

Title	解析環の準同型のランクに関する条件について(複素解析的特異点と可換環)
Author(s)	泉, 脩藏
Citation	数理解析研究所講究録 (1986), 595: 27-29
Issue Date	1986-07
URL	http://hdl.handle.net/2433/99531
Right	
Type	Departmental Bulletin Paper
Textversion	publisher

解析環の準同型のランクに関する条件について

(Mar. 1986)

(On the Rank Condition for Homomorphisms of Analytic Algebras)

近畿大学工学部数学教室 泉 脩藏 (Shuzo IZUMI)

k を実数体 \mathbb{R} か複素数体 \mathbb{C} とする。

収束巾級数環 $k\{x\}$ の剰余環 $k[x]$ を (k 上の) 解析環と言う。 A の極大イデアルを m とする。 $f \in A$ の (代数的) 位数 $\nu(f)$ および被約位数 $\bar{\nu}(f)$ を $\nu(f) = \sup\{p: f \in m^p\}$ および $\bar{\nu}(f) = \lim_{q \rightarrow \infty} \nu(f^q)/q$ で定義する。また解析環の準同型 $\varphi: A \rightarrow B$ は常に $\varphi(1) = 1$ なるものとする。位数については、次の不等式が知られている。

A の完備化 \hat{A} が巾零元をもたないとき,

$$(CI_0) \exists b_0 > 0, \forall f \in A: \nu(f) + b_0 \geq \bar{\nu}(f) \quad (\geq \nu(f)) \quad ([R_1])$$

\hat{A} が整域のとき,

$$(CI_1) \exists a_1 \geq 1, \exists b_2 > 0, \forall f, g \in A: a_1(\nu(f) + \nu(g)) + b_2 \geq \nu(fg) \quad (\geq \nu(f) + \nu(g)) \quad ([I])$$

(これらは一般の局所環に対しても成立する。 ($[R_1], [R_2]$))

解析環の準同型 $\varphi: A \rightarrow B$ が与えられたとき、それに付随して解析空間の射の芽 $\phi_\varepsilon: Y_\varepsilon \rightarrow X_\varepsilon$ が定まる。 $|X|$ の ε に近い滑らかな点における ϕ のヤコ

ヒアン-マトリックスの階数の最大値を、 ϕ あるいは φ の幾何的階数と言い $\text{grnk } \varphi$ で表わす。これを用いて次の定理が成立する。

A が整域で、 $\text{grnk } \varphi = \dim A$ であれば、

$$(CI_2) \exists a_2 \geq 1, \exists b_2 \geq 0, \forall f \in A: a_2 \nu(f) + b_2 \geq \nu(\varphi(f)) \quad ([I])$$

今回の主張は、これの一般化と、その逆が成立することである。まず一般の k 上の解析環の単射準同型 $\varphi: A \rightarrow B$ に対して、 A の極小素イデアルを p_1, \dots, p_s とし、 $A_i = A/p_i$ 、 $B_i = B/\varphi(p_i)B$ と置くと、 φ は準同型 $\varphi_i: A_i \rightarrow B_i$ をひきおこす。 φ の成分別の幾何的階数 $r_1 = (r_1^1, \dots, r_1^s)$ および解析的階数 $r_3 = (r_3^1, \dots, r_3^s)$ を、まず $k = \mathbb{C}$ のときは $r_1^i = \text{grnk } \varphi_i$ 、 $r_3^i = \dim A_i$ で、また $k = \mathbb{R}$ のときは後者は同じ式、前者は $r_1^i = \text{grnk } \varphi_i^{\mathbb{C}}$ (複素化) で定義する。

定理: k 上の解析環の単射準同型 $\varphi: A \rightarrow B$ に対して、条件 $r_1 = r_3$ は、次の条件と同値である。

$$(CT_2) \exists \bar{a}_2 \geq 1, \forall f \in A: \bar{a}_2 \bar{\nu}(f) \geq \bar{\nu}(\varphi(f)) \quad (\geq \bar{\nu}(f))$$

証明には、 $(CI_0) \sim (CI_2)$ の他に、Eakin-Harris [EH] の方法を用いる。定理の条件はまた「 $\varphi(A)$ が B の極大イデアルの中による位相に関して閉じている」という重要な条件と関係が深い。(閉性については[B]が面白い——少し不正確な点もあるが。) これらの詳細については別のところで述べる予定である。

References

- [B] Becker, J., On the composition of power series, In: *Commutative algebra (analytic methods)* (LN in pure and apl. math. 68), (159~172), Marcel Dekker, New York, 1982.
- [EH] Eakin, P., Harris, G., When $\phi(f)$ convergent implies f is convergent, *Math. Ann.* **229** (1977), 201~210.
- [I] Izumi, S., A Measure of integrity for local analytic algebras, *Publ. RIMS, Kyoto Univ.* **21** (1985), 719~735.
- [R₁] Rees, D., Valuations associated with a local ring (II), *J. London Math. Soc.*, **31** (1956), 228~235.
- [R₂] ———., Izumi's theorem, unpublished (1985).