数理解析研究所講究録
591巻 1986年 138-147

項書き換えシステムの束論的意味論について

名大工学部　直井　徹　(Tohru Naoi)
名大工学部　稲垣　康善 (Yasuyoshi Inagaki)

1．はじめに

項書き換えシステムに表示的意味を与えようとするとき，その意味を項の集合から正規形の集合への関数として定式化し，また，各々の項の意味をその正規形によって与えることは自然な着想と思われる．しかし，その場合に，正規形をもたない項の扱いが問題になる．このとき，項書き換えシステムの意味である関数が正規形をもたない項に対し未定義であるとし，あるいは，そのような項がすべて一様に「無意味」であるとすることは自然な定式化といえず，理論上の利益に乏しい．

この問題を解決するため，まず，無限項の集合を考え，その上にある順序とScott 位相を導入する．次に，項書き換えシステムによる無限項の書き換えを考え，項書き換えシステムの意味を無限項の集合から近似正規形の集合への連続関数$\mathcal{V}$として定式化する．ここで，$\mathcal{V}$は次のような関数である：項tが正規形sをもつとき，$\mathcal{V}(t)=s$であり，正規形をもたないとき，$\mathcal{V}(t)$は，直観的にいえば，無限書き換え系列の極限として得られる近似正規形である．この議論に現れる近似正規形の概念は，λ算法におけるλ式の計算挙動とD_∞モデル上の表示との関係を論ずる際に Wadsworth によって提案された[5]．また，この概念は，項書き換えシステムの call-by-need 戦略に関連して，needed redex を発見する手法を示すために Huet と Levy[4]のなかで用いられている．

本稿では，項書き換えシステムの意味として定式化した上述の関数$\mathcal{V}$の諸性質を明らかにし，さらに項書き換えシステムの拡張という概念を定式化して，書き換え操作における項tの挙動と$\mathcal{V}(t)$の関連を特徴づける．

2．無限項

関数記号の集合$\mathcal{F}$と変数記号の集合$\mathcal{X}$から生成される無限項の集合を$\mathcal{T}^{\infty}(\mathcal{F},\mathcal{X})$とする．無限項は，関数記号または変数記号でラベル付けられた無限木と同一視できる[1]．無限項tの節点の集合を Dom(t) で表す．Dom(t) が有限の項tを有限項といい，その集合を $\mathcal{T}(\mathcal{F},\mathcal{X})$ とする．tの節点pを根とする部分項をt/pで表し，その部分項t/pを項sで置き換えて得られる項を$t[p:=s]$で表す．代入とは$\mathcal{X}$から $\mathcal{T}^{\infty}(\mathcal{F},\mathcal{X})$への写像$\sigma$である．その定義域を次式により$\mathcal{T}^{\infty}(\mathcal{F},\mathcal{X})$へ拡張する：

$$\sigma(t)=t[p:=\sigma(x)\mid p\in \mathrm{Dom}(t),\ t/p=x\in\mathcal{X}].$$

とくに，$\sigma(x)=s$ かつ $\sigma(y)=y$ $(x\neq y\in\mathcal{X})$のとき，$\sigma(t)$を$t[s/x]$とかく．また，あいまいさが生じない場合にはこれを$t[s]$と略記する．

3．Scott 位相

Ωを新しい 0引数関数記号とし，$\mathcal{T}^{\infty}(\mathcal{F}\cup\{\Omega\},\mathcal{X})$を$\mathcal{T}^{\infty}_{\Omega}(\mathcal{F},\mathcal{X})$と表わす．

$\mathcal{T}^{\infty}_{\Omega}(\mathcal{F},\mathcal{X})$上の順序$\sqsubseteq$を次のように定義する[1]．すなわち，項$t$の適当な部分項を$\Omega$で置き換えて項$s$が得られるとき，$s\sqsubseteq t$．この順序のもとで $\mathcal{T}^{\infty}_{\Omega}(\mathcal{F},\mathcal{X})$は algebraic cpo を成し[1]，任意の空でない有向集合$S\subseteq\mathcal{T}^{\infty}_{\Omega}(\mathcal{F},\mathcal{X})$ に上限($\sqcup S$と表す) が存在する．また，最小元はΩである．

次のようにして，$\mathcal{T}^{\infty}_{\Omega}(\mathcal{F},\mathcal{X})$に Scott 位相を導入する：$U\subseteq\mathcal{T}^{\infty}_{\Omega}(\mathcal{F},\mathcal{X})$ が開集合であるとは，(1) $t\in U\ \wedge\ t\sqsubseteq s\ \Rightarrow\ s\in U$，かつ (2)任意の有向集合$S$に対し，$\sqcup S\in U\ \Rightarrow\ S\cap U\neq\phi$．このとき，条件(2)により，実数空間のような$T_2$位相空間における点列の極限の概念が，Scott 位相空間では，有向集合の上限の概念によって代用されることに注意する．

4．項書き換えシステムと無限項のリダクション

集合$\mathcal{R}\subseteq\mathcal{T}(\mathcal{F},\mathcal{X})\times\mathcal{T}(\mathcal{F},\mathcal{X})$ が下の条件をみたすとき，$\mathcal{R}$を$\mathcal{T}(\mathcal{F},\mathcal{X})$上の項書き換えシステム(以下，TRS という)といい，その元$\langle l,\ r\rangle$を書き換え規則と

よんで $l \to r$ と表す．すなわち，条件とは，全ての $l \to r \in \mathcal{R}$ について，$l \notin \mathcal{X}$ かつ $\mathrm{Var}(l) \supseteq \mathrm{Var}(r)$．ここで，$\mathrm{Var}(t)$ は項 t に現れる変数記号の集合である．

[例1] 自然数の減算を計算するTRSの例を示す：

$$\begin{aligned}\mathcal{R}_{\mathrm{d}}=\{&\mathrm{if(true,\ x,\ y)} \to \mathrm{x},\\ &\mathrm{if(false,\ x,\ y)} \to \mathrm{y},\\ &\mathrm{eq(0,\ 0)} \to \mathrm{true},\\ &\mathrm{eq(s(x),\ 0)} \to \mathrm{false},\\ &\mathrm{eq(0,\ s(x))} \to \mathrm{false},\\ &\mathrm{eq(s(x),\ s(y))} \to \mathrm{eq(x,\ y)},\\ &\mathrm{d(x,\ y)} \to \mathrm{if(eq(x,\ y),\ 0,\ s(d(x,\ s(y))))}\}.\end{aligned}$$ ∎

$\mathcal{R}$ に関する $\mathcal{T}^{\infty}_{\Omega}(\mathcal{F},\ \mathcal{X})$ 上のリダクション関係 $\to_{\mathcal{R}}$ を次で定義する：

$t \to_{\mathcal{R}} s \Leftrightarrow$

$$\exists p \in \mathrm{Dom}(t)\ \exists \sigma\ \exists l \to r \in \mathcal{R}\ [\ t/p = \sigma(l)\ \wedge\ s = t[p := \sigma(r)]\ ].$$

$\xrightarrow{*}_{\mathcal{R}}$ を $\to_{\mathcal{R}}$ の反射推移閉包とする．集合 $\mathrm{Red}(\mathcal{R}) = \{ t \in \mathcal{T}^{\infty}_{\Omega}(\mathcal{F},\mathcal{X}) \mid \exists \sigma\ \exists l \to r \in \mathcal{R}\ \ t = \sigma(l)\}$ の元を（$\mathcal{R}$ の）<u>redex</u> という．Redex を部分項にもたない項を<u>正規形</u>といい，その集合を $NF^{\infty}_{\Omega}(\mathcal{R})$ で表す．とくに，Ω を含まない有限な正規形の集合を $NF(\mathcal{R})$ で表す．項 t に対し $t \xrightarrow{*} s$ となる正規形 s が存在するとき，t は正規形 s をもつという．

TRS が<u>線形</u>であるとは，どの $l \to r \in \mathcal{R}$ についても，l に同一の変数記号が高々 1 度しか現れないことをいう．また，TRS が<u>無あいまい</u>であるとは，どの $l \to r$，$l' \to r' \in \mathcal{R}$ についても，l の（変数記号でない）部分項と l' とがユニファイ可能でないことをいう．ただし，同一の規則の左辺同士をユニファイさせるという自明な場合を除く．例1 の TRS は，線形かつ無あいまいである．

以下では，$\mathcal{R}$ は<u>線形かつ無あいまいと仮定する</u>．このとき $\mathcal{R}$ は合流性をみたす [3]．よって，項 t が正規形をもつならばそれは一意的である．

5．<u>項の表示(denotation)</u>

<u>Redex の候補</u>の集合 Cand($\mathcal{R}$) を次の(1)，(2)で定義する．(1) $t \in \mathrm{Red}(\mathcal{R}) \Rightarrow t \in \mathrm{Cand}(\mathcal{R})$，(2) $t, s \in \mathrm{Cand}(\mathcal{R})$，$p \in \mathrm{Dom}(t) \Rightarrow t[p:=s] \in \mathrm{Cand}(\mathcal{R})$．また，Cand($\mathcal{R}$) の Scott 位相における閉包を $\mathrm{Cand}^{-}(\mathcal{R})$ で表す．

［例2］ 例1 の$\mathcal{R}_d$に対し，例えば if(true, s(x), Ω) と eq(s(s(z)), 0) は Red($\mathcal{R}_d$)の要素だから，if(eq(s(s(z)), 0), s(x), Ω)$\in \mathrm{Cand}(\mathcal{R}_d)$である．このとき，全ての $t \sqsubseteq$ if(eq(s(s(z)), 0), s(x), Ω) が $\mathrm{Cand}^{-}(\mathcal{R}_d)$に含まれる． ∎

項 t の部分項で $\mathrm{Cand}^{-}(\mathcal{R})$ の要素となっているもの，とくにそれらのうち，t において最外側に位置するもの全てをΩで置き換えて得られる項を，$\omega_{\mathcal{R}}(t)$で表す[4]． また，$\omega_{\mathcal{R}}(s)=s$をみたす項$s$を<u>近似正規形</u>[4,5]といい，その集合を$ANF^{\infty}_{\Omega}(\mathcal{R})$で表わす．このとき，$NF(\mathcal{R}) \subseteq ANF^{\infty}_{\Omega}(\mathcal{R}) \subseteq NF^{\infty}_{\Omega}(\mathcal{R})$である．

［例3］ 例1 の$\mathcal{R}_d$に対し，例えば，eq(x, Ω)$\in ANF^{\infty}_{\Omega}(\mathcal{R}_d)$である．しかし，eq(0, Ω)$\in NF^{\infty}_{\Omega}(\mathcal{R}_d)$は，eq(0, Ω)$\sqsubseteq$eq(0, 0)$\in \mathrm{Red}(\mathcal{R}_d) \subseteq \mathrm{Cand}(\mathcal{R}_d)$だから，$ANF^{\infty}_{\Omega}(\mathcal{R}_d)$の要素でない． ∎

［定義1］ $\mathcal{R}$に関するtの表示$\mathcal{V}_{\mathcal{R}}(t)$を次のように定義する：

$$\mathcal{V}_{\mathcal{R}}(t) = \sqcup\{\omega_{\mathcal{R}}(s) \mid t \stackrel{*}{\rightarrow}_{\mathcal{R}} s\}$$ ∎

$t \stackrel{*}{\rightarrow}_{\mathcal{R}} s$のとき$\omega_{\mathcal{R}}(t) \sqsubseteq \omega_{\mathcal{R}}(s)$が成立することと$\stackrel{*}{\rightarrow}_{\mathcal{R}}$の合流性から，任意の$t$に対し $\{\omega_{\mathcal{R}}(s) \mid t \stackrel{*}{\rightarrow}_{\mathcal{R}} s\}$が有向集合であることが導かれる．よって，$\mathcal{V}_{\mathcal{R}}$は$\mathcal{T}^{\infty}_{\Omega}(\mathcal{F}, \mathcal{X})$上の全域関数である．なお，以下では，あいまいさの生じない限り，上で定めた各記法において添字などとして現れる$\mathcal{R}$を省略する．

［例4］ $\mathcal{R}_d$に対し，

$$\begin{aligned}
\mathcal{V}(\mathrm{d(x,\ y)}) = \sqcup\{&\Omega,\\
&\mathrm{if(eq(x,\ y),\ 0,\ s(}\Omega)),\\
&\mathrm{if(eq(x,\ y),\ 0,\ s(if(eq(x,\ s(y)),\ 0,\ s(s(}\Omega)))),\ \cdots\}\\
= \mathrm{if(eq}&\mathrm{(x,\ y),\ 0,}\\
&\mathrm{s(if(eq(x,\ s(y)),\ 0,}\\
&\qquad \mathrm{s(s(if(eq(x,\ s(s(y))),\ 0,}\\
&\cdots))))).
\end{aligned}$$ ∎

[定理1]

(1) $\mathcal{V}$は連続である.

(2) $\mathcal{V}\circ\mathcal{V}=\mathcal{V}$.

(3) $\mathcal{V}(\mathcal{T}^{\infty}_{\Omega}(\mathcal{F},\mathcal{X}))=ANF^{\infty}_{\Omega}$. ∎

すなわち，無あいまい線形 TRS は$\mathcal{T}^{\infty}_{\Omega}(\mathcal{F},\mathcal{X})$上の連続関数$\mathcal{V}$を与える．また，$\mathcal{V}$は retraction 関数だから，その値域$ANF^{\infty}_{\Omega}$は$\mathcal{V}$の不動点全体と一致し，値域$ANF^{\infty}_{\Omega}$も algebraic cpo である.

[定理2] $\mathcal{V}(t[s])=\mathcal{V}(\mathcal{V}(t)[\mathcal{V}(s)])$. ∎

したがって，関数 Apply-through(x) $\equiv$ $\lambda t.\lambda s.\mathcal{V}(t[s/x])$ は連続である．また，各々の項tに対し関数$\lambda s.\mathcal{V}(t[s])$も連続である．ここで，$t=_{\mathcal{V}}t'$ $\Leftrightarrow$ $\mathcal{V}(t)=\mathcal{V}(t')$とすると，

[系] $t=_{\mathcal{V}}t'$かつ$s=_{\mathcal{V}}s'$ならば，$t[s]=_{\mathcal{V}}t'[s']$．すなわち，$=_{\mathcal{V}}$は$\mathcal{T}^{\infty}_{\Omega}(\mathcal{F},\mathcal{X})$上の合同関係である. ∎

$\overset{*}{\leftrightarrow}$を→の反射推移対称閉包とする.

[命題1] $t\overset{*}{\leftrightarrow}t'$ $\Rightarrow$ $t=_{\mathcal{V}}t'$. ∎

一般にこの逆は成立しない．すなわち，有限回の書き換えでは一致しえない項tとt'が，いわば，無限の書き換えの極限で一致するような場合がある.

[例5] $\mathcal{R}$={f(x) → cons(x, f(s(x))),

g(x) → cons(x, g(s(x)))}

において，f(x) $=_{\mathcal{V}}$ g(x) であるが，f(x) $\overset{*}{\leftrightarrow}$ g(x) ではない. ∎

しかし，次の命題により，Ωを含まない有限正規形をもつ項については，上の命題の逆も成立する.

[命題2] $t'\in NF$のとき，$t\overset{*}{\leftrightarrow}t'$ $\Leftrightarrow$ $\mathcal{V}(t)=t'$ $\Leftrightarrow$ $t=_{\mathcal{V}}t'$. ∎

したがって，tがΩを含まない有限正規形をもつ場合，tの$\overset{*}{\leftrightarrow}$同値類と$=_{\mathcal{V}}$同値類は等しい.

上の命題2 により，項tがΩを含まない有限な正規形をもつ場合には，call-by-need のような正規化戦略による書き換えによって$\mathcal{V}(t)$が求められることになる.

そうでない場合に，$\mathcal{V}(t)$を求めるための十分条件を次に与える．このとき，$\omega(t)=\Omega$と仮定しても一般性は損なわれない．代入σに対し，任意の$n\geq 0$について$\sigma^n(s)$が近似正規形となるような項sを，<u>σに関して安定な近似正規形</u>という．

[定理3]　$\omega(t)=\Omega$をみたすtに対し，項s, s'とσが存在して($s\notin\mathcal{X}$),

(1) $t \xrightarrow{*} s[\sigma(s'[t/x'])/x]$であり，かつ

(2) $\hat{s}[\Omega/x]=s'[s[\Omega/x]/x']$が$\sigma$に関して安定な近似正規形であるとき，

$$\mathcal{V}(t)=\sqcup\{\Omega,\ s[\Omega],\ s[\sigma(\hat{s})[\Omega]],\ s[\sigma(\hat{s})[\sigma^2(\hat{s})[\Omega]]],\ \cdots\}.\ \blacksquare$$

[例6] 例1 の$\mathcal{R}_d$において，$t=\mathrm{d(y,\ z)}$に対し，$s=\mathrm{if(eq(y,\ z),\ 0,\ x)}$, $s'=\mathrm{x'}$とし，σを，$\sigma(\mathrm{y})=\mathrm{y}$かつ$\sigma(\mathrm{z})=\mathrm{s(z)}$とすると，上の定理の(1)が成立する．また，$\hat{s}[\Omega/\mathrm{x}]=\mathrm{if(eq(y,\ z),\ 0,\ }\Omega)$が(2)をみたすことも容易に確かめられるから，上の定理によって$\mathcal{V}(\mathrm{d(x,\ y)})$が求められる．$\blacksquare$

この結果は，$t \xrightarrow{*} s[\sigma_1(s_1[t]),\sigma_2(s_2[t]),\cdots,\sigma_n(s_n[t])]$ となる場合へ容易に拡張される．また，この結果は， recursive program schema の不動点意味論[2]の構文論的な拡張になっている．

6．<u>項の表示と書き換え操作における挙動</u>

以下では，議論の対象を有限項に限定し，項の表示$\mathcal{V}(t)$と，書き換え操作におけるtの挙動との関連を調べる．

$t \sqsubseteq_{\mathcal{V}} t' \Leftrightarrow \mathcal{V}(t)\sqsubseteq\mathcal{V}(t')$とする．擬順序$\lesssim_b$を

$$t\lesssim_b t' \Leftrightarrow \forall s\ \forall u\ \forall\sigma\ [\ s[\sigma(t)]\xrightarrow{*}u\in NF \Rightarrow s[\sigma(t')]\xrightarrow{*}u\ ]$$

と定義し，このとき，t'はtより<u>計算挙動に関して拡張的である</u>という．また，$t\sim_b t' \Leftrightarrow t\lesssim_b t' \wedge t'\lesssim_b t$ と定義して，tとt'は<u>計算挙動に関して等価である</u>とよむ．直観的には，上の定義における項sは，サブプログラムtとt'が埋めこまれるメインプログラムに相当し，代入σの適用はそれらのサブプログラムに対して実引数を与えることに相当する．正規形uはプログラム全体の実行結果である．

[例7] $\mathcal{R}_{d'}=\{\mathrm{d'(x,\ 0)}\rightarrow\mathrm{x},\ \mathrm{d'(s(x),\ s(y))}\rightarrow\mathrm{d'(x,\ y)}\}$とすると，TRS $\mathcal{R}_d\cup$

$\mathcal{R}_{d'}$において，$d(x,\ y) \lesssim_b d'(x,\ y)$． ∎

項 t がそれ単独で正規形をもつ場合，t は擬順序 $\lesssim_b$ に関して極大である(すなわち，$t \lesssim_b t'$ ならば $t \sim_b t'$)．また，そのような t の $\sim_b$ 同値類と(関係 $\overset{*}{\leftrightarrow}$ を有限項に制限したときの) $\overset{*}{\leftrightarrow}$ 同値類は等しい(命題2 参照)．

［補題1］

(1) $t \sqsubseteq_{\mathcal{V}} t' \Rightarrow t \lesssim_b t'$,

(2) $t =_{\mathcal{V}} t' \Rightarrow t \sim_b t'$． ∎

［系］ $t =_{\mathcal{V}} \Omega \Rightarrow \forall t'\ [\ t \lesssim_b t'\ ]$． ∎

上の補題とその系に対し，一般に逆は成立しない．例えば上の系は，表示 $\mathcal{V}$ に関して最小な項，すなわち，「無意味」とみなされる項が，計算挙動においてもそうであることを示している．しかし，逆に，計算挙動の観点から「無意味」とみなしうる項が，かならずしも $\mathcal{V}$ に関する最小元ではないのである．

［例8］ $\mathcal{R}_c = \{f(x) \rightarrow cons(x,\ f(s(x))),\ h(x) \rightarrow h(s(x))\}$ とすると，$h(x) =_{\mathcal{V}} \Omega \neq_{\mathcal{V}} f(x)$．ところが，どのような s と σ に対しても $s[\sigma(f(x))]$ と $s[\sigma(h(x))]$ はともに正規形をもたないから，$f(x) \sim_b h(x)$． ∎

このとき，次に述べる補題が重要な意味をもつ．まず，

［定義2］ $\mathcal{T}(\mathcal{F},\mathcal{X})$ 上のTRS $\mathcal{R}$ に対し，関数記号の集合 $\mathcal{G} \supseteq \mathcal{F}$ と $\mathcal{T}(\mathcal{G},\mathcal{X})$ 上の TRS $\mathcal{S}$ があり，(1) $\mathcal{S} \supseteq \mathcal{R}$ であり，(2) $\mathcal{V}_{\mathcal{S}}$ の $\mathcal{T}^{\infty}_{\Omega}(\mathcal{F},\mathcal{X})$ への制限が $\mathcal{V}_{\mathcal{R}}$ に等しいとき，$\mathcal{S}$ を<u>$\mathcal{R}$ の拡張</u>という．ただし，(3) このとき $\mathcal{S}$ も線形かつ無あいまいとする．また，このとき，$\mathcal{T}(\mathcal{G},\mathcal{X})$ を $\mathcal{T}(\mathcal{F},\mathcal{X})$ に対して<u>拡張した項集合</u>という． ∎

ここで，$\mathcal{R}$ による $\mathcal{T}^{\infty}_{\Omega}(\mathcal{F},\mathcal{X})$ 上の関係 $\sqsubseteq_{\mathcal{V}}$ と $=_{\mathcal{V}}$ が，その任意の拡張において保存されることに注意する．

［補題2］ $\mathcal{R}$ において $t \not\sqsubseteq_{\mathcal{V}} t'$ のとき，$\mathcal{R}$ の拡張 $\mathcal{S}$ が存在して，$\mathcal{S}$ においては $t \not\lesssim_b t'$． ∎

したがって，$t \neq_{\mathcal{V}} t'$ であるときは，無あいまい性と線形性を保ち，かつ正規形の集合も保存しながら(新しい関数記号を用いた)書き換え規則を追加し，$t \nsim_b t'$ とできる．すなわち，計算挙動の観点から t と t' を判別可能とできる．

[例9] 例8 の$\mathcal{R}_c$に対し，拡張$S=\mathcal{R}_c \cup \{car(cons(x, y)) \to x\}$を考えると，$S$においては，car(f(x))$\overset{*}{\twoheadrightarrow}$x∈$NF$．一方，car(h(x))は正規形をもたないから，f(x) $\not\lesssim_b$ h(x).　■

そして，上の補題から，

[定理4]

(1) $\mathcal{R}$において $t \sqsubseteq_{\mathcal{V}} t'$ ⇔ 任意の$\mathcal{R}$の拡張において $t \lesssim_b t'$，

(2) $\mathcal{R}$において $t =_{\mathcal{V}} t'$ ⇔ 任意の$\mathcal{R}$の拡張において $t \sim_b t'$.　■

次に，λ算法におけるλ式の可解性(solvability)[5]に相当する概念を定める．まず，項sについて，$s \overset{*}{\twoheadrightarrow}_{\mathcal{R}} s'$である任意の$s'$に対し$x \in Var(s')$となるとき，項$s$は<u>$\mathcal{R}$において変数記号$x$を保存する</u>という．

[定義3] $t \in \mathcal{T}(\mathcal{F}, \mathcal{X})$に対し，$\mathcal{R}$の拡張$S$と，項$u$，$S$において$x$を保存する項$s$，および代入$\sigma$が存在し，

$$s[\sigma(t)/x] \overset{*}{\twoheadrightarrow}_S u \in NF(S)$$

となるとき，項tは<u>可解</u>であるという．ただし，sとuは拡張した項集合の要素であり，代入σは拡張した項集合上のものである．　■

例9 に示されるように，項f(x)は可解であり，項h(x)はそうでない．

上の定義で，項sがxを保存するという条件を除くと，項の可解性が自明な性質になってしまうことに注意する(例えば，新しい関数記号fとcを用いた規則$f(x) \to c$を追加すれば，任意のtに対し$f(t) \to c \in NF$)．また，拡張Sに対する無あいまい性の制約を除いてもやはり自明な性質となる(新しい関数記号cを用いた規則$t \to c$を追加すれば，任意のtは正規形をもつが，tが正規形でないかぎり TRS はあいまいとなる)．

この定義がλ式の可解性によく対応していることは，λ式の場合と相似的な次の命題が成立することからわかる([5]，Corollary4.2 参照)．

[命題3] 次の3条件は互いに必要十分である．

(1) 項 $t \in \mathcal{T}(\mathcal{F}, \mathcal{X})$は可解である．

(2) 任意の$t' \in \mathcal{T}(\mathcal{F}, \mathcal{X})$に対し，$\mathcal{R}$の拡張$S$，拡張した項集合の項$s$と代入$\sigma$が

存在して，$s[\sigma(t)/x] \twoheadrightarrow_{S} t'$.

(3) $\mathcal{R}$の拡張S，拡張した項集合の項sと代入σが存在して，ある$y \in \mathrm{Var}(s)$に対し，$s[\sigma(t)/x] \twoheadrightarrow_{S} y$. ∎

この可解性の概念を用いて，$t =_{\mathcal{V}} \Omega$であるための必要十分条件が表される．

［定理5］ 次の3条件は互いに必要十分である．

(1) $t \in \mathcal{T}(\mathcal{F}, \mathcal{X})$は可解でない．

(2) 任意の$t' \in \mathcal{T}(\mathcal{F}, \mathcal{X})$に対し，どのような$\mathcal{R}$の拡張においても $t \lesssim_{b} t'$.

(3) $t =_{\mathcal{V}} \Omega$. ∎

すなわち，拡張に関する条件(2)，(3)をみたしながら書き換え規則を追加する限り計算挙動に関して「無意味」であり続ける項全体と，表示に関して最小な項全体が一致する．また，これはλ算法のD_{∞}モデルとλ式の可解性に関する Wadsworth[5] の結果に対応する．

7．結論

近似正規形の概念を用いて通常の正規形意味論を包含する新しい意味論を提案した．すなわち，無あいまい線形 TRS の意味を無限項集合上の連続関数$\mathcal{V}$として定式化し，その諸性質を明らかにした上で，$\mathcal{V}$から定まる項の等価関係$=_{\mathcal{V}}$を，項の計算挙動から定まる等価関係により特徴づけた．この結果によれば，表示$\mathcal{V}$に関して最小の項(「無意味」な項)とは，正規形をもたない項を指すのではなく，とくにそのなかでも，可解でない項を指す．

さて，Wadsworth[5]のなかでは，本稿の定義1 にあたるものが，λ式に対する簡約化およびその近似正規形と，λ式のD_{∞}における表示との関係を示す定理として導かれ([5], Theorem 5.2)，これを用いてλ式の表示と計算挙動の関係を示す結果が導かれる．それは本稿の定理4，5にあたるものであり，すなわち，最終的な結果は両者においてよく対応している．Wadsworth が定理としたものをわれわれが定義とした理由は，TRS においては，λ算法に対するD_{∞}モデルのような意味領域を，あらかじめ構文論と独立に構成することが困難である（すなわち，意味領域の構成

の際に書き換え規則の情報が必要である）という点にある．

また，本稿で定式化した TRS の拡張という概念は，D_∞の構成の際に Scott が用いた手法に対してある対応を示している．現在われわれは，この概念を用いて，無限項集合とその上の連続関数の集合が同型であるような領域を構成し，そこにTRSの意味である連続関数を埋めこむことを検討している．

謝辞

日頃ご指導賜わる豊技大本多波雄学長，名大福村晃夫教授，種々御討論下さる阿曽弘具助教授，三重大坂部俊樹助教授ならびに研究室の皆様に深謝します．なお，本研究は一部文部省科研費（特定研「多元知識情報」課題番号601103）の援助を受けている．

文献

[1] B.Courcelle, Fundamental Properties of Infinite Trees, Theor. Comp. Sci. 25, 2, pp.95-170(1983).

[2] B.Courcelle and M.Nivat, The Algebraic Semantics of Recursive Program Schemes, LNCS, Springer-Verlag, 64, pp.16-30(1978).

[3] G.Huet, Confluent Reductions, J. ACM, 27, 4, pp.795-821(1980).

[4] G.Huet and J.-J.Levy, Call by need computations in non-ambiguous linear term rewriting systems, Raport Laboria 359, IRIA(1979).

[5] C.Wadsworth, The relation between computational and denotational properties for Scott's D_∞-models of the lambda-calculus, SIAM J. Comput. 5, pp.488-521(1976).