数理解析研究所講究録
592巻 1986年 127-135

ある準楕円型作用素のGevrey指数について

京大・理　大鍛治　隆司　(Takashi Ōkaji)

1. 序

X_jを$\mathbb{R}^n$の領域Ωで定義された実ベクトル場とし，Lを次の形の作用素とする：

$$L = \sum_{j=1}^{d} X_j^2 + X_0$$

この時，$\{X_j\}_{j=0}^{d}$が$x \in \Omega$の各点で条件；あるrが存在して，X_jとその長さrまでのcommutatorが$T_x(\Omega)$を生成する；を満たせばLはC^∞-準楕円型になることが知られている。([2])

我々は以下上の条件を仮定して，さらにLのGevrey族γ^sにおける準楕円性及び出来ればその最小指数（これを作用素のGevrey指数と呼ぶ）を求めることが目的である。

2. 結果

$I = (i_1, i_2, \cdots, i_p)$　$1 \leq p < +\infty$　に対し　(i_j：非負整数，$0 \leq i_j \leq d$)

$\langle I \rangle = \sum_{j=1}^{p} \varepsilon_j i_j$　　$\varepsilon_j = 1$ if $i_j \neq 0$　　$\varepsilon_j = 2$ if $i_j = 0$.

$X_I = [X_{i_1}, [X_{i_2}, \cdots [X_{i_{p-1}}, X_{i_p}]] \cdots]$ if $p \geq 2$, $X_I = X_{i_1}$ if $p=1$.

$\mathfrak{M} = \{ X_I$ が $T_x(\Omega)$ を生成する時の multi-index I の集合$\}$

$\bar{s}_x(\mathfrak{M}) = \sup_{I \in \mathfrak{M}} \langle I \rangle$, $s_x(L) = \inf_{\mathfrak{M}} \bar{s}(\mathfrak{M})$ とおく。

我々は簡単の為、X_j の係数はすべて解析的とする。この時まず最初に次の定理を得る。

<u>定理 1</u> $s \geq s_{x_0}(L)$ ならば、L は点 x_0 で γ^s-準楕円型である。即ち、ある x_0 の近傍 ω が存在して、任意の $\omega' \subset \omega$ に対し、$Lu \in \gamma^s(\omega') \Longrightarrow u \in \gamma^s(\omega')$ が成立する。

ここで現われた $s_{x_0}(L)$ は、最小であるかという観点から見て optimal ではあるが、best possible ではないことが容易にわかる。しかし、一般の場合は複雑であるので、簡単な場合について考察すると、Gevrey 指数について次の3つの結果を得る。

<u>定理 2</u> $a_j(x) \in \gamma^2$, $a_j(x) > 0$, $k_j \in \mathbb{N}$ に対し

$$L_1 = \sum_{j=1}^{n-1} D_j^2 + i\left(\sum_{j=1}^{n-1} x_j^{2k_j} a_j(x)\right) D_n \quad , \quad D_j = \frac{1}{i}\partial_{x_j}$$

とする。この時、L_1 の Gevrey 指数は 2 である。即ち、$^\forall s \geq 2$ に対し、L_1 は γ^s-準楕円型（各点で）だが、$1 \leq s < 2$ に対し、γ^s-準楕円型でない。

<u>定理3</u>　$k \leq \ell$ を非負整数

$$L_2 = D_1^2 + x_1^{2k} D_2^2 + x_1^{2\ell} D_3^2 \quad \text{on } \mathbb{R}^3$$

とする。この時、原点における L_2 の Gevrey 指数は $\frac{\ell+1}{k+1}$ である。

<u>定理4</u>

$$L_3 = \sum_{j=1}^{n-1} D_j^2 + i x_1 D_n$$

に対して、L_3 の原点における Gevrey 指数は 2 である。

3. 十分性の証明の方針及び考え方。

i) 定理1は、次の補題より従う。

<u>補題1</u>　$P = \sum_{|\mu:\alpha| \leq m} C_\alpha X^\alpha$, $C_\alpha \in \gamma^s$, $|\mu:\alpha| = \frac{\alpha_1}{\mu_1} + \cdots + \frac{\alpha_n}{\mu_n}$

が次のアプリオリ評価式をみたすと仮定する。

$$\sum_{|\mu:\alpha| \leq m} \| X^\alpha u \|_{\delta(m-|\mu:\alpha|)} \leq C(\|Pu\|_0 + \|u\|_0) \quad u \in C_0^\infty(\omega)$$

($\|\cdot\|_p$ は Sobolev ノルム)　この時 P は $s \geq \delta^{-1}$ に対し γ^s-準楕円型である。

実際、[4] より、L に対して

$$\sum_{j=1}^{d} \| X_j^2 u \| + \| X_0 u \| + \| \langle D_x \rangle^{2/k} u \| \leq C(\|Pu\| + \|u\|)$$

$u \in C_0^\infty(\omega)$ が成り立つから、ここで $k = s_{x_0}(L)$, ω は x_0 の十分小さな近傍である。($\|\cdot\| = \|\cdot\|_0$)

一方補題1はMorrey-Nirenbergの方法［cf [1]］で示される。

ii) L_1についてもMorrey-Nirenbergの方法で示されるが，出発点となる不等式は次のものである；Ωを原点の十分小さな近傍とした時，任意の$v \in C_0^\infty(\Omega)$に対し，

(1) $\sum_{j=1}^{d}\{\|D_j^2 v\| + \|x_j^{2k_j} D_n v\|\} + \|v\| \leq C\|L_1 v\|$

超局所的に考えれば，一番問題となるのは，$(0,\xi_0)$の近くである。［$\xi_0=(0,0,\cdots 0,1)$］そこで，Γ_j $(j=1,2)$をξ_0の錐近傍$\Gamma_1 \ll \Gamma_2$，W_jを$\mathbb{R}^n$の原点の近傍$W_1 \ll W_2$とした時，次の性質を持つ函数$\Phi_N(\xi)$，$\varphi_N(x)$を考える。

$$|D_\xi^{\alpha+\beta}\Phi_N(\xi)| \leq K_\beta\, d^{-|\beta|}(KN/d)^{s|\alpha|}(1+|\xi|)^{-|\alpha|-|\beta|} \qquad |\alpha|\leq N$$

$$\Phi_N(\xi)=1 \quad \text{on } \Gamma_1\cap\{|\xi|\geq N\}, \qquad \operatorname{supp}\Phi_N \subset \Gamma_2$$

(2) $|D_x^{\alpha+\beta}\varphi_N(x)| \leq C_\beta\, d^{-|\beta|}(CN/d)^{s|\alpha|} \qquad |\alpha|\leq N$

$$\varphi_N(x)=1 \quad \text{on } W_1 \qquad \operatorname{supp}\varphi_N \subset W_2$$

ここで$d>0$は$\Gamma_1\cap\{|\xi|=1\}$と$\{\Gamma_2\cap\{|\xi|=1\}\}^c$及び$W_1$と$W_2^c$の距離である

この時γ^2のwave front setについて，

$$(0,\xi_0)\notin WF_2(L_1 u) \Rightarrow (0,\xi_0)\notin WF_2(u)$$

が成り立つ。即ち，ある原点の近傍Uが存在して，

$$\sup_U |D_x^\alpha \Phi_N(D)u(x)| \leq C_0(CN)^{2|\alpha|} \qquad \text{if } |\alpha|\leq N$$

が成立する。

実際，$U_0 \supset \cdots \supset U_{\frac{k}{N}} \supset U_{\frac{k+1}{N}} \supset \cdots \supset U_1 = U$を$\overline{U}_\varepsilon = \{x\in U_\varepsilon : d(x,U)$

$\leqslant \delta(1-\varepsilon)\}$ となる開集合，$\varphi_{N,K}$ として，(2)で $\omega_1 = U_{\frac{K+1}{N}}$，$\omega_2 = U_{\frac{K}{N}}$ としたものを取る時，(1)の v として，

$$v(x) = \varphi_{N,K}\, D_N^K\, \Phi_N(D)\, u \qquad K = N,\ N-1,\ \cdots$$

をとれば，

$$\begin{aligned}
\|\varphi_{N,N} D_n^N \Phi_N(D) u\| &\leqslant C_0 \|L_1 \varphi_{N,N} D_n^N \Phi_N(D) u\| \\
&\leqslant C_0 \{ \|[L_1, \varphi_{NN}] D_n^N \Phi_N(D) u\| + \|\varphi_{N,N}[L_1, \Phi_N] D_n^N u\| \\
&\qquad + \|\varphi_{NN} \Phi_N [L_1, D_n^N] u\| + \|\varphi_{N,N} D_n^N \Phi_N L_1 u\| \} \\
&\leqslant C_0 (CN)^2 \|L_1 \varphi_{NN-1} D_n^{N-1} \Phi_N(D) u\| + C_0 (CN)^{2N} \\
&\ \ \vdots \\
&\leqslant C_0' (C'N)^{2N}
\end{aligned}$$

が得られる．ここで，L の形より，$x \notin \{x_1 = x_2 = \cdots = x_{n-1} = 0\}$ 又は $\xi \notin \{\xi_1 = \cdots = \xi_{n-1} = 0\}$ では $(x, \xi) \notin WF_2(u)$ となることを用いた。

iii) L_2 については

$$\|u\| + \sum_{j=1}^{3} \|D_j^2 u\| + \|\langle D_3\rangle^{\frac{2}{k+1}} u\| + \|\langle D_2\rangle^{\frac{2}{k+1}} u\| \leqslant C \|L_2 u\|$$

を出発点とする．ii)と同様にすれば，結局，$\|x_1^{2k} D_2 D_3 v\|$ の項の処理が一番問題となる．そこで，

$$\|ABCv\|^2 = (A^2 v, (BC)^2 v), \quad \|BCv\|^2 = (B^2 v, C^2 v)$$

だから，$\hat{A}\hat{B}\hat{C} \leq \frac{\hat{A}^p}{p} + \frac{\hat{B}^q}{q} + \frac{\hat{C}^r}{r} \qquad \frac{1}{p} + \frac{1}{q} + \frac{1}{r} = 1$.

$p = 2,\ q = \frac{2l}{k},\ r = \frac{2l}{l-k}$，$\hat{A} = x_1^k D_2 v$，$\hat{B} = (x_1^l D_3)^{\frac{k}{l}} v$，$\hat{C} = (D_3^{\frac{1}{k+1}})^{\frac{l-k}{l}} v$

を用いれば，

$$\|D_3^N \Phi_N(D) u\|_{L^2(U)} \leqslant C_0 (CN) \|L \varphi_{NN-1} D_3^{N-\frac{k+1}{l+1}} \Phi_N(D) u\| + (\text{negligeable terms})$$

となる。従ってこれより，$N \sim D_3^{\frac{k+1}{\ell+1}}$ だから，$N^{\frac{\ell+1}{k+1}} \sim D_3$

故に，$\| D_3^N \Phi_W(D) u \|_{L^2(U)} \leq C_0 (CN)^{\frac{\ell+1}{k+1} N}$ を得る．

iv) L_3 の場合は Parametrix を構成することによって示される．$x_0 = 0$，$\xi_0 = (0, \cdots, 0, 1)$ の所が一番問題である．そこで，phase $\phi(x, y, \xi) = (x_n - y_n, \xi) + x_1 y_1 \xi_n$ を持つ Fourier integral operator

$$Fu = \int e^{i\phi(x,y,\xi)} u(y)\, dy\, d\xi$$

を考えることにより，L_3 の代わりに，$P = F^{-1} L F$ ：

$$P = D_1 + i \left(x_1^2 D_n^2 + \sum_{j=2}^{n-1} D_j^2 \right)$$

について考察することにする。すると次の関係式

$$PK \sim Id \quad \text{at } (x_0, \xi_0)$$

より直ちに

$$Ku = \int_{-T}^{t} \int e^{ix\cdot\xi} K(x, t, s, \xi) \hat{u}(s, \xi)\, ds\, d\xi$$

$$K(x, t, s, \xi) = \exp\left[- \int_s^t \left(\tau^2 \xi_n^2 + \sum_{j=2}^{n-1} \xi_j^2 \right) d\tau \right]$$

とおけばよいことがわかる。この時，

(3) $$|\partial_\xi^\beta K(x, t, s, \xi)| \leq C_0 C^{|\beta|} (|\beta|^2/|\xi|)^{|\beta|/3} \exp\left[-|t-s|^3 |\xi_n|^2/6 \right]$$

が得られる。ここで

$$\gamma^\sigma - S^\mu_{\rho,\delta} \ni a(x, \xi) \iff a(x, \xi) \in C^\infty,\ R(|\beta| + 1) \leq |\xi|\ (R > 0)$$

に対し，$|\partial_x^\alpha \partial_\xi^\beta a(x, \xi)| \leq C_0 C^{|\alpha+\beta|} (|\alpha|^\sigma + |\alpha|^{\sigma(1-\delta)} |\xi|^\delta)^{|\alpha|} (|\beta|^\sigma/|\xi|)^{\rho|\beta|} (1+|\xi|)^\mu$

と定義すれば，(3) は，$K(x, t, s, \xi)$ が (x, ξ) に関して $\gamma^2 - S^0_{\frac{1}{3}, 0}$ に属すということを意味している。よって P^* を考えることにより

$$WF_2(u) \subset WF_2(Pu)$$

を得る。

一方(3)については、ξ_j $(2 \leq j \leq n-1)$ をcomplexにまで拡げた時、

$$\left|\int_s^t \xi_j^2 \, d\tau\right| \leq \frac{1}{3}|t-s|^3 \xi_n^2 + |(\mathrm{Im}\,\xi_j)\xi_n^{-\frac{1}{3}}|^3$$

より、$-\int_s^t (\tau^2 \xi_n^2 + \sum_{j=2}^{n-1} \xi_j^2)\, d\tau \leq -\frac{2}{3}|t-s|^3 \xi_n^2 + |(\mathrm{Im}\,\xi_j)\xi_n^{-\frac{1}{3}}|^3$

となり、又整函数 $f(z)$ が $|f(z)| \leq C\exp(|\mathrm{Im}\,z|^3)$ を満たせば、

$x \in \mathbb{R}$ に対し、$|\partial_x^\alpha f(x)| \leq C_0 C^\alpha \alpha!^{\frac{2}{3}}$

となることより従う。

4. 必要性

i) 定理1.2.4に関しては、問題の作用素が $x \neq 0$ では半楕円型作用素であるので、[3]の結果より、$x \neq 0$ では $1 \leq s < 2$ に対し γ^s-準楕円型でなく、その集積点である原点でも同じ事である事より従う。

ii) L_2 に関しては、まず1つ補題を用意する。

$$P = \sum_{\langle \sigma, \gamma \rangle = \langle \rho, \alpha \rangle - m} C_{\alpha\gamma}\, x^\gamma D_x^\alpha \quad , \quad C_{\alpha\gamma} \in \mathbb{C}, \ \langle \sigma, \gamma \rangle = \sum_{j=1}^n \sigma_j \gamma_j, \ \langle \rho, \alpha \rangle = \sum_{j=1}^n \rho_j \alpha_j$$

$1 \leq \rho_1 \leq \cdots \leq \rho_n$, $1 \leq j \leq d$ の時 $\sigma_j = \rho_j = 1$, σ_j, ρ_j は非負有理数

$$P_{\xi''} = \sum_{\langle \sigma, \gamma \rangle = \langle \rho, \alpha \rangle - m} C_{\alpha\gamma}\, x^\gamma \xi''^{\alpha''} D_{x'}^{\alpha'} \quad , \quad x' = (x_1, \cdots, x_d), \ x = (x', x'')$$

この時

<u>補題2</u>　ある K, $(d \leq K \leq n)$ とある $\xi'' \in \mathbb{C}^{K-d} \times \mathbb{R}^{n-d-K} \setminus \{0\}$ が存在して，$K \leq j \leq n$ に対し $\sigma_j = 0$，$x' \in \mathbb{R}^d$ に対し，

$$|u(x')| \leq C \exp\left\{ C' \sum_{j=1}^{K-1} |x_j|^{p_n/p_j} \right\} \quad (C, C' > 0)$$

となる．$P_{\xi''} u = 0$ の恒等的に零でない解 $u(x, \xi'')$ が存在すれば，$1 \leq s < p_n/p_K$ に対し，L は原点で γ^s-準楕円型でない。

実際，$Pv = 0$ の解として

$$v(x) = \int_0^\infty \exp\left[i \sum_{j=K}^{n} \xi_j \lambda^{p_j} x_j \right] u(\lambda x', \lambda^{p_{d+1}} x_{d+1}, \cdots, \lambda^{p_{K-1}} x_{K-1}) e^{-R\lambda^{p_K}} d\lambda$$

が取れ，$R > 0$ を十分大にすれば，$v \notin \gamma^{p_n/p_K - \varepsilon}$ $(\forall \varepsilon > 0)$ となることが，$\partial_n^N v(x)$ を考えることより容易にわかる。

L_3 の場合には，

$$P_{\xi''} = -\left(\frac{d}{dx_1}\right)^2 + x_1^{2K} \xi_2^2 + x_1^{2\ell} \xi_3^2 \qquad K \leq \ell$$

$$p_1 = \sigma_1 = 1, \quad p_2 = K+1, \quad \sigma_2 = 0, \quad p_3 = \ell+1, \quad \sigma_3 = 0.$$

となるから，$\xi_2 = 1$，ξ_3 は Schrödinger 作用素 $P_{\xi''}$ が零固有値を持つように選ぶ．（これは，固有値のパラメーターに関する連続性と，第1固有値が，$\xi_3^2 \to -\infty$ の時，負の無限大に近づくことより可能）と補題が適用されて，L_3 は $1 \leq s < \frac{\ell+1}{K+1}$ に対し，原点で γ^s-準楕円型でないことが従う。

参考文献

[1] M. Durand Regularite Gevrey d'une classe d'operateurs hypoelliptiques
J. Math. pure et appl. 51 (1978) 323-366

[2] L. Hörmander Hypoelliptic second order differential equations
Acta Math. 119. (1967) 147-171

[3] T. Ōkaji On the lowest index for the semi-elliptic operator to be Gevrey hypoelliptic.
J. Math. Kyoto. Univ. 25 (1985) 693-701

[4] L.P. Rothschild - E.M. Stein. Hypoelliptic differential Operators and nilpotent groups
Acta Math. 137 (1977) 247-320.