

有限生成半群と正則言語の pumping 条件

豊橋技科大 情報工学系 橋口 攻三郎
(K. Hashiguchi)

あすまし： 正則性と等価な色々な pumping 条件が知られている。 pumping 条件に現われる (for all $i \geq 0$) を、 (for all $i \geq 1$) (又は $i = 0$) に置き換えた条件は、正 pumping 条件 (又は消去条件) と呼ばれる。 有限生成半群が有限であるための条件より、正則性と等価な正 pumping 条件が存在する事が知られている。 本稿では有限生成半群が有限であるための Luca-Restivo の条件の十分性の別証明と、正 pumping 条件と、対応する消去条件の相違について、得られた結果を紹介する。

1. 正則言語に関する pumping 条件

Σ を有限アルファベットとし、 $L \subset \Sigma^*$ とする。 λ を空語とする。 $u, v, w, x \in \Sigma^*$ とし、 $x = uvw$ とする。 二の時、 v は L に関して、 u と w の間の x の pump である

$\Leftrightarrow v \neq \lambda$ かつ $(x \in L \text{ iff } uv^i w \in L \text{ for all } i \geq 0)$
 という。 $i \geq 0$ の代わりに, $i \geq 1$ (又は $i = 0$) が成立
 する時, v は正の pump (又は消去 lump) という。 pump
 に関する条件が pumping 条件であり, 又各 pumping 条件に
 対して対応する正 pump と消去 lump に関する条件を, それ
 ぞれ正 pumping 条件, 消去条件という。

正整数 m と語 y に対して, $D(y, m) = \{(y_1, \dots, y_m) \mid$
 $y = y_1 \dots y_m \text{ かつ } y_i \neq \lambda \text{ for all } i\}$ とおく。 正則言語
 に関する pumping 条件は, 二つの型 \exists -型と \forall -型に分類さ
 れる。 次の条件は \exists -型の例である。($l(y)$ は y の長さ)

$C_1(\exists, i \geq 0)$: ある正整数 m が存在して, 任意の語 $x,$
 y, z (但し $l(y) \geq m$) に対して, ある $(y_1, \dots, y_m) \in D(y, m)$
 と j, k ($1 \leq j \leq k \leq m$) が存在して, $y_j \dots y_k$ は L に関
 して, $x y_1 \dots y_{j-1}$ と $y_{k+1} \dots y_m z$ の間の $x y z$ の pump
 である。 \square

次の条件は \forall -型の例であり, $C_1(\exists, i \geq 0)$ に対応する。

$C_1(\forall, i \geq 0)$: ある正整数 m が存在して, 任意の語 $x,$
 y, z (但し $l(y) \geq m$) に対して, 次の成立する: 任意の
 $(y_1, \dots, y_m) \in D(y, m)$ に対して, ある j, k ($1 \leq j \leq k \leq m$)
 が存在して, $y_j \dots y_k$ は L に関する $x y_1 \dots y_{j-1}$ と
 $y_{k+1} \dots y_m z$ の間の $x y z$ の pump である。 \square

θ -型は [1] に於いて導入され、次の定理が証明された。

ここで ρ は実数の濃度を表わす。

定理 1 ([1]). $C_1(\theta, i \geq 0)$ と $C_1(\theta, i = 0)$ は、いづれも正則性と等価である。しかし、 $C_1(\exists, i \geq 0)$ を満足する ρ 個の言語が存在する。従って $C_1(\exists, i \geq 0)$ を満足する再帰的可算でない言語が存在する。□

[2] に於いて、次の条件と正則性の等価性が証明された。

$C_2(\exists, i \geq 0)$: ある正整数 m が存在して、任意の語 y (但し $l(y) \geq m$) に対して、ある $(y_1, \dots, y_m) \in D(y, m)$ と j, k ($1 \leq j \leq k \leq m$) が存在して、任意の語 x, z に対し、 $y_j \dots y_k$ は L に属する $x y_j \dots y_{j-1}$ とその間の、 $x y_j \dots y_k z$ の pump である。□

Luca-Restivo [3] は、 $C_2(\theta, i \geq 1)$ と正則性の等価性を示した。これは、有限生成半群に関する彼等の定理 (次節の定理 5) の系として得られた。

2. 有限生成半群が有限であるための十分性の別証明

有限生成半群 \mathcal{S} とは、 Σ^* 上のある合同関係 \sim に対して、 $\mathcal{S} = \Sigma^* / \sim = \{ [u] \mid u \in \Sigma^* \text{ かつ } [u] \text{ は } w \sim u \text{ である語 } w \text{ の集合} \}$ と表わされ半群である。ここで \mathcal{S} の二項演算 \cdot は、語 u, w に対して $[u] \cdot [w] = [uw]$ と定義される。

有限生成半群が有限(即ち, 有限個の元を持つ)であるための条件を, 次の三つの定理は与える。

定理3 ([4]). S を有限生成半群とし, S の部分群はすべて有限群とする。もし S が単項右イデアルに関する極小条件を満足するならば, S は有限である。□

定理4 ([5]). 有限生成半群 S に対し, 次の三条件は等価である。(1) S は有限である。(2) S は高々有限個の非冪等元をもつ。(3) ある正整数 m が存在して, 任意の系列 $(t_1, \dots, t_m) \in S^m$ に対し, $j, k (1 \leq j \leq k \leq m)$ が存在して, $t_j \dots t_k$ は冪等元である, 即ち $t_j \dots t_k = (t_j \dots t_k)^2$ 。□

定理5 ([3]). 有限生成半群 S に対し, 次の二条件は等価である。(1) S は有限である。(2) ある正整数 m が存在して, 任意の系列 $(t_1, \dots, t_m) \in S^m$ に対し, $j, k (1 \leq j \leq k \leq m)$ が存在して, $t_1 \dots t_k = t_1 \dots t_{j-1} (t_j \dots t_k)^2$ が成立する。□

定理5より, $C_2(V, l \geq 1)$ と正則性の等価性は, 言語の構文半群を考へる事によつて容易に示される。[5]に於ける定理4の(3) \Rightarrow (1)の証明並びに[3]に於ける定理5の(2) \Rightarrow (1)の証明は, 定理3を使つている。定理5の(2) \Rightarrow (1)の別証明(定理3に依存しない)(これは定理4の(3) \Rightarrow (1)の証明にもなる)を得たので, これを簡単に紹介する(詳細は[7])。

\sim を Σ^* 上の任意の合同関係とする。 $w \in \Sigma^*$ とする。 $\Sigma(w)$ を w に現われる Σ の元の集合とする。 $\#A$ は集合 A の濃度を表わす。 $\text{Sub}(w) = \{ y \in \Sigma^* \mid \text{ある語 } x, z \text{ に対し } w = xyzy \text{ かつ } xz \neq \lambda \}$ とおく。 m, n を正整数とする。 この時、 w は \sim に関し \sim 系列的に (m, n) 右周期的である $\Leftrightarrow \# \Sigma(w) = n$, かつ任意の語 x, y_1, \dots, y_m, z に対し、もし $w = xy_1 \dots y_m z$ ならば、 $j, k (1 \leq j \leq k \leq m)$ が存在して $y_1 \dots y_k \sim y_1 \dots y_{j-1} (y_j \dots y_k)^2$ が成立する。 \square という。 又

語 w は $(\sim$ に関し \sim) 系列的に既約である \Leftrightarrow 任意の語 $u_0, v_0, \dots, u_n, v_n, u_{n+1} (n \geq 0)$ に対し、 $w = u_0 v_0 \dots u_n v_n u_{n+1}$ かつ $u_0 u_1 \dots u_{n+1} \neq \lambda$ ならば $w \not\sim v_0 v_1 \dots v_n$ である。 \Leftarrow は \sim の否定である。 \square という。 又正整数 $I(m, n)$ を次式で定義する。

$$(1) I(1, 1) = 1; \quad I(1, n) = (I(1, n-1) + 1)(n^{I(1, n-1) + 1} + 1);$$

$$(2) I(m, 1) = 2m - 1; \quad I(m, n) = k(mn^k + 1), \text{ 但し } k = m(I(m, n-1) + 1)(I(m-1, n^{I(m, n-1) + 1} + 1) + 3).$$

次の定理が成立する。

定理 6. m, n を正整数, $w \in \Sigma^*$, $\# \Sigma(w) = n$ とする。 もし $l(w) > I(m, n)$ かつ w が \sim に関し \sim 系列的に右周期的ならば、 w は系列的に既約でない。 \square

以下において、定理6の証明について述べよ。証明は (m, n) に関する帰納法による。ある $u \in \text{Sub}(w)$ が存在して、 u が系列的に既約でない時、 w が系列的に既約でない事は明らかなので、そうでない場合を考える。次の二つの補題が成立する。

補題1. あり語 v, t, u に対し $w = vtu$ とする。任意の語 y', u と $a \in \Sigma(u)$ (但し $u = y'a u$) に対し、ある語 p, z が存在して、 $t = pa z$ かつ $pa z y' \sim p(a z y')^2$ が成立するとする。この時任意の語 y, u (但し $u = y u$) に対しある語 z が存在して、 $t \sim t y z$ が成立する。

(証明). $l(y)$ に関する帰納法による。 $l(y) = 0$ の時明らか。 $y = y'a$, $a \in \Sigma$ とする。仮定よりある語 p, z に対し、 $t = pa z$ かつ $pa z y' \sim p(a z y')^2$ 。帰納法の仮定より、ある語 z' に対し、 $t \sim t y' z'$ 。 $z = z'$

$$z = z y' z' \text{ とおけば, } t y z = p a z y' a z y' z' \\ \sim p a z y' z' = t y' z' \sim t. \quad \square$$

補題2. もし $p \in \text{Sub}(w)$ かつ $l(p) \geq (I(m, n-1) + 1)(I(m-1, n^{I(m, n-1)+1}) + 3)$ ならば、任意の $a \in \Sigma(w)$ と語 y (但し $p y \in \text{Sub}(w)$) に対し、ある語 v, t が存在して、 $p = vat$ かつ $v a t y \sim v(a t y)^2$ が成立する。 \square

補題2の証明は省略する ([7] 参照)。定理6の証明に
ついで述べる。 $m=n=1$ の時, $\Sigma(w) = \{0\}$, $w = 000$
, $v \in 0^*$ とすると, $0 \sim 00$ であり, $w \sim 0v$ となって
証明できた。 $m=1$, $n > 1$ とする。補題1より次の系
が成立する。

系. ある語 α, x, y, u に対し $w = \alpha x y u$ とする。
もし $\Sigma(x) \supset \Sigma(y)$ ならば, ある語 z が存在して,
 $x \sim x y z$ が成立する。□

$m=1$, $n > 1$ の場合の証明は次の通り。 $l(w) > I(1, n)$
なため, ある語 α, p, u, t に対し, $l(p) = I(1, n-1) + 1$,
 $w = \alpha p u p t$ が成立する。 p は系列的に既約なため, 帰
納法の仮定より $\Sigma(p) = \Sigma(w)$ 。系より, ある語 z に対し
 $p \sim p u p z$ 。従って $w = \alpha p u p t \sim \alpha p u p \cdot p t \sim$
 $\alpha p u p \cdot p u p z t \sim \alpha p u p z t \sim \alpha p t$ 。よって証明され
た。 $m > 1$, $n=1$ の場合。この時, ある $v \in 0^*$ に対
して $w = 0^{2m} v$ となり, $x = \lambda$, $y_1 = \dots = y_m = 0$, $z =$
 $0^m v$ とおくと, ある j, r ($1 \leq j \leq r \leq m$) が存在して, 0^{rj}
 $\sim 0^{rj} \cdot 0^{r(j-1)}$ 。従って $w \sim 0^{2m - (rj - j + 1)} v$ となって証
明される。最後に $m > 1$, $n > 1$ の場合。この時, ある
語 α, p, z, u, t が存在して, $w = \alpha p z u p z t$, $\alpha p z u p$
 $\sim \alpha p (z u p)^2$, $p z \sim p z^2$, かつ $l(z) \geq$

$(I(m, n-1)+1)(I(m-1, n^{I(m, n-1)+1})+3)$ が成立する。

補題 1, 2 よりある語 u が存在して, $q \cup p q \cup \dots \sim q$ 。

従って $w = \rho p q \cup p q t \sim \rho p q \cup p q \cdot q t \sim$

$\rho p q \cup p q \cdot q \cup p q \cup t \sim \rho p q \cup p q \cup p q \cup t \sim$

$\rho p q \cup p q \cup t \sim \rho p q t$ 。 二つにより定理 6 の証明が

完結する。□

定理 6 が, 定理 5 の (2) \Rightarrow (1) 並びに定理 4 の (3) \Rightarrow (1) を包含する事は明らかであろう。

3. 正 pumping 条件と消去条件

定理 1 は, \exists -型と対応する \forall -型の pumping 条件の相違を述べている。この節では, 正 pumping 条件と対応する消去条件の相違について得られた結果を紹介する。定理 4 ((5)) より, 次の pumping 条件を考へる。

$C_3(\forall, l \geq 0)$: ある正整数 m が存在して, 任意の語 y (但し $l(y) \geq m$) に対し, 次が成立する: 任意の $(y_1, \dots, y_m) \in D(y, m)$ に対し, j, k ($1 \leq j \leq k \leq m$) が存在して, 任意の語 x, z に対し, $y_j \dots y_k$ は L に関する x と z の間の $x y_j \dots y_k z$ の pump である。□

次の定理を得た。但し (1) の前半は [3] による。

定理 7. (1) $C_2(\forall, l \geq 1)$ と $C_2(\forall, l = 0)$ は, 1 つか

正則性と等価である。(2) $C_3(\forall, \ell \geq 1)$ は正則性と等価であるが, $C_3(\forall, \ell = 0)$ は正則性より強い。(3) $C_2(\exists, \ell = 0)$ と $C_3(\exists, \ell = 0)$ はいづれも正則性と等価であるが, $C_2(\exists, \ell \geq 1)$ と $C_3(\exists, \ell \geq 1)$ を満たす言語は, それぞれ \aleph_1 個存在する。

従って, これらを満たすが, 再帰的可算でない言語が, それぞれ存在する。□

(3)の後半の証明は, $\Sigma = \{a, b\}$ に対し, f を Σ^* から Σ の上の言語の族への代入とし, $f(a) = a^+ b^+ a^+$, $f(b) = b^+ a^+ b^+$ と定義する。 f は, Σ の上の言語の族へと定義域が拡張され, $\ell = 2$ 対 1 であり, 又任意の $L \subset \Sigma^*$ に対し, $f(L)$ は $C_2(\exists, \ell \geq 1)$ と $C_3(\exists, \ell \geq 1)$ を $m = 2$ に対し満足する。他の証明は省略する。

最後に, 次の pumping 条件を考へる。

$C_4(\exists, \ell \geq 0)$: ある正整数 m が存在して, 任意の語 y (但し $\ell(y) \geq m$) に対し, $(y_1, \dots, y_m) \in D(y, m)$ とよ, r ($1 \leq r \leq m$) が存在して, $y_1 \dots y_r$ は, L に関する $y_1 \dots y_{r-1}$ と $y_{r+1} \dots y_m$ の間の y の pump である。□

次の定理を得た。

定理 8. (1) $C_4(\exists, \ell = 0)$ は $C_1(\exists, \ell = 0)$ より弱い。
 (2) $C_4(\exists, \ell = 0)$ は, $C_4(\exists, \ell \geq 0)$ より弱い。従って, $C_4(\exists, \ell = 0)$ を満たすが, $C_4(\exists, \ell \geq 1)$ を満たさない言語が

存在する。(3)すべての正則言語は $C_4(\forall, c \geq 0)$ を満足するが, $C_4(\exists, c=0)$ を満足しない文脈自由言語が存在する。

(4) $\Sigma = \{a\}$ 上の言語 L が, $C_4(\forall, c=0)$ を $m \leq 2$ に対して満足するなら, L は正則である。□

定理 8 の説明。 $\Sigma = \{a, b, c\}$ とおく。まず $L_1 = \{a^p \mid p \text{ は素数}\}$ とおくと, L_1 は $C_4(\exists, c=0)$ を満たすが, $C_1(\exists, c=0)$ を満たさない。 L_1 は又 $C_4(\exists, c \geq 0)$ も満たさない。次に $L_2 = \{a^n c b^n \mid n \geq 0\}$ とおくと, L_2 は, $C_4(\exists, c=0)$ を満たさない文脈自由言語である。(4)並びに詳しい証明は省略する ([7] 参照)。

最後に, 次の未解決問題を述べ, 稿を終る。

問題 1. 正則性より弱い \forall -型の pumping 条件が存在するか。例えは $C_4(\forall, c \geq 0)$ は正則性より弱いか。

問題 2. $C_4(\forall, c \geq 0)$ と $C_4(\forall, c=0)$ は等価か。

問題 3. $C_2(\forall, c \geq 1)$ と $C_3(\forall, c \geq 1)$ は, 明らかに $c=2$ での $C_2(\forall, c=2)$ と $C_3(\forall, c=2)$ に等価である。 $c=2$ の pumping 条件 $C(\forall, c \geq 0)$ に対して, $C(\forall, c=2)$ は (for all $c \geq 0$) を, $(c=2)$ によって置き換えた条件である。

問題は, 正則性と等価だから $C(\forall, c=2)$ より強い正 pumping 条件 $C(\forall, c \geq 1)$ が存在するか。□

参考文献

- [1] A. Ehrenfeucht, R. Parikh and G. Rozenberg, Pumping lemmas for regular sets, SIAM J. Comput. 10 (1981), 536-541.
- [2] D.F. Stanat and S.F. Weiss, A pumping theorem for regular languages, Sigact News 14 (1982), 36-37.
- [3] A. de Luca and A. Restivo, A finiteness condition for finitely generated semigroups, Semigroup Forum, 28 (1984), 123-134.
- [4] E. Hotzel, On finiteness conditions in semigroups, J. of Algebra, 60 (1979), 352-370.
- [5] I. Simon, Conditions de finitude pour des semigroupes, C.R. Acad. Sci. Paris, 290A (1980), 1081-1082.
- [6] J.A. Green and D. Rees, On semigroups in which $x^r = x$, Mat. Proc. Cambridge Phil. Soc. 48 (1952), 35-40.
- [7] K. Hashiguchi, Notes on finitely generated semigroups and pumping conditions about regular languages, submitted to T.C.S.