数理解析研究所講究録
595巻 1986年 27-29



# 解析環の準同型のランクに関する条件について

(Mar. 1986)

(On the Rank Condition for Homomorphisms of Analytic Algebras)

近畿大学理工学部数学教室　　泉　脩藏 (Shuzo IZUMI)

k を実数体 $\mathbb{R}$ か複素数体 $\mathbb{C}$ とする。

収束巾級数環 k{x} の剰余環 k{x} を(k上の)解析環と言う。A の極大イデアルを m とする。$f \in A$ の(代数的)位数 $\nu(f)$ および被約位数 $\bar{\nu}(f)$ を $\nu(f) = \sup\{p : f \in m^p\}$ および $\bar{\nu}(f) = \lim_{q\to\infty} \nu(f^q)/q$ で定義する。また解析環の準同型 $\varphi : A \to B$ は常に $\varphi(1) = 1$ なるものとする。位数については，次の不等式が知られている。

A の完備化 $\hat{A}$ が巾零元をもたないとき，

$$(\mathrm{CI}_0)\ \exists b_0 > 0,\ \forall f \in A:\ \nu(f) + b_0 \geqq \bar{\nu}(f)\ (\geqq \nu(f)) \qquad ([\mathrm{R}_1])$$

$\hat{A}$ が整域のとき，

$$(\mathrm{CI}_1)\ \exists a_1 \geqq 1,\ \exists b_2 > 0,\ \forall f, g \in A:\ a_1(\nu(f) + \nu(g)) + b_1 \geqq \nu(fg)$$
$$(\geqq \nu(f) + \nu(g)) \qquad ([\mathrm{I}])$$

(これらは一般の局所環に対しても成立する。([$\mathrm{R}_1$], [$\mathrm{R}_2$]))

解析環の準同型 $\varphi : A \to B$ が与えられたとき，それに付随して解析空間の射の芽 $\Phi_\xi : Y_\eta \to X_\xi$ が定まる。$|X|$ の $\xi$ に近い滑らかな点における $\Phi$ のヤコ

ビアンーマトリックスの階数の最大値を，$\Phi$ あるいは $\varphi$ の幾何的階数と言い grnk $\varphi$ で表わす。これを用いて次の定理が成立する。

<u>A が整域で，grnk $\varphi = \dim A$ であれば，</u>

<u>(CI$_2$) $\exists a_2 \geqq 1,\ \exists b_2 \geqq 0,\ \forall f \in A:\ a_2\nu(f) + b_2 \geqq \nu(\varphi(f))$</u> ([I])

今回の主張は，これの一般化と，その逆が成立することである。まず一般の k上の解析環の単射準同型 $\varphi: A \to B$ に対して，A の極小素イデアルを $p_1, \ldots, p_s$とし，$A_i = A/p_i$，$B_i = B/\varphi(p_i)B$ と置くと，$\varphi$ は準同型 $\varphi_i: A_i \to B_i$ をひきおこす。$\varphi$ の成分別の幾何的階数 $r_1 = (r_1{}^1, \ldots, r_1{}^s)$ および解析的階数 $r_3 = (r_3{}^1, \ldots, r_3{}^s)$ を，まず $k = \mathbb{C}$ のときは $r_1{}^i = \mathrm{grnk}\ \varphi_i$，$r_3{}^i = \dim A_i$ で，また $k = \mathbb{R}$ のときは後者は同じ式，前者は $r_1{}^i = \mathrm{grnk}\ \varphi_i{}^{\mathbf{C}}$（複素化）で定義する。

> **定理**：k上の解析環の単射準同型 $\varphi: A \to B$ に対して，条件 $r_1 = r_3$ は，次の条件と同値である。
>
> ($\overline{\mathrm{CI}}_2$) $\exists \bar{a}_2 \geqq 1,\ \forall f \in A:\ \bar{a}_2\bar{\nu}(f) \geqq \bar{\nu}(\varphi(f))\ \ (\geqq \bar{\nu}(f))$

証明には，(CI$_0$)〜(CI$_2$) の他に，Eakin-Harris [EH] の方法を用いる。定理の条件はまた「$\varphi(A)$ が B の極大イデアルの巾による位相に関して閉じている」と言う重要な条件と関係が深い。（閉性については[B]が面白い――少し不正確な点もあるが，）これらの詳細については別のところで述べる予定である。

## References


[B] Becker, J., On the composition of power series, In: *Commutative algebra (analytic methods)* (LN in pure and apl. math. 68), (159~172), Marcel Dekker, New York, 1982.

[EH] Eakin, P., Harris, G., When $\Phi(f)$ convergent implies f is convergent, *Math. Ann.* ***229*** (1977), 201~210.

[I] Izumi, S., A Measure of integrity for local analytic algebras, *Publ. RIMS, Kyoto Univ.* ***21*** (1985), 719~735.

[$R_1$] Rees, D., Valuations associated with a local ring (II), *J. London Math. Soc.*, ***31*** (1956), 228~235.

[$R_2$] ———., Izumi's theorem, unpublished (1985).