数理解析研究所講究録
596 巻 1986 年 300-313

バケーションタイムをもつ$M^X/G/1$待ち行列とその周辺

中部大学 経営情報学部 馬場裕 (Yutaka BABA)

1. 序論

バケーションタイムをもつ M/G/1 待ち行列については、Cooper[6], Levy and Yechiali [9], Scholl and Kleinrock [10] 等の研究がある。本稿ではバケーションタイムをもつ集団到着待ち行列 $M^X/G/1$ とそれに関連するモデルに拡張して解析する。

サーバはシステムが空になるまで稼働する (exhaustive service)。システムが空になったら一般分布に従うバケーションタイムをとる。バケーションタイムが終わってシステムに戻り、客がいればサービスを開始する。もしバケーションタイム終了後にシステムに客がいなければ、少なくとも1人の客が来るまで新たにバケーションタイムをとり続けるモデルを考える。

第2節ではバケーションタイムをもつ $M^X/G/1$ について補助変数を用いて任意時点における系内数と残りサービス時間（あるいは残りバケーションタイム）の結合分布を求め、任意時点における系内数分布を導出する。また busy period や先着順サービス規律 (FCFS) における待ち時間分布のラプラス変換および待ち時間のモーメントを導出する。

第3節では後着順サービス規律 (LCFS) における $M^X/G/1$ をバケーションタイムをもつ場合ともたない場合の両方について待ち時間分布のラプラス変換および待ち時間のモーメントを求め、第2節の結果を使い FCFS と LCFS における待ち時間のモーメント間の関係を導出する。これは [10] の結果の $M^X/G/1$ への拡張になっていることがわかる。

2. バケーションタイムをもつ $M^X/G/1$ の解析

2.1 Notations

客は rate λ の斉時ポアソン過程に従い集団で到着する。

X ： 到着集団のサイズを表す確率変数

$$P(X = n) = g_n, \quad n = 1,2,... \tag{1}$$

$G(z)$ ： X の母関数

$$G(z) = \sum_{k=1}^{\infty} g_k z^k. \tag{2}$$

X のモーメント

$$g = E(X) = G^{(1)}(1), \tag{3}$$

$$g^{(2)} = E(X(X-1)) = G^{(2)}(1), \tag{4}$$

$$g^{(3)} = E(X(X-1)(X-2)) = G^{(3)}(1). \tag{5}$$

$S(x)$ $(s(x))$ ： サービス時間 S の分布関数（確率密度関数）

$S^*(\theta)$ ： S のラプラス・スティルチェス変換（LST）

$V(x)$ $(v(x))$ ： バケーションタイム V の分布関数（確率密度関数）

$V^*(\theta)$ ： V の LST

と定義する。

2.2 系内数分布の解析

任意時点における系内数分布を求めるために補助変数法を用いて解析する。サーバが稼働中の時は残りサービス時間を補助変数とし、系内数と残りサービス時間の結合分布を、サーバがバケーション中の時は残りバケーションタイムを補助変数にとし、系内数と残りバケーションタイムの結合分布を考えることによりシステムの状態をマルコフ化し、定常状態におけるシステムの状態を次の確率変数を使って表現する。

$$\xi = \begin{cases} 0 & \text{if the server is on vacation,} \\ 1 & \text{if the server is busy.} \end{cases}$$

L ： 現在の客数

$\hat{S}$ ： サービス中の客の残りサービス時間

$\hat{V}$ ： バケーション中のサーバの残りバケーションタイム

とする。

$$\pi_n(x)dx = P(L = n,\ x < \hat{S} \leqq x+dx,\ \xi = 1),\ n = 1,2,... \tag{6.a}$$

$$\omega_n(x)dx = P(L = n,\ x < \hat{V} \leqq x+dx,\ \xi = 0),\ n = 0,1,... \tag{6.b}$$

$$\pi_n^*(\theta) = \int_0^\infty e^{-\theta x}\pi_n(x)dx, \tag{7.a}$$

$$\omega_n^*(\theta) = \int_0^\infty e^{-\theta x}\omega_n(x)dx \tag{7.b}$$

とすれば次の微分差分方程式系を得る。

$$-\frac{d\pi_1(x)}{dx} = -\lambda\pi_1(x) + \pi_2(0)s(x) + \omega_1(0)s(x), \tag{8.a}$$

$$-\frac{d\pi_n(x)}{dx} = -\lambda\pi_n(x) + \sum_{k=1}^{n-1}\lambda g_k\pi_{n-k}(x) + \pi_{n+1}(0)s(x) + \omega_n(0)s(x), \quad (n \geqq 2) \tag{8.b}$$

$$-\frac{d\omega_0(x)}{dx} = -\lambda\omega_0(x) + \pi_1(0)v(x) + \omega_0(0)v(x), \tag{8.c}$$

$$-\frac{d\omega_n(x)}{dx} = -\lambda\omega_n(x) + \sum_{k=1}^{n}\lambda g_k\omega_{n-k}(x). \quad (n \geqq 1) \tag{8.d}$$

(7), (8) より

$$-\theta\pi_1^*(\theta) + \pi_1(0) = -\lambda\pi_1^*(\theta) + \pi_2(0)S^*(\theta) + \omega_1(0)S^*(\theta), \tag{9.a}$$

$$-\theta\pi_n^*(\theta) + \pi_n(0) = -\lambda\pi_n^*(\theta) + \sum_{k=1}^{n-1}\lambda g_k\pi_{n-k}^*(\theta) + \pi_{n+1}(0)S^*(\theta) + \omega_n(0)S^*(\theta), \quad (n \geqq 2) \tag{9.b}$$

$$-\theta\omega_0^*(\theta) + \omega_0(0) = -\lambda\omega_0^*(\theta) + \pi_1(0)V^*(\theta) + \omega_0(0)V^*(\theta), \tag{9.c}$$

$$-\theta\omega_n^*(\theta) + \omega_n(0) = -\lambda\omega_n^*(\theta) + \sum_{k=1}^{n}\lambda g_k\omega_{n-k}^*(\theta) \quad (n \geqq 1) \tag{9.d}$$

を得る。母関数

$$\pi(z, 0) = \sum_{n=1}^{\infty}\pi_n(0)z^n, \tag{10.a}$$

$$\omega(z, 0) = \sum_{n=0}^{\infty}\omega_n(0)z^n, \tag{10.b}$$

$$\pi^*(z, \theta) = \sum_{n=1}^{\infty}\pi_n^*(\theta)z^n, \tag{10.c}$$

$$\omega^*(z, \theta) = \sum_{n=0}^{\infty}\omega_n^*(\theta)z^n \tag{10.d}$$

を定義すれば、(9.a), (9.b) より

$$[\theta-\lambda+\lambda G(z)]\pi^*(z, \theta) = -S^*(\theta)[\pi(z, 0)-\pi_1(0)z]/z - [\omega(z, 0)-\omega_0(0)]S^*(\theta) + \pi(z, 0). \tag{11}$$

(9.c), (9.d) より

$$[\theta-\lambda+\lambda G(z)]\omega^*(z, \theta) = \omega(z, 0)-\pi_1(0)V^*(\theta)-\omega_0(0)V^*(\theta) \tag{12}$$

を得る。 $\theta = \lambda - \lambda G(z)$ を (11), (12) に代入すると

$$-S^*(\lambda-\lambda G(z))[\pi(z,\ 0)-\pi_1(0)z]/z-[\omega(z,\ 0)-\omega_0(0)]S^*(\lambda-\lambda G(z))$$
$$+\ \pi(z,\ 0) = 0. \tag{13}$$

$$\omega(z,\ 0) - \pi_1(0)V^*(\lambda-\lambda G(z)) - \omega_0(0)V^*(\lambda-\lambda G(z)) = 0 \tag{14}$$

を得る。(14) に $z = 0$ を代入し $\omega(0,\ 0) = \omega_0(0)$ を使うと

$$\omega_0(0) = V^*(\lambda)\pi_1(0)/[1-V^*(\lambda)] \tag{15}$$

を得る。(15) を (14) に代入して

$$\omega(z,\ 0) = V^*(\lambda-\lambda G(z))\pi_1(0)/[1-V^*(\lambda)] \tag{16}$$

を得る。(13), (16) より

$$\pi(z,\ 0) = \frac{zS^*(\lambda-\lambda G(z))[V^*(\lambda-\lambda G(z))-1]\pi_1(0)}{[1-V^*(\lambda)][z-S^*(\lambda-\lambda G(z))]} \tag{17}$$

を得る。(15), (16), (17) を (11) に代入すれば

$$\pi^*(z,\ \theta) = \frac{z[V^*(\lambda-\lambda G(z))-1][S^*(\lambda-\lambda G(z))-S^*(\theta)]\pi_1(0)}{[1-V^*(\lambda)][z-S^*(\lambda-\lambda G(z))][\theta-\lambda+\lambda G(z)]} \tag{18}$$

を得る。(15), (16) を (12) に代入すれば

$$\omega^*(z,\ \theta) = \frac{[V^*(\lambda-\lambda G(z))-V^*(\theta)]\pi_1(0)}{[1-V^*(\lambda)][\theta-\lambda+\lambda G(z)]} \tag{19}$$

を得る。 $\pi^*(1,\ 0) + \omega^*(1,\ 0) = 1$ より

$$\pi_1(0) = (1-\rho)[1-V^*(\lambda)]/E(V). \tag{20}$$

(ただし $\rho = \lambda gE(S) < 1$)

よって任意時点における平均系内数は

$$E(L) = \left.\frac{\partial\pi^*(z,\ \theta)}{\partial z}\right|_{z=1,\theta=0} + \left.\frac{\partial\omega^*(z,\ \theta)}{\partial z}\right|_{z=1,\theta=0}$$

$$= \rho + \frac{\lambda g E(V^2)}{2E(V)} + \frac{\lambda[\lambda g^2 E(S^2) + g^{(2)} E(S)]}{2(1-\rho)} \tag{21}$$

となる。

2.3 Busy Period の分布

サーバがバケーションタイムから戻ってからシステムが空になり次のバケーションタイムが始まるまでの時間を busy period B と定義し$B^*(\theta)$を B の LST とする。 n 人の客によって始まったときの busy period を B_n とし、その LST を $B_n^*(\theta)$ $(n = 0,1,\ldots)$ とすると

$$B_1^*(\theta) = S^*(\theta + \lambda - \lambda G(B_1^*(\theta))) \tag{22}$$

$$B_n^*(\theta) = [B_1^*(\theta)]^n \tag{23}$$

を満たす事が容易にわかる。よって

$$B^*(\theta) = \sum_{j=0}^{\infty} B_j^*(\theta) \int_0^{\infty} \sum_{k=0}^{j} \frac{(\lambda x)^k}{k!} e^{-\lambda x} g_j^{*k} dV(x)$$

$$= \sum_{j=0}^{\infty} [B_1^*(\theta)]^j \int_0^{\infty} \sum_{k=0}^{j} \frac{(\lambda x)^k}{k!} e^{-\lambda x} g_j^{*k} dV(x) \tag{24}$$

$$= V^*(\lambda - \lambda G(B_1^*(\theta)))$$

(ただし g_j^{*k} は g_j の k-fold convolution) である。(22), (24) より

$$E(B_1) = E(S)/(1-\rho) \tag{25}$$

$$E(B) = \rho E(V)/(1-\rho) \tag{26}$$

を得る。

2.4 先着順サービス規律（FCFS）における待ち時間分布

W_1 ： ある任意の客を含む到着集団の先頭の客のサービスが開始されるまでの待ち時間

W_2 ： ある任意の客と同じ集団に属し、その客よりも先にサービスされる客の待ち時間

とすれば、ある任意の客の待ち時間 W_{VF} は $W_{VF} = W_1 + W_2$

(LST $W^*_{VF}(\theta) = W^*_1(\theta)W^*_2(\theta)$)

$$W^*_1(\theta) = \sum_{k=1}^{\infty} \pi^*_k(\theta)[S^*(\theta)]^{k-1} + \sum_{k=0}^{\infty} \omega^*_k(\theta)[S^*(\theta)]^k$$

$$= \pi^*(S^*(\theta),\ \theta)/S^*(\theta) + \omega^*(S^*(\theta),\ \theta) \tag{27}$$

$$= \frac{(1-\rho)[1-V^*(\theta)]}{E(V)[\theta-\lambda+\lambda G(S^*(\theta))]}$$

であり、また

r_n ： ある任意の客が到着集団の n 番目にいる確率

とすると、 Burke [3] により

$$r_n = \frac{1}{g}\sum_{k=n}^{\infty} g_k. \tag{28}$$

であるから

$$W^*_2(\theta) = \sum_{k=1}^{\infty} r_k[S^*(\theta)]^{k-1} = \frac{1-G(S^*(\theta))}{g[1-S^*(\theta))]} \tag{29}$$

となる。 W_1 と W_2 は独立であるから

$$W^*_{VF}(\theta) = W^*_1(\theta)W^*_2(\theta)$$

$$= \frac{(1-\rho)\theta[1-G(S^*(\theta))]}{g[\theta-\lambda+\lambda G(S^*(\theta))][1-S^*(\theta)]} \cdot \frac{1-V^*(\theta)}{\theta E(V)} \tag{30}$$

となる。

3. 後着順サービス規律（LCFS）における $M^X/G/1$ の待ち時間分布

3.1 仮定と Notations

サービス規律は到着集団については nonpreemptive LCFS, 集団内はランダムとする。
$\hat{S}(x)$, $\hat{S}^*(\theta)$ をそれぞれ残りサービス時間 $\hat{S}$ の分布関数、LST とすると、
Kleinrock [8] により

$$\hat{S}(x) = \frac{1}{E(S)}\int_0^x [1 - S(t)]dt, \tag{31}$$

$$\hat{S}^*(\theta) = [1 - S^*(\theta)]/\theta E(S). \tag{32}$$

また $\hat{V}(x)$, $\hat{V}^*(\theta)$ をそれぞれ残りバケーションタイム $\hat{V}$ の分布関数、LST とすれば

$$\hat{V}(x) = \frac{1}{E(V)}\int_0^x [1 - V(t)]dt, \tag{33}$$

$$\hat{V}^*(\theta) = [1 - V^*(\theta)]/\theta E(V) \tag{34}$$

である。

3.2 バケーションタイムをもたない場合

ある任意の客の到着時に同じ集団内で先にサービスされる客が n - 1 人いる確率は
である。MX/G/1 においてサーバが idle である確率は $1 - \rho$ であるから
(Chaudhry [5])、 B を 1-busy period とすれば、任意の客の待ち時間は
確率 $(1 - \rho)r_n$ で $B_1 + \cdots + B_{n-1}$
確率 ρr_n で $\hat{S} + B_1 + \cdots + B_{n-1} + B_n + \cdots + B_{m+n-1}$
(ただし $B_1, \ldots, B_{n-1}, \ldots$ は B の独立な繰り返し、m は残りサービス時間 $\hat{S}$

の間に到着した客数）である。

W_L を任意の客の定常待ち時間（LST $W_L^*(\theta)$）とすると

$$W_L^*(\theta) = \sum_{n=1}^{\infty}(1-\rho)r_n[B^*(\theta)]^{n-1}$$

$$+\sum_{n=1}^{\infty}\rho r_n\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{m}[B^*(\theta)]^{m+n-1}\int_0^{\infty}\frac{(\lambda t)^k}{k!}e^{-(\lambda+\theta)t}g_m^{*k}d\hat{S}(t)$$

$$=\frac{(1-\rho)R(B^*(\theta))}{B^*(\theta)}+\sum_{n=1}^{\infty}\rho r_n[B^*(\theta)]^{n-1}\hat{S}^*(\theta+\lambda-\lambda G(B^*(\theta)))$$

$$=\frac{(1-\rho)[1-G(B^*(\theta))]}{g[1-B^*(\theta)]}+\frac{\lambda[1-G(B^*(\theta))]}{\theta+\lambda-\lambda G(B^*(\theta))} \tag{35}$$

である。ただし

$$R(z) = \sum_{n=1}^{\infty} r_n z^n = \frac{z[1-G(z)]}{g(1-z)} \tag{36}$$

とする。(35) より

$$E(W_L) = \frac{\lambda g E(S^2)}{2(1-\rho)} + \frac{g^{(2)}E(S)}{2g(1-\rho)}, \tag{37}$$

$$E(W_L^2) = \frac{\lambda g E(S^3)}{3(1-\rho)^2} + \frac{\lambda^2 g^2\{E(S^2)\}^2}{2(1-\rho)^3} + \frac{g^{(3)}\{E(S)\}^2}{3g(1-\rho)^2} + \frac{\lambda\{g^{(2)}\}^2\{E(S)\}^3 + (1+\rho)g^{(2)}E(S^2)}{2g(1-\rho)^3} \tag{38}$$

を得る。

Remark 1. FCFS における定常待ち時間 W_F の LST $W_F^*(\theta)$ は

$$W_F^*(\theta) = \frac{(1-\rho)\theta[1-G(S^*(\theta))]}{g[\theta-\lambda+\lambda G(S^*(\theta))][1-S^*(\theta)]} \tag{39}$$

(Cooper[7]) である。(39) より

$$E(W_F) = \frac{\lambda g E(S^2)}{2(1-\rho)} + \frac{g^{(2)}E(S)}{2g(1-\rho)}, \tag{40}$$

$$E(W_F^2) = \frac{\lambda g E(S^3)}{3(1-\rho)} + \frac{\lambda^2 g^2\{E(S^2)\}^2}{2(1-\rho)^2} + \frac{g^{(3)}\{E(S)\}^2}{3g(1-\rho)} + \frac{\lambda\{g^{(2)}\}^2\{E(S)\}^3+(1+\rho)g^{(2)}E(S^2)}{2g(1-\rho)^2} \tag{41}$$

が得られる。よって

(37), (40) より $\quad E(W_L) = E(W_F),$ (42)

(38), (41) より $\quad E(W_L^2) = E(W_F^2)/(1-\rho)$ (43)

が成り立つことがわかる。これは Tacaks [11] が M/G/1 について証明した結果の $M^X/G/1$ に対する拡張になっている。

3.3 バケーションタイムをもつ場合

サーバがバケーションタイムにいる確率は $1-\rho$ だから ((18), (19) より簡単にわかる)、任意の客の定常待ち時間は

確率 $(1-\rho)r_n$ で $\hat{V} + B_1 + \cdots + B_{m+n-1}$

(ただし m は残りバケーションタイム $\hat{V}$ の間に到着した客数)

確率 ρr_n で $\hat{S} + B_1 + \ldots + B_{m+n-1}$

(ただし m は残りサービス時間 $\hat{S}$ の間に到着した客数)

である。W_{VL} を任意の客の定常待ち時間 (LST $W_{VL}^*(\theta)$) とすると

$$W_{VL}^{*}(\theta) = \sum_{n=1}^{\infty}(1-\rho)r_n\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{m}[B^{*}(\theta)]^{m+n-1}\int_0^{\infty}\frac{(\lambda t)^k}{k!}e^{-(\lambda+\theta)t}g_m^{*k}d\hat{V}(t)$$

$$+\sum_{n=1}^{\infty}\rho r_n\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{m}[B^{*}(\theta)]^{m+n-1}\int_0^{\infty}\frac{(\lambda t)^k}{k!}e^{-(\lambda+\theta)t}g_m^{*k}d\hat{S}(t) \tag{44}$$

$$= \frac{(1-\rho)[1-V^{*}(\theta+\lambda-\lambda G(B^{*}(\theta)))][1-G(B^{*}(\theta))]}{g[1-B^{*}(\theta)][\theta+\lambda-\lambda G(B^{*}(\theta))]E(V)}$$

である。よって (44) より

$$E(W_{VL}) = \frac{E(V^2)}{2E(V)} + \frac{\lambda g E(S^2)}{2(1-\rho)} + \frac{g^{(2)}E(S)}{2g(1-\rho)}, \tag{45}$$

$$E(W_{VL}^2) = \frac{g^{(2)}E(S)E(V^2)}{2g(1-\rho)^2E(V)} + \frac{E(V^3)}{3(1-\rho)E(V)} + \frac{\lambda g E(S^2)E(V^2)}{2(1-\rho)^2E(V)} + \frac{\lambda g E(S^3)}{3(1-\rho)^2}$$

$$+\frac{\lambda^2 g^2[E(S^2)]^2}{2(1-\rho)^3} + \frac{g^{(3)}[E(S)]^2}{3g(1-\rho)^2} \tag{46}$$

$$+\frac{\lambda[g^{(2)}]^2[E(S)]^3 + (1+\rho)g^{(2)}E(S^2)}{2g(1-\rho)^3}.$$

を得ることができる。

Remark 2. FCFS の場合について第２節 (30) より

$$E(W_{VF}) = \frac{E(V^2)}{2E(V)} + \frac{\lambda g E(S^2)}{2(1-\rho)} + \frac{g^{(2)}E(S)}{2g(1-\rho)}, \tag{47}$$

$$E(W_{VF}^2) = \frac{g^{(2)}E(S)E(V^2)}{2g(1-\rho)E(V)} + \frac{E(V^3)}{3E(V)} + \frac{\lambda g E(S^2)E(V^2)}{2(1-\rho)E(V)} + \frac{\lambda g E(S^3)}{3(1-\rho)}$$

$$+\frac{\lambda^2 g^2[E(S^2)]^2}{2(1-\rho)^2} + \frac{g^{(3)}[E(S)]^2}{3g(1-\rho)} \tag{48}$$

$$+\frac{\lambda[g^{(2)}]^2[E(S)]^3 + (1+\rho)g^{(2)}E(S^2)}{2g(1-\rho)^2}.$$

が得られる。よって

(45), (47) より　$E(W_{VL}) = E(W_{VF})$　(49)

(46), (48) より　$E(W_{VL}^2) = E(W_{VF}^2)/(1-\rho)$　(50)

が成り立つ。これは [10] で M/G/1 について証明された結果の M^X/G/1 に対する拡張になっている。

References

[1] Baba, Y. 1985. On the $M^X/G/1$ Queue with Vacation Time. *Research Reports on Information Sciences B-168, Department of Information Sciences, Tokyo Institute of Technology*. (to appear in *Operations Research Letters*)

[2] Baba, Y. 1986. On the $M^X/G/1$ Queue with and without Vacation Time under Last-Come First-Served. (Submitted for Publication)

[3] Burke, P.J. 1975. Delays in Single-Server Queues with Batch Input. *Opns, Res.* 23, 830-833.

[4] Chaudhry, M.L. 1979. The Queueing System $M^X/G/1$ and Its Ramifications. *Nav. Res. Logist. Quart.* 26, 667-674.

[5] Chaudhry, M.L. and Templeton, J.G.C. 1983. *A First Course in Bulk Queues*. Wiley, New York.

[6] Cooper, R.B. 1970. Queues Served in Cyclic Order: Waiting Times. *Bell System Tech. J.* 49, 399-413.

[7] Cooper, R.B. 1981. *Introduction to Queueing Theory*, 2nd ed. Elsevier North Holland, New York.

[8] Kleinrock, L. 1975. *Queueing Systems, Vol. 1. Theory*. John Wiley and Sons, New York.

[9] Levy, Y. and Yechiali, Y. 1975. Utilization of Idle Time in an M/G/1 Queueing System. *Mgmt. Sci.* 22, 202-211.

[10] Scholl, M. and Kleinrock, L. 1983. On the M/G/1 Queue with Rest Period and Certain Service-Independent Queueing Disciplines. *Opns. Res.* 31, 705-719.

[11] Takács, L. 1963. Delay Distributions for One Line with Poisson Input, General Holding Times, and Various Orders of Service. *Bell Syst. Tech. J.* 42, 487-503.
Oxford University Press, New York.