geq 0}\mathcal{F}_m$とおくと，$\tau_{\mathfrak{p}}$は拡大$\mathcal{F}_\infty/K_{\mathfrak{p}}$のFrobenius同型を導入する．この同型も$\tau_{\mathfrak{p}}$と書くことにする．

$G_\infty=Gal(K_\infty/K)$, $\Gamma=Gal(K_\infty/K_{0,0})$, また，$E_{\pi^\infty}=\bigcup_{n\geq 0}E_{\pi^{n+1}}$, $E_{\pi^{*\infty}}=\bigcup_{m\geq 0}E_{\pi^{*m+1}}$とおく．このとき，$G_\infty$の$E_{\pi^\infty}$及び$E_{\pi^{*\infty}}$への作用を表わす標準的な指標$\kappa_1: G_\infty\to\mathbb{Z}_p^\times$及び$\kappa_2: G_\infty\to\mathbb{Z}_p^\times$が定義され，$(\kappa_1,\kappa_2): G_\infty\xrightarrow{\sim}\mathbb{Z}_p^\times\times\mathbb{Z}_p^\times$, $\Gamma\cong(1+p\mathbb{Z}_p)\times(1+p\mathbb{Z}_p)$となる．さらに，$G_\infty=\Gamma\times\Delta$と分解される．ここに$\Delta$は位数$p-1$の巡回群2個の直積で，自然に$Gal(K_{0,0}/K)$と同一視される．$\chi_1=\kappa_1|_\Delta$, $\chi_2=\kappa_2|_\Delta$とおく．このとき，$\{\chi_1,\chi_2\}$は$Hom(\Delta,\mathbb{Z}_p^\times)$を生成する．

任意の$\mathbb{Z}_p[\Delta]$-加群Aと，$(i_1,i_2)\in(\mathbb{Z}/(p-1)\mathbb{Z})^2$に対し，$A^{(i_1,i_2)}$を$A$の$\chi_1^{i_1}\chi_2^{i_2}$-固有空間とする．$A$は，

$$A=\bigoplus_{(i_1,i_2)\in(\mathbb{Z}/(p-1)\mathbb{Z})^2}A^{(i_1,i_2)} \tag{2.2}$$

と分解される．

$\Lambda=\mathbb{Z}_p[[T_1,T_2]]$とおく．$1+p\mathbb{Z}_p$の位相的生成元$u$を固定し，$\gamma_1,\gamma_2\in\Gamma$を，$\kappa_1(\gamma_1)=\kappa_2(\gamma_2)=u$, $\kappa_1(\gamma_2)=\kappa_2(\gamma_1)=1$を満たす$\Gamma$の元とする．このとき，$\Gamma$は$\mathbb{Z}_p$上$\{\gamma_1,\gamma_2\}$によって生成される．$B$を$\Gamma$が連続に作用するcompactな$\mathbb{Z}_p$-加群とすると，$B$には，

$$(1+T_1)x=\gamma_1 x,\quad (1+T_2)x=\gamma_2 x\quad (\forall x\in B)$$

によって，Λ－加群の構造が一意に定められる．

$\omega_{n,1}=(1+T_1)^{p^n}-1$，$\omega_{m,2}=(1+T_2)^{p^m}-1$ とおく．

ガロア群G_∞は，環$\prod_{v|\mathfrak{p}} K_{n,m}^{(v)}$，$\prod_{v|\mathfrak{p}} \mathfrak{F}_m^{(v)}$に自然に作用する．$K_{n,m}$，$F_m$は，これらの環に diagonal に埋め込まれる．$\mathcal{O}_m=\prod_{v|\mathfrak{p}} \mathcal{O}_m^{(v)}$とおく．

$\mathcal{U}_{n,m}'^{(v)}$，$\mathcal{U}_{n,m}^{(v)}$をそれぞれ$K_{n,m}^{(v)}$の単数群，主単数群とし，

$$\mathcal{U}_{n,m}'=\prod_{v|\mathfrak{p}} \mathcal{U}_{n,m}'^{(v)},\quad \mathcal{U}_{n,m}=\prod_{v|\mathfrak{p}} \mathcal{U}_{n,m}^{(v)}$$

$$\mathcal{U}_\infty'=\varprojlim \mathcal{U}_{n,m}',\quad \mathcal{U}_\infty=\varprojlim \mathcal{U}_{n,m}$$

とおく。ここに，逆極限はノルムに関するものである．このとき，群環$\mathbb{Z}_p[G_\infty]$は自然に$\mathcal{U}_\infty$に作用し，従って$\mathcal{U}_\infty$は compact なΓ-加群かつΛ-加群になる。

$\hat{E}$を，Eの演算を parameter t：

(2.3) $$t=-2x/y=-2\wp(z)/\wp'(z)=\varepsilon(z)$$

によって展開して得られる形式群とする．zを加法的形式群G_aの parameter とみなすと，$\varepsilon(z)$は$\hat{E}$の exponential map となる．$\lambda:\hat{E}\xrightarrow{\sim}G_a$を$\hat{E}$の logarithm とする．

$\mathfrak{F}_\infty$の代数閉包の完備化を$\mathbb{C}_p$と書き，ord_pを，$\mathrm{ord}_p(p)=1$と正規化した$\mathbb{C}_p$の加法的付値とする．

Kの整イデアル$\mathfrak{g}$に対し，$\mathfrak{g}\cap\mathbb{Z}$の正の生成元を$k_\mathfrak{g}$と書くことにする。また，$Cl(\mathfrak{g})$をKの$\mathfrak{g}$を法とする Strahl 類群，$R_\mathfrak{g}$を$\mathfrak{g}$を法とするKの Strahl 類体とする．$\mathrm{Gal}(K_{n,m}/K)$の指標$\chi$

に対し，$\mathfrak{f}_\chi$ を $\ker\chi$ の固定体の K 上の導手とする．$\mathfrak{f}_\chi$ が $\mathfrak{g}$ を割り切るとき，χ は reciprocity map を経て，$Cl(\mathfrak{g})$ の ~~導手を~~ 指標を導入する．この指標を χ' と書くことにする．特に $\mathfrak{g}=\mathfrak{f}_\chi$ のとき，χ' は $Cl(\mathfrak{f}_\chi)$ の原始的指標になる．これを，$\tilde{\chi}$ と書くことにする．

§3．楕円単数

複素平面内の任意の格子 $\mathcal{L}$ に対し，

$$\sigma(z\mathcal{L}) = z\prod_{\substack{\omega\in\mathcal{L}\\ \omega\neq 0}}(1-z/\omega)\exp((z/\omega)+\tfrac{1}{2}(z/\omega)^2)$$

$$\theta(z,\mathcal{L}) = \Delta(\mathcal{L})\exp(-6g_2(\mathcal{L})z^2)\,\sigma(z\mathcal{L})^{12}$$

とおく．ここに，$\Delta(\mathcal{L})$ は $\mathcal{L}$ の判別式で，$g_2(\mathcal{L}) = \lim_{s\to 0^+}\sum_{\substack{\omega\in\mathcal{L}\\ \omega\neq 0}}\omega^{-2}|\omega|^{-2s}$ である．

K の任意の整イデアル $\mathfrak{a}$ に対し，

$$\Theta(z,\mathfrak{a}) = \theta(z,L)^{N\mathfrak{a}}/\theta(z,\mathfrak{a}^{-1}L)$$

とおく．$\Theta(z,\mathfrak{a})$ は，格子 L に関する楕円関数となる．

各 $(i_1,i_2)\in(\mathbb{Z}/(p-1)\mathbb{Z})^2$ に対し，$\mathfrak{f}$ と $\mathfrak{f}_{\chi_1^{i_1}\chi_2^{i_2}}$ の最大公約イデアルを $\mathfrak{f}^{(i_1,i_2)}$ と書き，K のイデアル $\mathfrak{c}^{(i_1,i_2)}$ を，$\mathfrak{f}\subseteq\mathfrak{c}^{(i_1,i_2)}\subseteq\mathfrak{f}^{(i_1,i_2)}$ となるように固定する．Yager〔7〕では，$\mathfrak{c}^{(i_1,i_2)}=\mathfrak{f}$ の場合が扱われた．ここでは，$\mathfrak{c}^{(i_1,i_2)}=\mathfrak{f}^{(i_1,i_2)}$ 及び $\mathfrak{c}^{(i_1,i_2)}=\mathfrak{f}$ の場合が後に重要になるが，しばらくこの制限を設けずに議論を進める．

$\mathfrak{c}^{(i_1,i_2)}$ の生成元 $c^{(i_1,i_2)}$ を固定し，$0\leq m,n\in\mathbb{Z}$ に対し，

$$F_m^{(i_1,i_2)} = F_m(E_{c^{(i_1,i_2)}}),\quad K_{n,m}^{(i_1,i_2)} = K_{n,m}(E_{c^{(i_1,i_2)}})$$

とおく．虚数乗法論により，

$R_{[(i_1,i_2)\mathfrak{g}^{*m+1}} \subseteq F_m^{(i_1,i_2)} \subseteq R_{\mathfrak{f}\mathfrak{g}^{*m+1}}$, $R_{[(i_1,i_2)\mathfrak{g}^{n+1}\mathfrak{g}^{*m+1}} \subseteq K_{n,m}^{(i_1,i_2)} \subseteq R_{\mathfrak{f}\mathfrak{g}^{n+1}\mathfrak{g}^{*m+1}}$

となる．$\rho_m^{(i_1,i_2)} = \Omega_\infty / c^{(i_1,i_2)}\pi^{*m+1}$ とおく．$B_m^{(i_1,i_2)}$を，Kの$\mathfrak{f}\mathfrak{g}^*$と素な整イデアルの集合で，$\{(\mathfrak{b}, F_m^{(i_1,i_2)}/K) ; \mathfrak{b} \in B_m^{(i_1,i_2)}\}$ が重複なく $\mathrm{Gal}(F_m^{(i_1,i_2)}/F_m)$ に一致するものとする．$\mathfrak{g}$を$6\mathfrak{p}\mathfrak{f}$と素なKの整イデアル全体の集合とする．各$\mathfrak{a} \in \mathfrak{g}$に対し，

$$\Lambda_m^{(i_1,i_2)}(z,\mathfrak{a}) = \prod_{\mathfrak{b}\in B_m^{(i_1,i_2)}} \Theta(z + \psi_E(\mathfrak{b})\rho_m^{(i_1,i_2)}, \mathfrak{a})$$

とおく．このとき，$\Lambda_m^{(i_1,i_2)}(z,\mathfrak{a})$は，$F_m$係数の$\wp(z)$と$\wp'(z)$の有理関数となり，$B_m^{(i_1,i_2)}$のとり方にはよらない．

$\mathcal{S} = \{\mu : \mathfrak{g} \to \mathbb{Z} \mid \mu(\mathfrak{a}) = 0$ for almost all $\mathfrak{a} \in \mathfrak{g}$, $\sum_{\mathfrak{a}\in\mathfrak{g}} (N\mathfrak{a}-1)\mu(\mathfrak{a}) = 0\}$ とおき，各$\mu \in \mathcal{S}$に対し，

$$\Theta(z;\mu) = \prod_{\mathfrak{a}\in\mathfrak{g}} \Theta(z,\mathfrak{a})^{\mu(\mathfrak{a})}, \quad \Lambda_m^{(i_1,i_2)}(z;\mu) = \prod_{\mathfrak{a}\in\mathfrak{g}} \Lambda_m^{(i_1,i_2)}(z,\mathfrak{a})^{\mu(\mathfrak{a})}$$

とおく．

$\tau_n = \Omega_\infty/\pi^{n+1}$, $u_n = \varepsilon(\tau_n)$ とおく．$\varepsilon_n \in \mathcal{O}$を $\varepsilon_n\pi^* \equiv 1 \pmod{\mathfrak{g}^{n+1}}$ なるものとする．このとき，$C_{n,m}'^{(i_1,i_2)} = \{\Lambda_m^{(i_1,i_2)}(\varepsilon_n^{m+1}\tau_n;\mu) \mid \mu \in \mathcal{S}\}$ とおくと，$C_{n,m}'^{(i_1,i_2)}$は，$K_{n,m}$の単数群のG_∞-部分群となる．

各$\mu \in \mathcal{S}$に対し，$\Lambda_m^{(i_1,i_2)}(z;\mu) \in F_m(\wp(z), \wp'(z))$ となるから，各$\sigma \in \mathrm{Gal}(F_\infty/K)$に対し，$\Lambda_m^{(i_1,i_2)\sigma}(z;\mu)$が定義される．

$$e_{n,m}^{(i_1,i_2)}(\mu) = \Lambda_m^{(i_1,i_2)\tau_{\mathfrak{g}}^{-n}}(\varepsilon_n^{m+1}\tau_n;\mu), \quad e^{(i_1,i_2)}(\mu) = (e_{n,m}^{(i_1,i_2)}(\mu))_{n,m\geq 0}$$

とおく．このとき，diagonal mapにより$C_{n,m}'^{(i_1,i_2)} \subseteq \mathcal{U}_{n,m}'$とみると，$e^{(i_1,i_2)}(\mu) \in \mathcal{U}_\infty'$となる．

一般に，$\beta=(\beta_{n,m}^{(\upsilon)})_{n,m\geq 0}\in\mathcal{V}_\infty'$ とすると，各 $0\leq m\in\mathbb{Z}$ 及び $\mathfrak{P}$ の上にある F_m の各素イデアル υ に対し，Coleman power series $C_{m,\beta}^{(\upsilon)}(T)\in\mathcal{O}_m^{(\upsilon)}[[T]]$ が存在して，$\beta_{n,m}^{(\upsilon)}=C_{m,\beta}^{(\upsilon)\tau_{\mathfrak{P}}^{-n}}(u_n)$ $(\forall n\geq 0)$ が成り立つ（[2], [7]）。$\mathcal{O}_m[[T]]=\prod_{\upsilon|\mathfrak{P}}(\mathcal{O}_m^{(\upsilon)}[[T]])$ と書く．これは，G_∞-加群になる．$C_{m,\beta}(T)=(C_{m,\beta}^{(\upsilon)}(T))_{\upsilon|\mathfrak{P}}\in\mathcal{O}_m[[T]]$ とおく．

定理3.1．各 $\mu\in\mathfrak{S}$ に対し，

$$C_{m,e^{(i_1,i_2)}(\mu)}(T)=\Lambda_m^{(i_1,i_2)}(\pi^{*-(m+1)}\lambda(T);\mu)$$

である．

§4．2変数Γ-変換

本節では，後で用いられる2変数Γ-変換の基本的性質を述べる．

$\mathcal{O}_{\mathbb{C}_p}$ を $\mathbb{C}_p$ の整数環，μ を $\mathbb{Z}_p^2$ 上の $\mathcal{O}_{\mathbb{C}_p}$-値 measure とする．このとき，$\mu$ に巾級数

(4.1) $\quad f_\mu(T_1,T_2)=\sum_{n,m\geq 0}\left(\int_{\mathbb{Z}_p^2}\binom{x_1}{n}\binom{x_2}{m}d\mu\right)T_1^nT_2^m\in\mathcal{O}_{\mathbb{C}_p}[[T_1,T_2]]$

が対応し，対応 $\mu\mapsto f_\mu$ は，$\mathbb{Z}_p^2$ 上の $\mathcal{O}_{\mathbb{C}_p}$-値 measures 全体から，$\mathcal{O}_{\mathbb{C}_p}[[T_1,T_2]]$ への全単射になる．$f(T_1,T_2)\in\mathcal{O}_{\mathbb{C}_p}[[T_1,T_2]]$ に対し，f に対応する measure を μ_f と書くことにする．

$x\in\mathbb{Z}_p^\times$ は，$x=\omega(x)\langle x\rangle$ と一意に分解される．ここに $\omega(x)$ は，1の $p-1$ 乗根，$\langle x\rangle\equiv 1\pmod p$ である．$l(x)\in\mathbb{Z}_p$ を，$\langle x\rangle=u^{l(x)}$ なる $\mathbb{Z}_p$ の元とする．

$(i_1,i_2)\in(\mathbb{Z}/(p-1)\mathbb{Z})^2$，$f\in\mathcal{O}_{\mathbb{C}_p}[[T_1,T_2]]$ に対し，Γ-変換

$$\Gamma_f^{(i_1,i_2)} : \mathbb{Z}_p^2 \longrightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{C}_p}$$

は，

$$\Gamma_f^{(i_1,i_2)}(s_1,s_2) = \int_{\mathbb{Z}_p^\times \times \mathbb{Z}_p^\times} \langle x_1\rangle^{s_1}\langle x_2\rangle^{s_2} \omega^{i_1}(x_1)\omega^{i_2}(x_2)\, d\mu_f$$

によって定義される．さらに，

$$f^{(i_1,i_2)}(T_1,T_2) = \sum_{n,m\geq 0}\left(\int_{\mathbb{Z}_p^\times\times\mathbb{Z}_p^\times}\binom{\ell(x_1)}{n}\binom{\ell(x_2)}{m}\omega^{i_1}(x_1)\omega^{i_2}(x_2)\,d\mu_f\right)T_1^n T_2^m \in \mathcal{O}_{\mathbb{C}_p}[[T_1,T_2]]$$

とおくと，

$$\Gamma_f^{(i_1,i_2)}(s_1,s_2) = f^{(i_1,i_2)}(u^{s_1}-1,\ u^{s_2}-1)$$

が成り立つ．

υ を導手が p^m の Dirichlet 指標とするとき，任意の $f \in \mathcal{O}_{\mathbb{C}_p}[[T_1,T_2]]$ に対し，$f_{(\upsilon,1)}$，$f_{(1,\upsilon)} \in \mathcal{O}_{\mathbb{C}_p}[[T_1,T_2]]$ を，

(4.2) $$f_{(\upsilon,1)} = 1/\tau(\upsilon^{-1},\zeta_{p^m})\cdot\sum_{a=1}^{p^m}\upsilon^{-1}(a)f(\zeta_{p^m}^a(1+T_1)-1,\ T_2)$$

(4.3) $$f_{(1,\upsilon)} = 1/\tau(\upsilon^{-1},\zeta_{p^m})\cdot\sum_{a=1}^{p^m}\upsilon^{-1}(a)f(T_1,\ \zeta_{p^m}^a(1+T_2)-1)$$

によって定義する．ここに，ζ_{p^m} は任意の 1 の p^m 乗根，$\tau(\upsilon^{-1},\zeta_{p^m}) = \sum_{a=1}^{p^m}\upsilon^{-1}(a)\zeta_{p^m}^a$ で，(4.2)，(4.3) の右辺は，ζ_{p^m} のとり方にはよらない．υ_1，υ_2 が導手が p ゆの Dirichlet 指標のとき，$(f_{(\upsilon_1,1)})_{(1,\upsilon_2)} = (f_{(1,\upsilon_2)})_{(\upsilon_1,1)}$ である．このゆ級数を，$f_{(\upsilon_1,\upsilon_2)}$ と書く．

$(j,k)\in(\mathbb{Z}/(p-1)\mathbb{Z})^2$ とすると，

$$\Gamma_{f_{(\omega^j,\omega^k)}}^{(i_1,i_2)}(s_1,s_2) = \Gamma_f^{(i_1+j,\ i_2+k)}(s_1,s_2)$$

となる．φ_1，φ_2 が第2種 Dirichlet 指標のとき，

$$\Gamma_{f_{(\varphi_1,\varphi_2)}}^{(i_1,i_2)}(s_1,s_2) = f^{(i_1,i_2)}(\varphi_1(u)u^{s_1}-1,\ \varphi_2(u)u^{s_2}-1)$$

となる．さらに，

$$\left(f_{(\varphi_1,\varphi_2)}\right)_{(\omega^i,\omega^k)} = f_{(\varphi_1\omega^i,\ \varphi_2\omega^k)}$$

が成り立つ.

$f \in \mathcal{O}_{\mathbb{C}_p}[[T_1, T_2]]$ に対し,

$$U_1 f = f(T_1, T_2) - 1/p \sum_{a=1}^{p} f(\zeta_p^a(1+T_1)-1, T_2)$$

$$U_2 f = f(T_1, T_2) - 1/p \sum_{a=1}^{p} f(T_1, \zeta_p^a(1+T_2)-1)$$

とおく. $U_1 f,\ U_2 f \in \mathcal{O}_{\mathbb{C}_p}[[T_1, T_2]]$ である.

$D_j = (1+T_j)\,\partial/\partial T_j \quad (j=1,2)$ とおく.

任意の measurable function $\phi : \mathbb{Z}_p^2 \to \mathcal{O}_{\mathbb{C}_p}$ に対し,

$$\int_{\mathbb{Z}_p^\times \times \mathbb{Z}_p} \phi\, d\mu_f = \int_{\mathbb{Z}_p^2} \phi\, d\mu_{U_1 f}, \quad \int_{\mathbb{Z}_p \times \mathbb{Z}_p^\times} \phi\, d\mu_f = \int_{\mathbb{Z}_p^2} \phi\, d\mu_{U_2 f},$$

$$\int_{\mathbb{Z}_p^\times \times \mathbb{Z}_p^\times} \phi\, d\mu_f = \int_{\mathbb{Z}_p^2} \phi\, d\mu_{U_1 U_2 f},$$

$$\int_{\mathbb{Z}_p^2} \phi\, d\mu_{D_j f} = \int_{\mathbb{Z}_p^2} \phi(x_1, x_2)\, x_j\, d\mu_f \quad (j=1,2)$$

が成り立つ.

直接計算により, 作用素 $f \mapsto f_{(U_1,U_2)}$, $f \mapsto U_i f$, $f \mapsto D_j f$ $(i,j=1,2)$ は, 互いに可換であることがわかる.

補題 4.1. $f \in \mathcal{O}_{\mathbb{C}_p}[[T_1, T_2]]$ とし, $g \in \mathbb{C}_p[[T_1, T_2]]$ は $D_1 g = f$ を満たすとする. このとき,

$$\int_{\mathbb{Z}_p^\times \times \mathbb{Z}_p} x_1^{-1}\, d\mu_f = g(0,0) - 1/p \sum_{a=1}^{p} g(\zeta_p^a - 1, 0)$$

である.

§5. $\mathcal{G}_\beta^{(i_1,i_2)}(\zeta-1, \zeta'-1)$ の計算

$\hat{\mathcal{O}}_\infty$ を $\mathbb{Z}_\infty$ の整数環の完備化とする. $\eta(T) = \Omega_g T + \cdots$ を, Yager [7] で与えられた, $\hat{E}$ から G_m への $\hat{\mathcal{O}}_\infty$ 上の同型とし, $i(T)$ を,

$\eta(T)$ の inverse とする.

各 $\beta \in \mathcal{U}_\infty$ 及び $0 \leq m \in \mathbb{Z}$ に対し, [7] で定義されたように,

$$g_{m,\beta}(T) = \lambda'(T)^{-1} \, d/dT \log C_{m,\beta}(T) \in \mathcal{O}_m[[T]],$$

$$g_\beta(T_1, T_2) = \lim_{m\to\infty} \sum_{\sigma \in Gal(F_m/K)} (g^\sigma_{m,\beta}(T_1))_{g_m} (1+T_2)^{k_2(\sigma)} \in \hat{\mathcal{O}}_\infty[[T_1, T_2]]$$

$$h_\beta(T_1, T_2) = g_\beta(i(T_1), T_2)$$

とおく. さらに, $(i_1, i_2) \in (\mathbb{Z}/(p-1)\mathbb{Z})^2$ に対し,

$$\mathcal{G}_\beta^{(i_1,i_2)}(T_1, T_2) = (U_1 h_\beta)^{(i_1-1, -i_2)}(u^{-1}(1+T_1)-1, (1+T_2)^{-1}-1)$$

とおく。このとき, $\beta \mapsto \mathcal{G}_\beta^{(i_1,i_2)}(T_1, T_2)$ は, $\mathcal{U}_\infty$ から $\hat{\mathcal{O}}_\infty[[T_1, T_2]]$ への Λ-準同型で ([7] 定理22), $\mathcal{G}_\beta^{(i_1,i_2)}(T_1, T_2) = \mathcal{G}_{\beta^{(i_1,i_2)}}^{(i_1,i_2)}(T_1, T_2)$ となる. ここに, $\beta^{(i_1,i_2)}$ は, canonical な分解 (2.2) で, $A = \mathcal{U}_\infty$ の場合における β の $\mathcal{U}_\infty^{(i_1,i_2)}$-成分である.

各 $n \geq 0$ に対し, V_n を 1 の p^n-乗根全体のなす群とし, $V_\infty = \bigcup_{n\geq 0} V_n$ とおく。

以下, 本節では, $(\zeta, \zeta') \in V_\infty^2$ に対し, $\mathcal{G}_\beta^{(i_1,i_2)}(\zeta-1, \zeta'-1)$ を, 前節で述べた2変数 Γ-変換の性質を用いて計算する. 特に, $\beta = \langle e^{(i_1,i_2)}(u) \rangle^{(i_1,i_2)}$ の場合の結果が, §6, §7 で述べる定理の証明で有用となる.

φ_ζ, $\varphi_{\zeta'}$ を, $\varphi_\zeta(u) = \zeta$, $\varphi_{\zeta'}(u) = \zeta'$ を満たす第2種 Dirichlet 指標とし, $\varphi_\zeta \omega^{i_1}$, $\varphi_{\zeta'} \omega^{i_2}$ の導手をそれぞれ $p^{n_\zeta(i_1)}$, $p^{n_{\zeta'}(i_2)}$ とする. 以下, $\varphi_\zeta \omega^{i_1}$, $\varphi_{\zeta'} \omega^{i_2}$ のうち少なくとも一方は自明でないと仮定

する.

各 $m \geq 0$, $\beta \in \mathcal{U}_\infty$, $\sigma \in Gal(F_m/K)$ に対し,

$$h_{m,\beta,\sigma}(T) = \left(g^{\sigma}_{m,\beta}(W)\right)_{g_m}\Big|_{W=i(T)}$$

とおく. このとき, $m+1 \geq n_{\zeta'}(i_2)$ なる m に対して,

$$(\mathcal{U}_1 h_\beta)_{(\varphi_\zeta \omega^{i_1}, \varphi_{\zeta'}^{-1}\omega^{-i_2})} \equiv \sum_{\sigma \in Gal(F_m/K)} (\mathcal{U}_1 h_{m,\beta,\sigma}(T_1))_{(\varphi_\zeta \omega^{i_1}, 1)} \left((1+T_2)^{k_2(\sigma)}\right)_{(1, \varphi_{\zeta'}^{-1}\omega^{-i_2})}$$
$$(\mathrm{mod}\ \omega_{m+1,2}\, \hat{\mathcal{O}}_\infty [[T_1, T_2]])$$

が成立する. また,

$$D_1\left(\log\left(C^{\sigma}_{m,\beta}(W)\right)_{g_m}\Big|_{W=i(T_1)}\right) = \Omega_g^{-1} h_{m,\beta,\sigma}(T_1)$$

も成り立つ. 以下 $\zeta_{p^{n+1}}$ は

$$i(\zeta_{p^{n+1}} - 1) = u_n = \varepsilon(\Omega_\infty/\Pi^{n+1})$$

を満たすようにとられているものとする. このとき, [7]補題2を考慮に入れることにより, $m+1 \geq n_{\zeta'}(i_2)$ なる m に対し, 次の等式が得られる.

$$\mathcal{G}_\beta^{(i_1,i_2)}(\zeta-1, \zeta'-1)$$
$$= \int_{\mathbb{Z}_p^\times \times \mathbb{Z}_p} x_1^{-1}\, d\mu_{(\mathcal{U}_1 h_\beta)(\varphi_\zeta \omega^{i_1}, \varphi_{\zeta'}^{-1}\omega^{-i_2})}$$
$$= \Omega_g \sum_{\sigma \in Gal(F_m/K)} \left\{ \mathcal{U}_1 \left(\log\left(C^{\sigma}_{m,\beta}(W)\right)_{g_m}\Big|_{W=i(T_1)}\right)_{(\varphi_\zeta \omega^{i_1}, 1)} \left((1+T_2)^{k_2(\sigma)}\right)_{(1, \varphi_{\zeta'}^{-1}\omega^{-i_2})} \right\}\Big|_{(0,0)}$$
$$= \begin{cases} \Omega_g/\tau(\varphi_\zeta^{-1}\omega^{-i_1}, \zeta_{p^{n_\zeta(i_1)}}) \cdot \sum_{\sigma \in Gal(F_m/K)} \left(\sum_{a=1}^{p^{n_\zeta(i_1)}} \varphi_\zeta^{-1}\omega^{-i_1}(a)\, \varphi_{\zeta'}^{-1}\omega^{-i_2}(k_2(\sigma)) \right. \\ \qquad \left. \times \log_p\left(C^{\sigma}_{m,\beta}(T)\right)_{g_m}\Big|_{T=[a]_{\hat{E}}(u_{n_\zeta(i_1)-1})} \right) \quad (\text{if } \varphi_\zeta \omega^{i_1} \neq 1) \\ \Omega_g/p \sum_{\sigma \in Gal(F_m/K)} \varphi_{\zeta'}^{-1}\omega^{-i_2}(k_2(\sigma)) \sum_{a=1}^{p-1} \log_p\left\{ C_{m,\beta}(0)^{\sigma} / \left(C^{\sigma}_{m,\beta}(T)\right)_{g_m}\Big|_{T=[a]_{\hat{E}}(u_0)} \right\} \\ \qquad (\text{if } \varphi_\zeta \omega^{i_1} = 1) \end{cases}$$

ここに，$\log_p$ は $\mathbb{C}_p^\times$ 上定義された p-進対数である．

次に，$\beta = \langle e^{(i_1,i_2)}(\mu)\rangle^{(i_1,i_2)}$ $(\mu \in \mathcal{S})$ の場合を考える．

定理 3.1 により，$n, m \geq 0$，$\sigma \in Gal(F_m/K)$，$a \geq 1$ に対し，

$$\left(C^{\sigma}_{m,\, e^{(i_1,i_2)}(\mu)}(T)\right)_{g_m}\Big|_{T=[a]\in(U_n)} = \Lambda_m^{(i_1,i_2)}(\varepsilon_n^{m+1} a\tau_n;\mu)$$

$$\left(C_{m,\, e^{(i_1,i_2)}(\mu)}(0)\right)^{\sigma} = \Lambda_m^{(i_1,i_2)}(0;\mu)^{\sigma}$$

となる．

$n+1 \geq n_{\mathfrak{f}}(i_1)$，$m+1 \geq n_{\mathfrak{f}'}(i_2)$ なる n, m に対し，$Gal(K_{n,m}/K)$ の指標 $\varphi_{\mathfrak{f}}^{(1)}\chi_1^{i_1}\varphi_{\mathfrak{f}'}^{(2)}\chi_2^{i_2}$ を，

$$\varphi_{\mathfrak{f}}^{(1)}\chi_1^{i_1}\varphi_{\mathfrak{f}'}^{(2)}\chi_2^{i_2}(\sigma) = \varphi_{\mathfrak{f}}\,\omega^{i_1}(k_1(\sigma))\cdot\varphi_{\mathfrak{f}'}\,\omega^{i_2}(k_2(\sigma))$$

によって定義する．

$\mathfrak{g} \neq (1)$ を K の整イデアルとするとき，$C \in Cl(\mathfrak{g})$ に対し，$\varphi_{\mathfrak{g}}(C) \in R_{\mathfrak{g}}$ を，Robert [6] で定義された ray class invariant とする．このとき，直接計算により，

$$\Lambda_m^{(i_1,i_2)}(\varepsilon_n^{m+1}\tau_n, \mathfrak{a})^{k_{n,m}^{(i_1,i_2)}} = N_{K_{n,m}^{(i_1,i_2)}/K_{n,m}}\left(\varphi_{C^{(i_1,i_2)}\mathfrak{g}^{n+1}\mathfrak{g}^{*m+1}}(C_0)^{N\mathfrak{a}}/\varphi_{C^{(i_1,i_2)}\mathfrak{g}^{n+1}\mathfrak{g}^{*m+1}}(C_0)^{\sigma(\mathfrak{a})}\right)^{\sigma_{n,m}^{(i_1,i_2)}},$$

$$\Lambda_m^{(i_1,i_2)}(0, \mathfrak{a})^{k_{C^{(i_1,i_2)}\mathfrak{g}^{*m+1}}} = N_{F_m^{(i_1,i_2)}/F_m}\left(\varphi_{C^{(i_1,i_2)}\mathfrak{g}^{*m+1}}(C_0')^{N\mathfrak{a}}/\varphi_{C^{(i_1,i_2)}\mathfrak{g}^{*m+1}}(C_0')^{\sigma(\mathfrak{a})}\right)$$

が任意の $\mathfrak{a} \in \mathfrak{g}$ に対して成り立つことがわかる．ここに，$k_{n,m}^{(i_1,i_2)} = k_{C^{(i_1,i_2)}\mathfrak{g}^{n+1}\mathfrak{g}^{*m+1}}$，$\sigma_{n,m}^{(i_1,i_2)} = \left((\varepsilon_n^{m+1}c^{(i_1,i_2)}\pi^{*m+1} + \pi^{n+1}), R_{C^{(i_1,i_2)}\mathfrak{g}^{n+1}\mathfrak{g}^{*m+1}}/K\right)$，$\sigma(\mathfrak{a}) = (\mathfrak{a}, R_{C^{(i_1,i_2)}\mathfrak{g}^{n+1}\mathfrak{g}^{*m+1}}/K)$ で，C_0，C_0' はそれぞれ $Cl(C^{(i_1,i_2)}\mathfrak{g}^{n+1}\mathfrak{g}^{*m+1})$，$Cl(C^{(i_1,i_2)}\mathfrak{g}^{*m+1})$ の unit ray class である．

$Cl(\mathfrak{g})$ の任意の指標 χ に対し，

$$S_{\mathfrak{g}}^{(p)}(\chi) = \sum_{C\in Cl(\mathfrak{g})} \chi^{-1}(C)\log_p(\varphi_{\mathfrak{g}}(C))$$

とおく。

類体論により，$[K_{n,m}^{(i_1,i_2)} : R_{\Gamma^{(i_1,i_2)}\mathfrak{g}^{n+1}\mathfrak{g}^{*m+1}}]$ は，n, m に無関係となる．この拡大次数を $d^{(i_1,i_2)}$ と書く．

$\eta_{\mathfrak{s}}^{(i_1,i_2)} = (\chi_1^{i_1}\chi_2^{i_2})'\left((\varepsilon_{n_{\mathfrak{s}}(i_1)-1}^{m+1} c^{(i_1,i_2)}\pi^{*m+1} + \pi^{n_{\mathfrak{s}}(i_1)})\right)$ とおく．これは m には依存しない．

各 $\mu \in \mathfrak{S}$ に対し，

$$h_\mu^{(i_1,i_2)}(T_1, T_2) = \sum_{\mathfrak{a}\in\mathfrak{g}} \mu(\mathfrak{a})\Big(N\mathfrak{a} - \omega^{i_1}(\psi_E(\mathfrak{a}))\omega^{i_2}(\overline{\psi}_E(\mathfrak{a}))$$
$$\times (1+T_1)^{\ell(\psi_E(\mathfrak{a}))}(1+T_2)^{\ell(\overline{\psi}_E(\mathfrak{a}))}\Big)$$

とおく．このとき，Robert [6] §2.3 定理2を用いて直接計算することにより，次の定理が得られる．

定理5.1．$(i_1, i_2) \in (\mathbb{Z}/(p-1)\mathbb{Z})^2$，$\mu \in \mathfrak{S}$，$(\mathfrak{s}, \mathfrak{s}') \in V_\infty^2$ とし，$\varphi_{\mathfrak{s}}\omega^{i_1}$，$\varphi_{\mathfrak{s}'}\omega^{i_2}$ のうち少なくとも一方は自明でないとする．このとき，$m+1 \geq n_{\mathfrak{s}'}(i_2)$ なる $m \geq 0$ に対し，

(1) $\varphi_{\mathfrak{s}}\omega^{i_1} \neq 1$ なら，

$$\mathcal{G}_{\langle e^{(i_1,i_2)}(\mu)\rangle^{(i_1,i_2)}}^{(i_1,i_2)}(\mathfrak{s}-1, \mathfrak{s}'-1) = \frac{\Omega_{\mathfrak{g}}\, d^{(i_1,i_2)}\eta_{\mathfrak{s}}^{(i_1,i_2)}\mathfrak{s}^{\ell(c^{(i_1,i_2)})}\mathfrak{s}'^{\ell(\overline{\pi}^{n_{\mathfrak{s}}(i_1)})}}{k_{\Gamma^{(i_1,i_2)}\mathfrak{g}^{n_{\mathfrak{s}}(i_1)}\mathfrak{g}^{*m+1}}\,\tau(\varphi_{\mathfrak{s}}^{-1}\omega^{-i_1}, \mathfrak{s}_p^{n_{\mathfrak{s}}(i_1)})}$$

$$\times h_\mu^{(i_1,i_2)}(\mathfrak{s}-1, \mathfrak{s}'-1)\, S_{\Gamma^{(i_1,i_2)}\mathfrak{g}^{n_{\mathfrak{s}}(i_1)}\mathfrak{g}^{*m+1}}^{(p)}\left((\varphi_{\mathfrak{s}}^{(1)}\chi_1^{i_1}\varphi_{\mathfrak{s}'}^{(2)}\chi_2^{i_2})'\right)$$

(2) $$\mathcal{G}_{\langle e^{(0,i_2)}(\mu)\rangle^{(0,i_2)}}^{(0,i_2)}(0, \mathfrak{s}'-1) = \frac{\Omega_{\mathfrak{g}}\, d^{(0,i_2)}\omega^{i_2}(\overline{\pi})\mathfrak{s}'^{\ell(\overline{\pi})}}{p\, k_{\Gamma^{(0,i_2)}\mathfrak{g}^{*m+1}}} \cdot h_\mu^{(0,i_2)}(0, \mathfrak{s}'-1)$$

$$\times (p - \mathfrak{s}'^{\ell(\overline{\pi})}\omega^{i_2}(\overline{\pi}))\, S_{\Gamma^{(0,i_2)}\mathfrak{g}^{*m+1}}^{(p)}\left((\varphi_{\mathfrak{s}'}^{(2)}\chi_2^{i_2})'\right)$$

となる．

次に，$\mathfrak{c}^{(i_1,i_2)}=\mathfrak{f}^{(i_1,i_2)}$ と $\mathfrak{c}^{(i_1,i_2)}=\mathfrak{f}$ の場合を比較してみよう．$\mathfrak{c}^{(i_1,i_2)}=\mathfrak{f}^{(i_1,i_2)}$ のとき，$c^{(i_1,i_2)}$, $e^{(i_1,i_2)}(\mu)$, $d^{(i_1,i_2)}$, $\eta_s^{(i_1,i_2)}$ をそれぞれ $\mathfrak{f}^{(i_1,i_2)}$, $\tilde{e}^{(i_1,i_2)}(\mu)$, $\tilde{d}^{(i_1,i_2)}$, $\tilde{\eta}_s^{(i_1,i_2)}$ と書く。$\mathfrak{c}^{(i_1,i_2)}=\mathfrak{f}$ のとき，$c^{(i_1,i_2)}$, $e^{(i_1,i_2)}(\mu)$, $\eta_s^{(i_1,i_2)}$ をそれぞれ，$\mathfrak{f}$, $\hat{e}^{(i_1,i_2)}(\mu)$, $\hat{\eta}_s^{(i_1,i_2)}$ と書く．後者の場合は，$d^{(i_1,i_2)}=1$ である．

[6] §2.3 定理2により，

$$\frac{S^{(p)}_{\mathfrak{f}g^{n_s(i_1)}g^{*n_{s'}(i_2)}}\left((\varphi_s^{(1)}\chi_1^{i_1}\varphi_{s'}^{(2)}\chi_2^{i_2})'\right)}{k_{\mathfrak{f}g^{n_s(i_1)}g^{*n_{s'}(i_2)}}}$$

$$=\frac{S^{(p)}_{\mathfrak{f}^{(i_1,i_2)}g^{n_s(i_1)}g^{*n_{s'}(i_2)}}\left((\varphi_s^{(1)}\chi_1^{i_1}\varphi_{s'}^{(2)}\chi_2^{i_2})'\right)}{k_{\mathfrak{f}^{(i_1,i_2)}g^{n_s(i_1)}g^{*n_{s'}(i_2)}}}\prod_{\substack{\mathfrak{q}:\text{素イデアル}\\ \mathfrak{q}|\mathfrak{f},\ \mathfrak{q}\nmid\mathfrak{f}^{(i_1,i_2)}}}\left\{1-\left(\widetilde{\varphi_s^{(1)}\chi_1^{i_1}\varphi_{s'}^{(2)}\chi_2^{i_2}}\right)'^{-1}(\mathfrak{q})\right\}$$

となる．$\mathfrak{f}^{(i_1,i_2)}p$ と素な任意の素イデアル $\mathfrak{q}$ に対し，$\alpha_{\mathfrak{q}}$ を $\mathfrak{q}$ の任意の生成元とする．$\nu_{\mathfrak{q}}^{(i_1,i_2)}=(\widetilde{\chi_1^{i_1}\chi_2^{i_2}})'(\mathfrak{q})$, $\varepsilon^{(i_1,i_2)}=\hat{\eta}_s^{(i_1,i_2)}/\tilde{\eta}_s^{(i_1,i_2)}$ とおく．$\varepsilon^{(i_1,i_2)}$ は s には依存しない．$\mathcal{G}^{(i_1,i_2)}_{\langle\tilde{e}^{(i_1,i_2)}(\mu)\rangle^{(i_1,i_2)}}(T_1,T_2)$, $\mathcal{G}^{(i_1,i_2)}_{\langle\hat{e}^{(i_1,i_2)}(\mu)\rangle^{(i_1,i_2)}}(T_1,T_2)$ の $(T_1,T_2)=(s-1,s'-1)$ における値を比較することにより，次の系が得られる．

系 5.2.

$$\mathcal{G}^{(i_1,i_2)}_{\langle\hat{e}^{(i_1,i_2)}(\mu)\rangle^{(i_1,i_2)}}(T_1,T_2)=(\tilde{d}^{(i_1,i_2)})^{-1}\cdot\varepsilon^{(i_1,i_2)}\cdot(T_1+1)^{\ell(\mathfrak{f})-\ell(\mathfrak{f}^{(i_1,i_2)})}$$
$$\times\left\{\prod_{\substack{\mathfrak{q}|\mathfrak{f}\\ \mathfrak{q}\nmid\mathfrak{f}^{(i_1,i_2)}}}\left(1-(\nu_{\mathfrak{q}}^{(i_1,i_2)})^{-1}(1+T_1)^{-\ell(\alpha_{\mathfrak{q}})}(1+T_2)^{-\ell(\bar{\alpha}_{\mathfrak{q}})}\right)\right\}\mathcal{G}^{(i_1,i_2)}_{\langle\tilde{e}^{(i_1,i_2)}(\mu)\rangle^{(i_1,i_2)}}(T_1,T_2)$$

である．

§6. $\mathcal{Y}_\infty^{(i_1,i_2)}$ の構造

本節では，任意の $(i_1,i_2)\in(\mathbb{Z}/(p-1)\mathbb{Z})^2$ に対し，$\mathcal{L}^{(i_1,i_2)}=\mathcal{F}^{(i_1,i_2)}$ と仮定する。

$n,m\geq 0$ に対し，$C'^{(i_1,i_2)}_{n,m}$ を $\mathcal{U}'_{n,m}$ の部分群とみて，$C^{(i_1,i_2)}_{n,m}=C'^{(i_1,i_2)}_{n,m}\cap\mathcal{U}_{n,m}$ とおき，$\overline{C^{(i_1,i_2)}_{n,m}}$ を $C^{(i_1,i_2)}_{n,m}$ の閉包とする。$\overline{C^{(i_1,i_2)}_{n,m}}$ の $\chi_1^{i_1}\chi_2^{i_2}$-固有空間を $\overline{C}^{(i_1,i_2)}_{n,m}$ と書き，

$$\overline{C}_{n,m}=\bigoplus_{(i_1,i_2)\in(\mathbb{Z}/(p-1)\mathbb{Z})^2}\overline{C}^{(i_1,i_2)}_{n,m}\quad(\subseteq\mathcal{U}_{n,m})$$

とおく。$\overline{C}_{n,m}$ の $\chi_1^{i_1}\chi_2^{i_2}$-固有空間は，$\overline{C}^{(i_1,i_2)}_{n,m}$ に一致する。

$$\mathcal{Y}_\infty^{(i_1,i_2)}=\varprojlim\left(\mathcal{U}_{n,m}/\overline{C}_{n,m}\right)^{(i_1,i_2)}$$

とおく。逆極限はノルムに関するものである。

$D^{(i_1,i_2)}$ を $\{\langle\tilde{e}^{(i_1,i_2)}(\mu)\rangle^{(i_1,i_2)}\mid\mu\in\mathcal{S}\}$ によって生成される $\mathcal{U}_\infty$ の Λ-部分加群とする。このとき，

$$\mathcal{Y}_\infty^{(i_1,i_2)}\cong\mathcal{U}_\infty^{(i_1,i_2)}/D^{(i_1,i_2)}$$

となる。

Yager [7] で，Λ-単準同型

$$W^{(i_1,i_2)}:\ \mathcal{U}_\infty^{(i_1,i_2)}\longrightarrow\Lambda$$

が構成され，さらに，$\phi^{(i_1,i_2)}(T_1,T_2)\in(\hat{\mathcal{O}}_\infty[[T_1,T_2]])^\times$ が存在して，

$$\mathcal{G}_\beta^{(i_1,i_2)}(T_1,T_2)=\phi^{(i_1,i_2)}(T_1,T_2)\,W^{(i_1,i_2)}(\beta)\quad(\forall\beta\in\mathcal{U}_\infty^{(i_1,i_2)})$$

となることが証明された。$\mathcal{H}^{(i_1,i_2)}=\mathrm{Im}\,W^{(i_1,i_2)}$ とおく。$H^{(i_1,i_2)}$ を，$\{h_\mu^{(i_1,i_2)}(T_1,T_2)\,;\,\mu\in\mathcal{S}\}$ によって生成される Λ のイデアルとする。$(i_1,i_2)\neq(0,0),(1,1)$ のとき，$H^{(i_1,i_2)}=\Lambda$．$H^{(0,0)}=T_1\Lambda+T_2\Lambda$，

$H^{(1,1)}=(T_1+1-u)\Lambda+(T_2+1-u)\Lambda$ である．（[7] 補題28）

定理6.1．各 $(i_1,i_2)\in(\mathbb{Z}/(p-1)\mathbb{Z})^2$ に対し，$g^{(i_1,i_2)}(T_1,T_2)\in\Lambda$ が存在して，

$$\mathcal{Y}_\infty^{(i_1,i_2)}\cong\mathcal{X}^{(i_1,i_2)}/g^{(i_1,i_2)}(T_1,T_2)H^{(i_1,i_2)}$$

となる．

（証明）　$W^{(i_1,i_2)}(D^{(i_1,i_2)})=g^{(i_1,i_2)}(T_1,T_2)H^{(i_1,i_2)}$ となる $g^{(i_1,i_2)}(T_1,T_2)\in\Lambda$ を構成すればよい．

(1)　$(i_1,i_2)=(0,0)$ のとき；定理5.1により，$e^{(0,0)}\in D^{(0,0)}$ が存在して，

$$\mathcal{G}_{e^{(0,0)}}^{(0,0)}(T_1,T_2)/T_1\in\hat{\mathcal{O}}_\infty[[T_1,T_2]]$$

かつ，任意の $(\zeta,\zeta')\in(\mathbb{V}_\infty-\{1\})^2$ に対し，

$$\mathcal{G}_{e^{(0,0)}}^{(0,0)}(\zeta-1,\zeta'-1)/\zeta-1=\frac{\Omega_g\,\mathcal{J}^{(0,0)}\zeta'^{\ell(\pi^{n_{\zeta'}(0)})}}{k_{g^{n_\zeta(0)}g^{*n_{\zeta'}(0)}}\,\tau(\varphi_\zeta^{-1},\zeta_p^{n_\zeta(0)})}\,S_{g^{n_\zeta(0)}g^{*n_{\zeta'}(0)}}^{(p)}\left((\varphi_\zeta^{(1)}\varphi_{\zeta'}^{(2)})'\right)$$

となる．さらに，任意の $\mu\in\mathcal{S}$ に対して，

$$\mathcal{G}_{\langle\tilde{e}^{(0,0)}(\mu)\rangle^{(0,0)}}^{(0,0)}(T_1,T_2)=h_\mu^{(0,0)}(T_1,T_2)\cdot 1/T_1\cdot\mathcal{G}_{e^{(0,0)}}^{(0,0)}(T_1,T_2)$$

が成り立つ．従って，$g^{(0,0)}(T_1,T_2)=W^{(0,0)}(e^{(0,0)})/T_1$ とおくことにより，

$$W^{(0,0)}(D^{(0,0)})=g^{(0,0)}(T_1,T_2)H^{(0,0)}$$

が成立する．

(2)　$(i_1,i_2)=(1,1)$ のとき；$\mu_1,\cdots,\mu_t\in\mathcal{S}$ 及び $f_1,\cdots,f_t\in\Lambda$ が存在して，$T_1+1-u=\sum_{j=1}^{t}f_j(T_1,T_2)\,h_{\mu_j}^{(1,1)}(T_1,T_2)$ となる．

$$\tilde{e}^{(1,1)}=\prod_{j=1}^{t} f_j \langle \tilde{e}^{(1,1)}(\mu_j)\rangle^{(1,1)}, \quad \hat{e}^{(1,1)}=\prod_{j=1}^{t} f_j \langle \hat{e}^{(1,1)}(\mu_j)\rangle^{(1,1)}$$

とおく．このとき，[7]定理29の証明から，$\mathcal{G}^{(1,1)}_{\hat{e}^{(1,1)}}(T_1,T_2)\in(T_1+1-u)\hat{\mathcal{O}}_\infty[[T_1,T_2]]$ となり，さらに系5.2から $\mathcal{G}^{(1,1)}_{\tilde{e}^{(1,1)}}(T_1,T_2)\in(T_1+1-u)\hat{\mathcal{O}}_\infty[[T_1,T_2]]$ となることがわかる．よって，$g^{(1,1)}(T_1,T_2)=W^{(1,1)}(\tilde{e}^{(1,1)})/T_1+1-u$ とおくと，(1)と同様に，

$$W^{(1,1)}(D^{(1,1)})=g^{(1,1)}(T_1,T_2)H^{(1,1)}$$

が成立する．

(3) $(i_1,i_2)\neq(0,0),(1,1)$ のとき；(1),(2)の場合と同様に，$e^{(i_1,i_2)}\in D^{(i_1,i_2)}$ が存在して

$$\mathcal{G}^{(i_1,i_2)}_{\langle \tilde{e}^{(i_1,i_2)}(\mu)\rangle^{(i_1,i_2)}}(T_1,T_2)=h^{(i_1,i_2)}_{\mu}(T_1,T_2)\mathcal{G}^{(i_1,i_2)}_{e^{(i_1,i_2)}}(T_1,T_2) \quad (\forall\mu\in\mathcal{S})$$

となる．$g^{(i_1,i_2)}(T_1,T_2)=W^{(i_1,i_2)}(e^{(i_1,i_2)})$ とおけばよい．

§7. p-進L-関数との関係

Yager[7]では，前節の $\overline{C^{(1,0)}_{n,m}}$ の $\chi_1^{i_1}\chi_2^{i_2}$-固有空間を $\overline{C}^{(i_1,i_2)}_{n,m}$ とおいて，Λ-加群 $\varprojlim \mathcal{V}^{(i_1,i_2)}_{n,m}/\mathcal{C}^{(i_1,i_2)}_{n,m}$ の characteristic power series とp-進L-関数との関連性が考察された．$\overline{C}^{(i_1,i_2)}_{n,m}$ を，前節で述べたように定義すると，$\mathcal{Y}^{(i_1,i_2)}_{\infty}$ の characteristic power series $g^{(i_1,i_2)}(T_1,T_2)$ は，原始的なp-進L-関数の補間級数と，$\hat{\mathcal{O}}_\infty[[T_1,T_2]]$ で同伴になる．このことについて，これから説明する．

各 $k\geq1$ に対し，$L(\pi_E^k,s)$ を，量指標 π_E^k に対する原始的なHecke L-関数とする．また，$L_f(\pi_E^k,s)$ を，π_E^k を mod f の量指標とみたときのHecke L-関数とする．任意の $0\leq j<k$ に対し，

(7.1) $$L_\infty(\overline{\psi}_E^{k+j}, k) = (1-\psi_E(\mathfrak{g})^{k+j}/(N\mathfrak{g})^{j+1})(1-\overline{\psi}_E(\mathfrak{g}^*)^{k+j}/(N\mathfrak{g}^*)^k) \times (2\pi/\sqrt{d_K})^j \Omega_\infty^{-(k+j)} L(\overline{\psi}_E^{k+j}, k)$$

(7.2) $$L_{\mathfrak{f},\infty}(\overline{\psi}_E^{k+j}, k) = (1-\psi_E(\mathfrak{g})^{k+j}/(N\mathfrak{g})^{j+1})(1-\overline{\psi}_E(\mathfrak{g}^*)^{k+j}/(N\mathfrak{g}^*)^k) \times (2\pi/\sqrt{d_K})^j \Omega_\infty^{-(k+j)} L_{\mathfrak{f}}(\overline{\psi}_E^{k+j}, k)$$

とおく．Damerell の定理により，(7.1), (7.2) の右辺は代数的数になるので，$\mathbb{C}_p$の元ともみられる．このとき，各 $(i_1, i_2) \in (\mathbb{Z}/(p-1)\mathbb{Z})^2$ に対し，$\mathcal{G}_{\mathfrak{f}}^{(i_1,i_2)}(T_1, T_2)$ が $\hat{\mathcal{O}}_\infty[[T_1, T_2]]$ の中に存在して，$k_1 > -k_2 \geq 0$, $(k_1, k_2) \equiv (i_1, i_2) \pmod{p-1}$ なる任意の $k_1, k_2 \in \mathbb{Z}$ に対し，

(7.3) $$\mathcal{G}_{\mathfrak{f}}^{(i_1,i_2)}(u^{k_1}-1, u^{k_2}-1) = (k_1-1)!\, \Omega_{\mathfrak{g}}^{k_2-k_1} L_{\mathfrak{f},\infty}(\overline{\psi}_E^{k_1-k_2}, k_1)$$

となる．([7] 定理29)

(7.4) $$\mathcal{G}^{(i_1,i_2)}(T_1, T_2) = \prod_{\mathfrak{q} \mid \mathfrak{f}, \mathfrak{q} \nmid \mathfrak{f}^{(i_1,i_2)}} (1 - \nu_{\mathfrak{q}}^{(i_1,i_2)-1}(1+T_1)^{-\ell(d_{\mathfrak{q}})}(1+T_2)^{-\ell(\bar{d}_{\mathfrak{q}})})^{-1} \mathcal{G}_{\mathfrak{f}}^{(i_1,i_2)}(T_1, T_2)$$

とおく．このとき，次の定理が成立する．

定理 7.1. 各 $(i_1, i_2) \in (\mathbb{Z}/(p-1)\mathbb{Z})^2$ に対し，$\mathcal{G}^{(i_1,i_2)}(T_1, T_2)$ は，$g^{(i_1,i_2)}(T_1, T_2)$ と $\hat{\mathcal{O}}_\infty[[T_1, T_2]]$ で同伴である．さらに，$k_1, k_2 \in \mathbb{Z}$ が，$k_1 > -k_2 \geq 0$, $(k_1, k_2) \equiv (i_1, i_2) \pmod{p-1}$ を満たすとき，

(7.5) $$\mathcal{G}^{(i_1,i_2)}(u^{k_1}-1, u^{k_2}-1) = (k_1-1)!\, \Omega_{\mathfrak{g}}^{k_2-k_1} L_\infty(\overline{\psi}_E^{k_1-k_2}, k_1)$$

となる．

（証明）　前半は，$g^{(i_1,i_2)}(T_1, T_2)$, $\mathcal{G}_{\mathfrak{f}}^{(i_1,i_2)}(T_1, T_2)$, $\mathcal{G}^{(i_1,i_2)}(T_1, T_2)$ の構成法と，系5.2 からわかる．後半は，$\psi_E^{k_1-k_2}$ の導手が $\mathfrak{f}^{(i_1,i_2)}$ であることと，L-関数の Euler 積分解から得られる．

文献

[1] J. Coates and A. Wiles, On p-adic L-functions and elliptic units, J. Austr. Math. Soc (series A) 26, (1978), 1-25.

[2] R. Coleman, Division values in local fields, Invent. Math. 53 (1979), 91-116.

[3] C. Goldstein, Courbes elliptiques et theorie d'Iwasawa, Pub. Math. D'orsay, 82-01.

[4] K. Kozuka, Elliptic units and two variable p-adic L-functions, to appear in Mem. Facu. Scie., Kyushu Univ.

[5] S. Lang, Cyclotomic fields, Springer-Verlag, New York 1978.

[6] G. Robert, Unités elliptiques, Bull. Soc. Math. France Mémoire, 36 (1973).

[7] R. Yager, On two variable p-adic L-functions, Ann. of Math., 115 (1982), 411-449.