

Title	土橋カスプ特異点の無限小変形(複素解析的特異点と可換環)
Author(s)	尾形, 庄悦
Citation	数理解析研究所講究録 (1986), 595: 30-38
Issue Date	1986-07
URL	http://hdl.handle.net/2433/99530
Right	
Type	Departmental Bulletin Paper
Textversion	publisher

土橋カスプ特異点の無限小変形

東北大理 尾形庄悦 (Shoetsu Ogata)

§0. 序. (V, p) を $n (\geq 2)$ 次元正規孤立特異点とする。ここでは (V, p) が“カスプ”と呼ばれる場合を考察する。

Hirzebruch は [H] で Hilbert modular 多様体 $(\mathbb{H}^n / \mathrm{SL}_n(\mathcal{O}))^+$ $= (\mathbb{H}^n / \mathrm{SL}_n(\mathcal{O})) \cup \{p_1, \dots, p_n\}$ を研究し, $n=2$ のときカスプ特異点 p_i の最小特異点解消を与えた。ここに $\mathbb{H} = \{z \in \mathbb{C} : \mathrm{Im} z > 0\}$ は上半平面, \mathcal{O} は総実 n 次代数体の整数環である。これが、カスプ特異点の現われた最初である。土橋はこれを一般化して, tube 領域 \mathcal{O} とある離散群 G とを使って, $V \setminus \{p\} \cong \mathcal{O}/G$ となるような“土橋カスプ特異点”を構成した [T1]。ここでは, tube 領域が第一種 Siegel 領域とも呼ばれることから, $V \setminus \{p\} \cong \mathcal{O}/G$ で \mathcal{O} が第二種 Siegel 領域になっている正規孤立特異点 (V, p) も“カスプ”と呼ぶことを提案したい。

本論では, この拡張されたカスプ特異点が正規孤立 Du Bois 特異点であることと, $n \geq 3$ のときにはこれが equisingular であることを示す [O2]。

次に, (V, p) が n 次元 Hilbert modular カスフ特異点のとき Freitag と Viehweg のより, $n \geq 3$ ならば (V, p) は "rigid", つまり変形が自明であることが示された [FK]. ここでは, $n=3$ のとき土橋カスフ特異点は一般に rigid であることを示す [O1]. この結果をもとに土橋は (V, p) の versal 族を構成した [T2].

§1. カスフ特異点の構成

1.1. 第二種 Siegel 領域

$r \geq 1, m \geq 0, n := r+m \geq 2$ を整数とし, N を階数 r の自由 \mathbb{Z} -加群とする. $C \subset N_{\mathbb{R}} = N \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R}$ を開凸錐で $\bar{C} \cap (-\bar{C}) = \{0\}$ なるものとする. $H: \mathbb{C}^m \times \mathbb{C}^m \longrightarrow N_{\mathbb{C}} = N \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{C}$ を Hermit 形式で

$$(i) \quad H(\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2, v) = \lambda_1 H(u_1, v) + \lambda_2 H(u_2, v), \quad \lambda_i \in \mathbb{C}, u_i, v \in \mathbb{C}^m$$

$$(ii) \quad \overline{H(u, v)} = H(v, u), \quad \bar{} \text{ は複素共役を表わす.}$$

$$(iii) \quad H(u, u) \in \bar{C}, \quad u \in \mathbb{C}^m, \quad \bar{C} \text{ は } C \text{ の } N_{\mathbb{R}} \text{ における閉包.}$$

$$(iv) \quad H(u, u) = 0 \text{ ならば } u = 0.$$

を満たすものとする. このとき

$$\mathcal{D} = \mathcal{D}(H, C) := \{(z, u) \in N_{\mathbb{C}} \times \mathbb{C}^m : \operatorname{Im} z - H(u, u) \in C\}$$

とおいて, これを H と C に付随した第二種 Siegel 領域という.

$$\text{群 } N(\mathcal{D}) := \{(a, c) \in N_{\mathbb{R}} \times \mathbb{C}^m\} \text{ が } \mathcal{D} \text{ 上に}$$

$$(a, c)(z, u) = (z + a + 2\sqrt{-1} H(u, c) + \sqrt{-1} H(c, c), c + u)$$

として作用することに注意しておく。

1.2. Lattice data.

$L \subset \mathbb{C}^m$ を階数 $2m$ の自由 \mathbb{Z} -加群で, その商 \mathbb{C}^m/L がコンパクトなものとする。 $\Gamma \subset \text{Aut}(N)$ を L を保つ部分群で, 更に次の条件を満たすものとする。

a) Γ は $D := \mathbb{C}/\mathbb{R}_0$ 上に固有不連続かつ固定点なしに作用する。

b) 商 D/Γ はコンパクト。

c) 群準同型 $\Gamma \ni \gamma \mapsto \tilde{\gamma} \in GL_m(\mathbb{C})$ で

$\gamma H(u, u) = H(\tilde{\gamma}u, \tilde{\gamma}u)$ かつ $\tilde{\gamma}L \subset L$ なるものがある。

d) すべての $l, l' \in L$ に対し, $H(l, l') - H(l', l) \in \sqrt{-1}\mathbb{N}$ 。

1.3. 構成.

$T_N := N \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{C}^*$ を 1 次元代数的 T -トラスとする。 $N, L \in N(\otimes)$ の部分群とみて

$$\begin{array}{ccc} \otimes / N & \subset & T_N \times \mathbb{C}^m \\ \downarrow & & \downarrow \\ \otimes / N \times L & \subset & (T_N \times \mathbb{C}^m) / L \end{array}$$

を考える。 $(T_N \times \mathbb{C}^m) / L$ は Abel 多様体 $A := \mathbb{C}^m / L$ 上の T_N -束になっている。 その推移関数は, $u \in \mathbb{C}^m, l \in L$ に対し

$$\exp(2\pi(2H(u, l) + H(l, l))) \in T_N$$

である。但し, $\exp: N_{\mathbb{C}} \rightarrow T_N = N \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{C}^*$ とおいた。

今, $C \cup \{0\}$ の Γ -admissible rational partial polyhedral 分割 $\hat{\Delta}$ で $\hat{\Delta} \bmod \Gamma$ が有限となるものをとる。このとき

$$\begin{array}{ccc} T_N \times \mathbb{C}^m & \subset & T_N \text{emb}(\hat{\Delta}) \times \mathbb{C}^m \\ \downarrow & & \downarrow \\ (T_N \times \mathbb{C}^m)/L & \subset & (T_N \text{emb}(\hat{\Delta}) \times \mathbb{C}^m)/L \end{array}$$

となる。

Γ の作用による商をとるために, “うまい”作用域をとりたい。そのために, 実解析的写像 $(T_N \times \mathbb{C}^m) \ni (t, u) \mapsto \text{ord}(t) - H(u, u) \in \mathbb{N}_{\mathbb{R}}$ を拡張して, $\Phi: (T_N \text{emb}(\hat{\Delta}) \times \mathbb{C}^m) \rightarrow M_{\mathbb{C}}(N, \hat{\Delta})$ を作る。(トラス埋込に関する記号は [MO] に依る。) この写像は L -不変だから, $(T_N \text{emb}(\hat{\Delta}) \times \mathbb{C}^m)/L \rightarrow M_{\mathbb{C}}(N, \hat{\Delta})$ が誘導され, これも同じ Φ で表わす。この Φ は, Γ -同変である。今,

$$\tilde{U} := \Phi^{-1}(C \text{ の } M_{\mathbb{C}}(N, \hat{\Delta}) \text{ 内での閉包の内部})$$

$$\tilde{Y} := \tilde{U} \setminus \Phi^{-1}(C)$$

とおく。 Γ は \tilde{U}, \tilde{Y} 上に固有不連続かつ固定点なしに作用するから, その商を $U := \tilde{U}/\Gamma, X := \tilde{Y}/\Gamma$ とおく。

X を contract して正規孤立特異点を作りたい, そのための核関数を利用する。 $(z, u) \in \tilde{U}$ に対し

$$\mathcal{K}(z, u) := \int_{\mathbb{C}^*} \exp(-\langle \text{Im } z - H(u, u), t \rangle) \det \Theta(t) \phi_{\mathbb{C}^*}(t)^{-1} dt$$

とみく。ここに, $C^* = \{y \in \mathbb{N}_R^* : \langle x, y \rangle > 0 \ \forall x \in \bar{C} \setminus \{0\}\}$ は C の
 双対錐で, ϕ_{C^*} は C^* の特性関数 [V] である。 $\Theta(t) \in M_m(\mathbb{C})$ は
 \mathbb{C}^m の内積 $(,)$ を固定したとき

$$\langle H(u, v), t \rangle = (v, \Theta(t)u) \quad \forall u, v \in \mathbb{C}^m, t \in \mathbb{N}_R^*$$

で定義される Hermit 対称行列である。更に, $t \in C^*$ に対して
 $\Theta(t)$ は正定値になる。 Ψ は, \mathcal{O} 上正値で, その Hessian は
 正定値であり, N, L -不変, 更に $g \in \Gamma$ に対し

$$\Psi(gz, \tilde{g}u) = |\det g|^{-2} |\det \tilde{g}|^{-2} \Psi(z, u)$$

である。従って, Ψ は $V \setminus X$ 上の関数とみなされる。 X 上で
 $\Psi \equiv 0$ と定めると, Ψ は V 上 pluri-subharmonic かつ $V \setminus X$ 上
 strictly pluri-subharmonic となるので, X を contract するこ
 とができる (cf. [GR]); $\pi: (V, X) \rightarrow (V, p)$.

注意 1. $m=0$ のとき, (V, p) は土橋カスプ特異点に他なら
 ない。

2. $r=1$ のとき, \mathcal{O} は $n=m+1$ 次元超球と同型にな
 り, \mathbb{C} のとき X は Abel 多様体 $A = \mathbb{C}^m/L$ と同型で, (V, p) は
 A 上の affine cone になる。

§2. 結果.

定理 2.1. §1 で構成された (V, p) について,

$$(R^i \pi_* \mathcal{O}_V)_p \cong H^i(X, \mathcal{O}_X) \quad (i \geq 1),$$

$$R^i \pi_* \mathcal{O}_V(-X) = 0 \quad (i \geq 1).$$

特に, (V, p) は正規孤立 Du Bois 特異点である。

2.2. 無限小変形について.

ここで, (V, p) の変形とは, 複素解析空間の芽の間の平坦射 $f: (\mathcal{V}, 0) \rightarrow (\mathcal{T}, 0)$ と同型 $(V, 0) \xrightarrow{\sim} (f^{-1}(0), 0)$ の組の意味である。 (V, p) の一次無限小変形とは, (V, p) の変形 $f: (\mathcal{V}, 0) \rightarrow (\mathcal{T}, 0)$ であって, $\mathcal{T} = \text{Spec } \mathbb{C}\{\varepsilon\}/(\varepsilon^2)$ のこととする。我々の興味があるのは $T_V := \text{Ext}_{\mathcal{O}_V}^1(\Omega_V^1, \mathcal{O}_V)$ である。これは (V, p) の一次無限小変形の分類空間になっている。これを調べるために Schlessinger による次の定理が有効である:

比較定理 ([S7]). $(V, p) \hookrightarrow (\mathbb{C}^d, 0)$ を閉埋込とするとき,

$$0 \rightarrow T_V^1 \rightarrow H^1(V \setminus \{p\}, \Theta_V) \rightarrow H^1(V \setminus \{p\}, \Theta_{\mathbb{C}^d|_V})$$

は完全列である。

定理 2.2. $n \geq 3$ のとき,

$$H^1(V, \Theta_V(-\log X)) \cong T_V^1 \cong H^1(V \setminus \{p\}, \Theta_V).$$

ここに $\Theta_U(-\log X)$ は, X に沿って対数的極を持つ Kähler 微分の層 $\Omega_U^1(\log X)$ の双対層 $\text{Hom}_{\mathcal{O}_U}(\Omega_U^1(\log X), \mathcal{O}_U)$ である。

注意. X の既約分解を $X = \cup_i X_i$ とし, X_i の U における法層を $N_{X_i/U}$ とすると, $\Theta_U(-\log X) = \text{Ker}(\Theta_U \rightarrow \oplus_i N_{X_i/U})$ が成立する。更に, $H^1(\Theta_U(-\log X)) = \text{Ker}(H^1(\Theta_U) \rightarrow \oplus_i H^1(N_{X_i/U}))$ が成立し, 従って $H^1(\Theta_U(-\log X))$ は U の一次無限小変形でどの X_i も消えないものの分類空間である (cf. [W]).

定理 2.3. $m=0$ のとき, 可能なち (V, p) が土橋カスプ特異点のとき,

$$H^i(U, \Theta_U(-\log X)) \cong H^i(\Gamma, N_C) \quad (i \geq 1).$$

ここに右辺は $\Gamma \subset \text{Aut}(N)$ の作用による群 cohomology である。

定理 2.4 ([O1]). 錐 C がより低次元の錐の直積に分解するとき, つまり $C = C_1 \times \dots \times C_s$ ($s \geq 2$) と書けるとき,

$$H^1(\Gamma, N_C) = 0.$$

定理 2.5 ([O1]). $r=3$ のとき,

$$3(1 - \chi(D/\Gamma)) \geq \dim_{\mathbb{C}} H^1(\Gamma, N_C) \geq -3\chi(D/\Gamma).$$

ここに, $\chi(D/\Gamma)$ は閉曲面 D/Γ の Euler 数である。

注意 1. (V, p) が土橋カスフ特異点のとき, Hilbert modular カスフでなければ, すなわち D/Γ が実トーラスでなければ, $\chi(D/\Gamma) < 0$ であることが [T1] により判る。従って, その時には, 定理 2.2 と 2.5 により $\dim_{\mathbb{C}} T'_V > 0$, つまり (V, p) が rigid でないことが判る。

2. 最近, 土橋は定理 2.5 の精密化 $\dim_{\mathbb{C}} H^1(P, N_{\mathbb{C}}) = -3\chi(D/\Gamma)$ を示し, 土橋カスフ特異点の versal 族を構成した [T2]。

これらの定理の証明については [O1], [O2] を参照。

参考文献

- [BS] C. Bănică and O. Stănăşilă, Algebraic Methods in the Global Theory of Complex Spaces, Editura Academiei, Bucuresti and John & Sons, London, New York, Sydney and Toronto, 1976.
- [FK] E. Freitag and R. Kiehl, Algebraische Eigenschaften der lokalen Ringe in den Spitzen der Hilbertschen Modulgruppen, Inventiones Math. 24(1974), 121-148.
- [GR] R. C. Gunning and H. Rossi, Analytic Functions of Several Complex Variables, Prentice-Hall, Englewood Cliff, N. J., 1965.
- [MO] T. Oda, Lectures on Torus Embeddings and Applications

(Based on joint work with K. Miyake), Tata Inst. of Fund. Res., Bombay, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, 1978.

- [O1] S. Ogata, Infinitesimal deformations of Tsuchihashi's cusp singularities, to appear in Tohoku Math. J.
- [O2] S. Ogata, Infinitesimal deformations of generalized cusp singularities, preprint.
- [Sa] I. Satake, Numerical invariants of arithmetic varieties of \mathbb{Q} -rank one, preprint.
- [S] M. Schlessinger, Rigidity of quotient singularities, *Inventiones Math.* 14(1971), 17-26.
- [T1] H. Tsuchihashi, Higher dimensional analogues of periodic continued fractions and cusp singularities, *Tohoku Math. J.* 35(1983), 607-639.
- [T2] H. Tsuchihashi, Deformation of three dimensional cusp singularities, preprint.
- [W] J. M. Wahl, Equisingular deformations of normal surface singularities I, *Ann. of Math.* 104(1976), 325-356.
- [V] E. B. Vinberg, Theory of homogeneous convex cones, *Trans. Moscow Math. Soc.* 12(1967), 303-368.
- [H] F. Hirzebruch, Hilbert modular surfaces, *Enseign. Math.* 19(1973), 183-281.