Title	Rings of automorphic forms which are not Cohen-Macaulay
Author(s)	露峰, 茂明
Citation	数理解析研究所講究録 (1986), 595: 1-12
Issue Date	1986-07
URL	http://hdl.handle.net/2433/99534
Right	
Type	Departmental Bulletin Paper
Textversion	publisher

数理解析研究所講究録
595巻 1986年 1-12

Rings of automorphic forms which are not Cohen-Macaulay

露峰茂明 (Shigeaki Tsuyumine)

automorphic forms の環（特に，Hilbert，Siegel modular forms の環）が Cohen-Macaulay か？というのは Eichler [1]，[2] によって問題にされた。Freitag [3] は 3次元以上の時の Hilbert modular form の環においてはじめて否定的な解答を与えた。我々は [8]，[9] においてこの問題を扱ったが，Siegel modular forms の場合のみに言及すれば，以下の結果を得た。

Γ を $Sp_{2n}(\mathbb{R})$ の congruence subgroup としたとき，$A(\Gamma)$ は Γ についての Siegel modular forms の環を表す。$\Gamma_n = Sp_{2n}(\mathbb{Z})$ とし，また $\Gamma_n(l)$ は level l の principal congruence subgroup $\{M \in \Gamma_n \mid M \equiv 1_{2n} \bmod l\}$ を表すことにする。

(i) $A(\Gamma_2(l))$ は $l \geq 6$ のとき Cohen-Macaulay でない，

(ii) Γ が $Sp_{2n}(\mathbb{R})$ の neat な congruence subgroup で

あるとき、$A(\Gamma)$ は Cohen-Macaulay でない，ただし $n \geq 3$,

(iii) $A(\Gamma_n)$ $(n \geq 4)$ は Cohen-Macaulay でない。

Principal case, 即ち $A(\Gamma_n)$ に限れば，$A(\Gamma_1)$, $A(\Gamma_2)$ は Cohen-Macaulay であることが知られているので（Igusa [5]），残っているのは $A(\Gamma_3)$ のみである。ここでは、$A(\Gamma_3)$ が Cohen-Macaulay でないことを示す。詳しくは [11] を参照。

一方，$A(\Gamma_n)$ $(n \geq 3)$ は U.F.D. であることが知られており（cf. Tsuyumine [10]），$A(\Gamma_n)$ $(n \geq 3)$ は U.F.D. でかつ Cohen-Macaulay でない環の例を与えている。

1. H_n を Siegel space $\{Z \in M_n(\mathbb{C}) \mid {}^tZ = Z, \operatorname{Im} Z > 0\}$ とし，Γ を $\Gamma_n = Sp_{2n}(\mathbb{Z})$ の congruence subgroup とする。Γ は

$$Z \longmapsto MZ = (AZ+B)(CZ+D)^{-1}, \quad M = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \in \Gamma$$

により H_n に作用する。正則関数 f は

$$f(MZ) = |CZ+D|^k f(Z) \quad , \quad M = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \in \Gamma$$

を満たし，さらに cusp でも正則であるならば (Siegel) modular form of weight k と呼ばれる（$n > 1$ の時は，はじめの条件から cusp でも正則であることが導びかれる）。f が cusp で消えるならば cusp form といわれる。$A(\Gamma)_k$ (resp. $S(\Gamma)_k$) で modular forms of weight k (resp. cusp forms of weight k) の成す vector space を表す。この時，

$\mathcal{A}(\Gamma) = \bigoplus_{k \geq 0} \mathcal{A}(\Gamma)_k$ は graded ring になり $S(\Gamma)$ はその graded ideal となる。

$X = H_n/\Gamma$ とし, X^* をその佐竹 compact 化とする。X^* は normal algebraic variety となり $\mathrm{Proj}\,(\mathcal{A}(\Gamma))$ に同型である。$\mathcal{L}(k)$ を modular forms of weight k に対応する X^* 上の coherent sheaf とする,

$$H^0(X^*, \mathcal{L}(k)) = \mathcal{A}(\Gamma)_k$$

である。$Z \in H_n$ の成分を $Z = (z_{ij})$ とおくと, differential $\omega = dz_{11} \wedge dz_{12} \wedge \cdots \wedge dz_{nn}$ は

$$M \cdot \omega = |CZ + D|^{-n-1}\omega, \quad M = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \in \Gamma$$

を満たす。

ここで X^* の smooth locus $X^\circ (\subset X \subset X^*)$ について,

(i) $\mathrm{codim}\,(X^* - X^\circ) \leq 2$,

(ii) X° は (Γ の作用の) fixed pt set in H_n の自然な射影 $H_n \longrightarrow X$ による像の補集合である,

が成立するとする。$f \in \mathcal{A}(\Gamma)_{n+1}$ に対し $f\omega$ は Γ-不変な differential, 即ち X° 上の differential を定義することより,

$$\mathcal{L}(n+1)|_{X^\circ} \simeq K_{X^\circ}$$

が分かる, ここで K_{X° は X° の canonical invertible sheaf である。Grauert-Riemenschneider [4] より X^* の dualizing sheaf ω_{X^*} は

$$\omega_{X^*} \simeq i_*(K_{X^0})$$

で与えられる，ここで i は自然な写像 $i: X^0 \hookrightarrow X^*$ である。また dualizing sheaf とは，X^* 上の coherent sheaf $\mathcal{F}$ について，functorial な同型

$$\mathrm{Hom}(\mathcal{F}, \omega_{X^*}) \simeq H^n(X^*, \mathcal{F})^\vee$$

を与えるもので，complete variety 上には必ず存在する。

よって

$$\omega_{X^*} \simeq i_*(\mathcal{L}(n+1)|_{X^0})$$

であるが，正則関数が codimension 2 以上の subvariety を超えて拡張されること及び Koecher's principle より $i_*(\mathcal{L}(n+1)|_{X^0}) = \mathcal{L}(n+1)$ である。よって

$$\omega_{X^*} \simeq \mathcal{L}(n+1).$$

ここで $X_n = H_n/\Gamma_n$ とすると，$n \geq 3$ ならば X_n は上の条件を満たしている。特に

$$\omega_{X_3^*} \simeq \mathcal{L}(4)$$

である。

我々の目的は $A(\Gamma_3)$ が Cohen-Macaulay でないことを示すことである。今 $A(\Gamma_3)$ が Cohen-Macaulay であるとすると，$X_3^* = \mathrm{Proj}(A(\Gamma_3))$ は Cohen-Macaulay scheme となり，その上で Serre duality が成立する，特に

$$H^0(X_3^*, \mathcal{L}(4)) \simeq H^6(X_3^*, \mathcal{O}_{X_3^*})^\vee$$

となるはずである。Siegel modular form of weight 4 は定数倍を除いてただひとつであることが知られている，即ち $\dim H^0(X_3^*, \mathcal{L}(4)) = 1$ である。これらより，もし $\dim H^6(X_3^*, \mathcal{O}_{X_3^*}) \neq 1$ が示されれば，目的は達成される。

$$\boxed{\text{Our aim; To show } \dim H^6(X_3^*, \mathcal{O}_{X_3^*}) = 0}$$

2. Γ は上述のように congruence subgroup とする。$M_{n,m}(\mathbb{Z})$ を加法により群とみることにし，$\Gamma \times M_{n,m}(\mathbb{Z})$ を群の直積とする。$\Gamma \times M_{m,n}(\mathbb{Z})$ は積空間 $H_n \times M_{n,m}(\mathbb{C})$ に

$$(Z, \zeta) \longmapsto (M, u)\cdot(Z, \zeta)$$
$$= (MZ, {}^t((CZ+D))^{-1}(\zeta + (Z, 1_n)u)), \quad M = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$$

により作用する。この作用による $H_n \times M_{n,n}(\mathbb{C})$ の商空間を W' とすると W' は normal algebraic variety であり，さらに自然に得られる射影

$$W' \longrightarrow X = H_n/\Gamma$$

は，$-1_{2n} \in \Gamma$ のときは generic fibre が Kummer variety の，$-1_{2n} \notin \Gamma$ のときは，generic fibre が abelian variety の fibre space となる。$\zeta = (\zeta^1, \ldots, \zeta^m) \in M_{n,m}(\mathbb{C})$, ${}^t\zeta^i = (\zeta_1^i, \ldots, \zeta_n^i)$ とし，

$$\omega_0 = (dz_{11} \wedge dz_{12} \wedge \cdots \wedge dz_{nn}) \wedge (\bigwedge_{i=1}^{m} (d\zeta_1^i \wedge \cdots \wedge d\zeta_n^i))$$

とおく。この時

$$(M \cdot u)\,\omega_0 = |(z+p)|^{-m-n-1}\,\omega_0$$

が成立する。よって f が modular form of weight $m+n+1$ であれば $f\omega_0$ は $\Gamma \times M_{n,m}(\mathbb{Z})$－不変であり $n \geq 3$ であればば W' の smooth locus 上の differential form となる。W を W' のある compact 化とし，$W - W'$ は W の smooth point を含んでいるものとする。$f\omega_0$ が W の smooth locus にまで holomorphic に拡張されるならば，f は cusp form でなければならない（cusp form ならばいつも拡張されるとは限らない）。Serre duality を使って次を得る。

補題 1．$\phi : W \longrightarrow X^*$ を projective varieties の morphism で，$W' \longrightarrow X$ の拡張になっているものとする。さらに W は Cohen-Macaulay variety であるとし，W－（W の smooth locus）は codimension 2 以上とする。この時，

$$\dim H^{n(n+1)/2 + mn}(W, \mathcal{O}_W) \leq \dim S(\Gamma)_{m+n+1}$$

注意；Γ' を Γ を normal subgroup として持つ，congruence subgroup とする。Γ'/Γ は W に作用するが，V をその商とする。このとき

$$H^{n(n+1)/2 + mn}(W, \mathcal{O}_W)^{\Gamma'/\Gamma} \simeq H^{n(n+1)/2 + mn}(V, \mathcal{O}_V)$$
$$\hookrightarrow S(\Gamma')_{m+n+1} = S(\Gamma)^{\Gamma'/\Gamma}_{m+n+1}.$$

3. $\Gamma_n(l)$ は level l の principal congruence subgroup $\{M \in \Gamma_n \mid M \equiv 1_{2n} \bmod l\}$ を表す。$X_3(l) = H_3/\Gamma_3(l)$ $(l>1)$ とし、$X_3^*(l)$ はその佐竹 compact 化とする。$\overline{X_3}$, $\overline{X_3}(l)$ は、各々 X_3, $X_3(l)$ の Igusa's compactification ([6]) とする。$l \geq 3$ の時は、$\overline{X}_3(l)$ は $X_3^*(l)$ の

$$D^*(l) = X_3^*(l) - X_3(l)$$

に沿った monoidal transform として与えられており、$\overline{X}_3$ は $\overline{X_3}(l)$ の $\Gamma_3/\Gamma_3(l)$ による商空間である。$D^* = X_3^* - X_3$, $D = \overline{X}_3 - X_3$, $D(l) = \overline{X}_3(l) - X_3(l)$ とおく。$D(l)$ は normal crossings のみの特異点を持つ divisor である。$D_0(l)$ を $D(l)$ のひとつの component, $\tilde{D}$ を $D_0(l)$ の normalization の、$D_0(l)$ の(Γ_3 の中の) stabilizer group による商とする。自然な写像 $\psi : \tilde{D} \longrightarrow D$ は D の normalization を与える。今, π を $\overline{X}_3$ から X_3^* への morphism とする。$X_3^* = X_3 \cup X_2^* = X_3 \cup X_2 \cup X_1 \cup X_0$, $X_0 = \{\text{a point}\}$ である。ψ は $\pi^{-1}(X_2)$ 上では同型で、$\tilde{D}|_{\pi^{-1}(X_2)}$ 及び $D|_{\pi^{-1}(X_2)}$ は §2 において、$n=2$, $m=1$, $\Gamma = \Gamma_2$ とおいた W' に等しい。$\tilde{\pi}$ を $\psi : \tilde{D} \longrightarrow D$ と $\pi : D \longrightarrow D^*$ の合成とする。$D^* = X_2^*$ に注意。

補題 2. $\dim H^6(X_3^*, \mathcal{O}_{X_3^*}) \leq \dim H^3(D^*, R^2\tilde{\pi}_* \mathcal{O}_{\tilde{D}})$.

証明）$R^2\pi_*\mathcal{O}_D$ と $R^2\hat{\pi}_*\mathcal{O}_{\hat{D}}$ は X_1^* を除いて同型であることを使って、

$$H^3(D^*, R^2\pi_*\mathcal{O}_D) \simeq H^3(D^*, R^2\hat{\pi}_*\mathcal{O}_{\hat{D}})$$

が導びかれるので、$\dim H^6(X_3^*, \mathcal{O}_{X_3^*}) \leq \dim H^3(D^*, R^2\pi_*\mathcal{O}_D)$ を示せばよい。$R^\nu\pi_*\mathcal{O}_{\overline{X}_3}$ と（0で拡張した）$R^\nu\pi_*\mathcal{O}_D$ は、$\nu > 0$ のときは少なくとも X_1^* を除いた所では同型である（Tsuyumine [ ], Prop 2）。よって $H^3(D^*, R^2\pi_*\mathcal{O}_D)$ と $H^3(X_3^*, R^2\pi_*\mathcal{O}_{\overline{X}_3})$ は同型となる。よって問題は $\dim H^3(X_3^*, \mathcal{O}_{X_3^*}) \leq \dim H^3(X_3^*, R^2\pi_*\mathcal{O}_{\overline{X}_3})$ を示すことに帰着される。

$\overline{X}_3$ は商特異点を持つのみなので、canonical coherent sheaf $K_{\overline{X}_3}$（Grauert-Riemenschneider [4] の意味での）は dualizing sheaf となる。よって

$$H^0(\widehat{X}_3, K_{\widehat{X}_3}) \simeq H^0(\overline{X}_3, K_{\overline{X}_3}) \simeq H^6(\overline{X}_3, \mathcal{O}_{\overline{X}_3})^\vee,$$

ここで $\widehat{X}_3$ は X_3 の non-singular model を表す。$\widehat{X}_3$ は unirational であるから、上の cohomology group はすべて消える。よって $H^3(X_3^*, R^2\pi_*\mathcal{O}_{\overline{X}_3})$ から $H^6(X_3^*, \mathcal{O}_{X_3^*})$ へのある homomorphism d が存在して $H^6(X_3^*, \mathcal{O}_{X_3^*})/d(H^3(X_3^*, R^2\pi_*\mathcal{O}_{\overline{X}_3}))$ が $H^6(\overline{X}_3, \mathcal{O}_{\overline{X}_3})$（$=\{0\}$）に同型なることを示せば良い。ここで Leray の spectral sequence

$$E_2^{p,q} = H^p(X_3^*, R^q\pi_*\mathcal{O}_{\overline{X}_3}) \Longrightarrow H^{p+q}(\overline{X}_3, \mathcal{O}_{\overline{X}_3})$$

を考える。π は proper morphism で、$\dim \pi^{-1}(x) = 2$, $x \in X_2$,

また $\dim \tilde{\pi}^{-1}(x)=3$, $x \in X_1^*$ であるから, $p+q=5$ なる (p,q) に対しては $(3,2)$, $(0,5)$ の場合以外は $H^p(X_3^*, R^q\tilde{\pi}_*\mathcal{O}_{\tilde{X}_3})$ は消えてしまう。Leray spectral sequence の初等的な考察により, homomorphism α は構成される。 q. e. d.

補題3. $\dim H^6(X_3^*, \mathcal{O}_{X_3^*}) \leq \dim H^1(D^*, R^3\tilde{\pi}_*\mathcal{O}_{\tilde{D}})$.

証明) Leray spectral sequence $E_2^{p,q} = H^p(D^*, R^q\hat{\pi}_*\mathcal{O}_{\tilde{D}}) \Longrightarrow H^{p+q}(\tilde{D}, \mathcal{O}_{\tilde{D}})$ を考える. 上の証明と同様にして,

$$\dim H^3(D^*, R^2\hat{\pi}_*\mathcal{O}_{\tilde{D}}) \leq \dim H^5(\tilde{D}, \mathcal{O}_{\tilde{D}}) + \dim H^1(D^*, R^3\hat{\pi}_*\mathcal{O}_{\tilde{D}})$$

を得る。補題1より $\dim H^5(\tilde{D}, \mathcal{O}_{\tilde{D}}) = 0$ を得る, なぜならば $S(\Gamma_2)_4 = \{0\}$ だからである。 q. e. d.

3. 補題3より計算は $H^1(X_2^*, R^3\hat{\pi}_*\mathcal{O}_{\tilde{D}}) = \{0\}$ を示すことに帰着された。所が $R^3\hat{\pi}_*\mathcal{O}_{\tilde{D}}$ の support は X_1^* であり我々は $H^1(X_1^*, R^3\hat{\pi}_*\mathcal{O}_{\tilde{D}}) = \{0\}$ を示せば良いことになる。cohomology の計算法は, 補題2, 3のものと同様に行えばこの結果が得られる。ただ morphism $\hat{\pi}$ の X_1^* における fibre の構造が(上の場合のようには)簡単でないのでやっかいがあるが, 基本的には全く同じ計算をくり返すことによって次を得る。ここでは補題1及び $S(\Gamma_1)_4 = \{0\}$ なる事実も用いる。

補題 4　$\dim H^1(D^*, R^3\hat{\pi}_* \mathcal{O}_{\tilde{D}}) = 0$.

これらより次を得る。

命題 1　$\dim H^6(X_3^*, \mathcal{O}_{X_3^*}) = 0$.

§1 に述べたことにより，次を得る。

定理　X_3^* は Cohen-Macaulay variety でない，特に graded ring $A(\Gamma_3)$ は Cohen-Macaulay でない。

4. $A(\Gamma_3)$ の生成元，次元公式，そして（ある程度の）その構造は Tsuyumine [7] に決定されている。次元公式より X_3^* の arithmetic genus $\sum_{i=0}^{6}(-1)^i \dim H^i(X_3^*, \mathcal{O}_{X_3^*})$ は 2 であることが分かる。よってある偶数 $i > 0$ に対し $\dim H^i(X_3^*, \mathcal{O}_{X_3^*}) \neq 0$ であるが命題 1 よりそれは 6 ではない。

一方，同じ論文により $A(\Gamma_3)$ が 5 変数多項式環上の free-module として実現されている。以上より

$$\dim H^4(X_3^*, \mathcal{O}_{X_3^*}) > 0$$

$$\operatorname{depth} A(\Gamma_3) = 5$$

が分かる。一般の $A(\Gamma_n)$ $(n \geq 4)$ については depth も

depth $A(\Gamma_n) < \frac{1}{2}n(n+1)$ となること以外は何も分かっていない。

参考文献

1. M. Eichler; Projective varieties and modular forms. Lecture Notes in Math. 210, Springer, 1970.

2. ———; On the graded ring of modular forms, Acta Arith., 18 (1971), 87–92.

3. E. Freitag; Lokale und globale Invarianten der Hilbertschen Modulgruppen, Invent. Math., 17 (1972), 106–134.

4. H. Grauert and O. Riemenschneider: Verschwindungssätze für analytische Kohomologiegruppen auf komplexen Räumen, Invent Math., 11 (1970), 263–292.

5. J. Igusa: On the Siegel modular forms of genus two (II), Amer. J. Math 86 (1964) 392–412.

6. ———; A desingularization problem in the theory of Siegel modular functions, Math. Ann. 168 (1967), 228–260.

7. S. Tsuyumine; On the Siegel modular forms of degree three, Amer. J. Math., to appear.

8 ———; Rings of modular forms (On Eichler's Problem), Nagoya Math. J. 99 (1985), 31—44

9. ———; Rings of automorphic forms which are not Cohen-Macaulay, I, J. Math Soc. Japan 38 (1986) 147—162.

10 ———; Factorial property of a ring of automorphic forms, Trans. Amer. Math Soc., to appear.

11 ———; Rings of automorphic forms which are not Cohen-Macaulay, II. Preprint