Title	点過程による基本方程式のフィードバック型待ち行列への応用(待ち行列理論とその周辺)
Author(s)	宮沢, 政清
Citation	数理解析研究所講究録 (1986), 596: 249-262
Issue Date	1986-07
URL	http://hdl.handle.net/2433/99540
Right	
Type	Departmental Bulletin Paper
Textversion	publisher

数理解析研究所講究録
596巻 1986年 249-262

点過程による基本方程式のフィードバック型待ち行列への応用

東京理科大・理工　宮沢政清(Masakiyo Miyazawa)

§1　概要

待ち行列ネットワークは、応用上重要なモデルとして広く研究されてきた。理論的な面からは、解析的に解けるモデルについての研究は、ほぼやりつくされた感がある。一方，応用面からは、もっと広い範囲のモデルが必要とされ、それらに対する近似解法の研究が，近年，盛んにおこなわれてきた。また、これら近似解法にもとづいたソフトウェアパッケージの開発も盛んである。この論文では、近似解法の一つとしてよく用いられる分解近似法たついて理論的な面からの考察をおこなう。

この論文で考察されるモデルは、次ページの図1にある2つの待ち行列がサイクル型に結合した簡単な待ち行列ネットワークである。ここに、オ1の待ち行列系を退去した客は，他の状態に独立な一定の確率で退去するか、または、オ2の

待ち行列系へ入る。また、オ2の待ち行列系を退去した客は、再び才1の待ち行列に加わる。才2の待ち行列系のサービス時間が0であれば、このモデルは、ベルヌイフィードバック待ち行列となる(図2)。そこで、これからは、このモデルを、才2窓口をもつベルヌイフィードバック待ち行列と呼ぶことにする。このモデルに対して、単純な分解近似を適用すると、図3のような2つの待ち行列系になる。ただしこの場合の到着は、適当な修正が必要である。また、このとき、各系への到着(到着1と2)は、独立なものとみなすが、そもそも、才1待ち行列系と才2待ち行列系は強い相関をもつはずであるから、このような分解には無理があるように思われる。実際に、ソフトウェアパッケージの1つであるQNAなどにおいては、

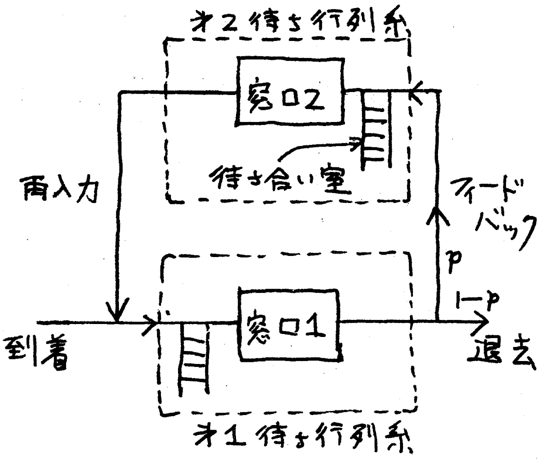

図1：才2窓口をもつベルヌイフィードバック待ち行列

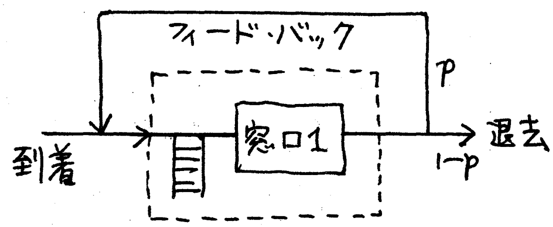

図2：ベルヌイフィードバック待ち行列

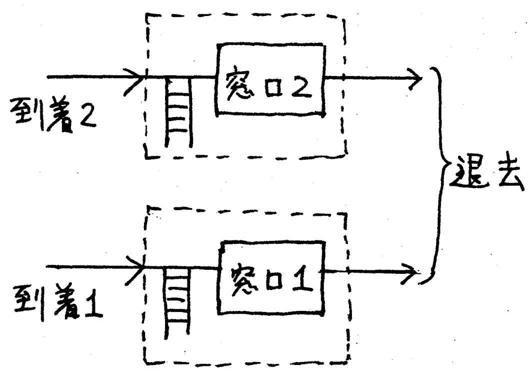

図3：分解された待ち行列

図2のようなベルヌイフィードバック待ち行列に対しては、待ち人数分布に対して等価となるフィードバックを持たない待ち行列で置きかえることによって、フィードバックループを除去している。しかし、図1の場合には、QNAでも、単純な分解をしているように思われる。

ここでは、図1の第2窓口をもつベルヌイフィードバック待ち行列に対して，通常使われる積形式に代りうる分解法があるのかを検討する。そのために、点過程の理論から導かれる定常状態方程式である基本方程式を利用する。まず、第2節で、モデルの基本的仮定を述べる。第3節では、基本方程式を導き，それを簡単な形にまとめる。第4節では、2つの特性量に対して分解表現を導く。特に、到着がポアッソン過程であるときには、システム内の総人数分布が、割合に簡単な形に分解されることがわかった。これらの結果は、数値計算などにすぐ使えるわけではないが、近似式などを考える際に役に立つと思われる。

§2　モデルの仮定

第2窓口をもつベルヌイフィードバック待ち行列では、次のことを仮定する。

i) 客の到着 ---- 到着時間々隔が，独立，同一分布 (GI型)で

ある。その分布をFで表す。

ii) サービス ---待ち行列系1,2は共に、無限の大きさの待ち合い室をもつ。また、サービスは、共に、先着順でおこなわれる。サービス時間は、共に、GI型であるとし，その分布を，オ1及びオ2待ち行列系についてそれぞれ，G_1及びG_2で表す。

iii) フィードバック ---外部からの客は、オ1待ち行列に入る。オ1待ち行列系を退去した客は、系の状態と独立に，確率pでオ2待ち行列系へ入るか、又は、確率$1-p$で、系から退去する。オ2待ち行列系を退去した客は、オ1待ち行列へ入る。

このモデルに対して、定常状態の存在を仮定して，定常状態における系の状態確率について考察する。この場合、系の状態を表すために、次の変数を導入する。

$u(t)$ ---時刻tで次の客が到着するまでの時間

$v_1(t)$ ---時刻tで窓口1でサービス中の客の残りサービス時間

$v_2(t)$ --- 同じく窓口2での残りサービス時間

$l_1(t)$ ---時刻tでオ1待ち行列系にいる客の数

$l_2(t)$ 同じくオ2待ち行列系の客の数

$l_1(t)$, $l_2(t)$は、サービス中の客も含むとする。また，これら

が、tに依存しない表現をもつときには、(t)を省略することもある。

モデルの仮定より、$\{(u(t), v_1(t), v_2(t), l_1(t), l_2(t))\}_{t=-\infty}^{+\infty}$は、マルコフ過程となっている。さらに、この論文では、この過程が強定常であると仮定する。この仮定は、この系が平衡状態をもつということとほぼ同値である。

§3 基本方程式

この節では、定常過程 $\{(u(t), v_1(t), v_2(t), l_1(t), l_2(t))\}$ に関する定常方程式を立てる。前節で述べたように、これは、マルコフ過程であるから、いくつかの正則条件を付け加えるならば、Kolmogrov の方程式を立てることは可能である。しかし、それは、たいへん繁雑なものになってしまう。ここでは、点過程を導入することにより、もう少し分りやすい表現をもつ方程式系を求める。まず、この待ち行列系には、次のような点過程があることに注意しよう。

N_a --- 客の到着時点よりなる点過程

N_d --- 客の退去時点よりなる点過程

N_f --- 客が第2待ち行列系へ入る時点よりなる点過程。

N_r --- 第2待ち行列系を退去した客が、第1待ち行列系へ再び入る時点よりなる点過程。

なお、Nが点過程であるとは、Nが$(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$上のランダムな整数値測度であることをいう。ここに、$\mathbb{R}=(-\infty,+\infty)$, $\mathcal{B}(\mathbb{R})$は、$\mathbb{R}$上のボレル集合族とする。詳細については、Miyazawa(1985)を参照してほしい。$N_a \sim N_r$をもちいて、

$$N_i = N_a + N_r \quad , \quad N_o = N_d + N_f \quad , \quad N = N_i + N_o$$

を定義する。ここに、'+'は、点過程の重ね合せを意味する。N_iは、第1待ち行列系への客の入力時点を表し、一方N_oは、そこからの退去時点を表す。

前節での定常性の仮定より、$N_a, N_d, N_f, N_r, N_i, N_o, N$は、過程$\{(u(t), v_1(t), v_2(t), l_1(t), l_2(t))\}$と共に、同時に定常な点過程となっている。この論文では、これら点過程に対し次の仮定を加える。

(*) N_a, N_d, N_f, N_rの各点は、同じ時刻に重なることはない。すなわち、Nは、単純点過程である。

後での計算のために、いくつかの基本的記号を説明しておこう。

T ---- 客の到着間隔（その分布は、F, ラプラス変換は、$\tilde{F}$）

S_1 ---- 窓口1のサービス時間（G_1, $\tilde{G}_1$）

S_2 ---- 窓口2のサービス時間（G_2, $\tilde{G}_2$）

$\lambda = (E(T))^{-1}$（客の外部からの到着率）

$\lambda_f = E(N_f(0,1])$（第2待ち行列系へのフィードバック率）

$\lambda_d = E(N_d(0,1])$ （客の外部への退去率）

$\lambda_r = E(N_r(0,1])$ （客の第1待ち行列系への再入力率）

定常であることより，

$$\lambda = \lambda_d \quad , \quad \lambda_f = \lambda_r$$

$$(\lambda_d + \lambda_f)(1-p) = \lambda_d$$

したがって，

$$\lambda_f = \lambda_r = \frac{p}{1-p}\lambda$$

が成り立つ。さて、仮定(*)が成り立つことより，次の強度保存則が成り立つ（仮定(*)が成立しないときにも同様な法則を作ることが可能である）。

補題1（Miyazawa(1985a)）

5つの変数をもつ実数値関数 f に対し，

$$X(t) = f(u(t), v_1(t), v_2(t), l_1(t), l_2(t))$$

とおくとき，$\{X(t)\}$ が確率1で右微分可能な標本関数をもつならば，次の式が成り立つ。

$$
\begin{aligned}
(1) \quad E(X'(0)) = & \lambda\{E_a(X(0-)) - E_a(X(0+))\} \\
& + \lambda\{E_d(X(0-)) - E_d(X(0+))\} \\
& + \lambda_f\{E_f(X(0-)) - E_f(X(0+))\} \\
& + \lambda_f\{E_r(X(0-)) - E_r(X(0+))\}
\end{aligned}
$$

ここに，E_a, E_d, E_f, E_r は，N_a, N_d, N_f, N_f に関する

Palm 分布 P_a, P_d, P_f, P_r についての期待値を表す。

注）Palm分布とは、時刻0において対応する点過程の点が存在したという条件のもとでの確率分布である。

また、モデルの仮定より、次の関係が成り立つ。

補題2.

(2) $E_0(X(0-)) = E_d(X(0-)) = E_f(X(0-))$

(3) $E_0(X(0+)) = pE_f(X(0+)) + (1-p)E_d(X(0+))$

ここに、E_0 は、N_0 に関する Palm分布 P_0 についての期待値である。

補題1を適用して、基本方程式を得るために、$X(t)$ を次のように定める。任意の実数 ξ, θ_1, θ_2 及び整数 i, j に対し、

(4) $X(t) = e^{-\xi u(t) - \theta_1 v_1(t) - \theta_2 v_2(t)} \chi_{\{l_1(t)=i,\ l_2(t)=j\}}$

ここに、χ_A は、集合 A の指示関数であるとする。計算過程は繁雑であるので略し最終的な結果を以下に述べる(この計算の途中で補題2が使われる)。まず、次の記号を定義しておこう。

$$\Phi(\xi, \theta_1, \theta_2, x, y) = \sum_{i,j=0}^{+\infty} E(e^{-\xi u - \theta_1 v_1 - \theta_2 v_2}; l_1 = i, l_2 = j) x^i y^j$$

$$\Phi_{0\cdot}(\xi, \theta_2, y) = \sum_{j=0}^{+\infty} E(e^{-\xi u - \theta_2 v_2}; l_1 = 0, l_2 = j) y^j$$

$$\Phi_{\cdot 0}(\xi,\theta_1,x)=\sum_{i=0}^{+\infty}E(e^{-\xi u-u_1v_1};\ l_1=i,\ l_2=0)x^i$$

$$\Phi^a(\theta_1,\theta_2,x,y)=\sum_{i,j=0}^{+\infty}E_a(e^{-\theta_1v_1^- -\theta_2v_2^-};\ l_1^-=i,\ l_2^-=j)x^iy^j$$

$$\Phi^d(\xi,\theta_2,x,y)=\sum_{i,j=0}^{+\infty}E_d(e^{-\xi u^- -\theta_2v_2^-};\ l_1^+=i,\ l_2^+=j)x^iy^j$$

$$\Phi^r(\xi,\theta_1,x,y)=\sum_{i,j=0}^{+\infty}E_r(e^{-\xi u^- -\theta_1v_1^-};\ l_1^-=i,\ l_2^-=j)x^iy^j$$

Φ^a,Φ^d,Φ^r についても Φと同様に $\Phi^a_{0\cdot}(\theta_2,y)$, $\Phi^a_{\cdot 0}(\theta_1,x)$ 等が定義される。また、$E(X;A)=E(X\chi_A)$ であり, $l_i^-=l_i(0-)$ $l_i^+=l_i(0+)$ 等の略号をもちいた。さらに、次の記号を導入しておこう。

$$P^a_{0,0}=P_a(l_1^-=0,\ l_2^-=0)$$

$$\varphi(\xi)=E(e^{-\xi u};\ l_1=0,\ l_2=0)$$

$$D(\xi)=E_d(e^{-\xi u^-};\ l_1^+=0,\ l_2^+=0)$$

$$R(\xi)=E_r(e^{-\xi u^-};\ l_1^+=0,\ l_2^+=1)$$

このとき、以下の3つの方程式系が得られる。これらの方程式を基本方程式と呼ぶ。

(5) $$(\xi+\theta_2)\Phi_{0\cdot}(\xi,\theta_2,y)-\theta_2\varphi(\xi)$$
$$=\lambda(\Phi^a_{0\cdot}(\theta_2;y)-\Phi^d_{0\cdot}(\xi,\theta_2,y))$$
$$+\lambda_f(\Phi^r_{0\cdot}(\xi,y)-y\Phi^d_{0\cdot}(\xi,\theta_2,y))$$
$$+\lambda_f y(1-\tilde{G}_2(\theta_2))D(\xi)$$

(6) $(\xi+\theta_1)\Phi_{\cdot 0}(\xi,\theta_1,x)-\theta_1\varphi(\xi)$

$$
\begin{aligned}
&= \lambda(1-x\tilde{F}(\xi))\Phi^{a}_{\cdot 0}(\theta_1,x) \\
&\quad +((\lambda+\lambda_f)x-\lambda\tilde{G}_1(\theta_1))\Phi^{d}_{\cdot 0}(\xi,x) \\
&\quad -\lambda_f x\Phi^{r}_{\cdot 1}(\xi,\theta_1,x) \\
&\quad +\lambda x F(\xi)(1-\tilde{G}_1(\theta_1))P^{a}_{0,0} \\
&\quad +\lambda(\tilde{G}_1(\theta_1)-1)D(\xi) \\
&\quad +\lambda_f x(1-\tilde{G}_1(\theta_1))R(\xi)
\end{aligned}
$$

(7) $(\xi+\theta_1+\theta_2)\Phi(\xi,\theta_1,\theta_2,x,y)$

$$
\begin{aligned}
&\quad -\theta_1\Phi_{0\cdot}(\xi,\theta_2,y)-\theta_2\Phi_{\cdot 0}(\xi,\theta_1,x) \\
&= \lambda(1-x\tilde{F}(\xi))\Phi^{a}(\theta_1,\theta_2,x,y) \\
&\quad +((\lambda+\lambda_f)x-(\lambda+\lambda_f y)\tilde{G}_1(\theta_1))\Phi^{d}(\xi,\theta_2,x,y) \\
&\quad +\lambda_f(1-xy^{-1}\tilde{G}_2(\theta_2))\Phi^{r}(\xi,\theta_1,x,y) \\
&\quad +\lambda x F(\xi)(1-\tilde{G}_1(\theta_1))\Phi^{a}_{0\cdot}(\theta_2,y) \\
&\quad +(\lambda+\lambda_f y)(\tilde{G}_1(\theta_1)-1)\Phi^{d}_{0\cdot}(\xi,\theta_2,y) \\
&\quad +\lambda_f y\tilde{G}_1(\theta_1)(1-\tilde{G}_2(\theta_2))\Phi^{d}_{\cdot 0}(\xi,x) \\
&\quad +\lambda_f xy^{-1}\tilde{G}_2(\theta_2)(1-\tilde{G}_1(\theta_1))\Phi^{r}_{0\cdot}(\xi,y) \\
&\quad +\lambda_f x(\tilde{G}_2(\theta_2)-1)\Phi^{r}_{\cdot 1}(\xi,\theta_1,x) \\
&\quad +\lambda_f y(\tilde{G}_1(\theta_1)-1)(\tilde{G}_2(\theta_2)-1)D(\xi) \\
&\quad +\lambda_f x(\tilde{G}_1(\theta_1)-1)(\tilde{G}_2(\theta_2)-1)R(\xi)
\end{aligned}
$$

§4 主な結果

(5)−(7) より以下の結果が導びかれる。

(i) 人数分布間の関係式

$$(8)\quad \lambda(x-1)E_a(x^{l_1^-}y^{l_2^-}) = ((\lambda+\lambda_f)x-(\lambda+\lambda_f y))E_d(x^{l_1^+}y^{l_2^+}) + \lambda_f(y-x)E_r(x^{l_1^-}y^{l_2^+}) \quad (|x|, |y|<1)$$

(8)式は、到着、退去、再入力(N_r)の各時点における人数分布((l_1, l_2)の分布)の関係式である。3つの分布のうち、いづれか2つがわかれば、残りの分布が計算できることを示している。

(ii) 到着がポアッソン過程である場合の系内総人数分布

$$H(x) = \sum_{n=0}^{+\infty}(1-p)p^n G_T^{((n+1)*)}(x)$$

とおき、そのラプラス変換を $\tilde{H}$ で表す。このとき、H をサービス分布とし、到着率 λ をもつ M/GI/1 待ち行列の待ち人数分布の母関数を $\phi_{M/H/1}(x)$ とするならば、すなわち

$$\phi_{M/H/1}(x) = \frac{\lambda(x-1)\tilde{H}(\lambda(1-x))}{x-\tilde{H}(\lambda(1-x))} \qquad (|x|<1)$$

ならば

$$(9)\quad E_a(x^{l_1^-+l_2^-}) = \phi_{M/H/1}(x)\cdot E_a(x^{l_2^-} \mid l_1^-=0) \qquad (|x|<1)$$

が成り立つ。(9)式は、一つの分解式である。この分解が、

単純な分解ではなく、フィードバック部分($\phi_{M/H/1}$)と、付加的部分($E_a(x^{l_2^-} \mid l_1^- = 0)$)に分れる点は注目してよいと思う。

(iii) 一般のGI入力の場合における総仕事量分布.

$w_1(t)$ ⋯⋯ 時刻 t で系内にいる客を待ち行列1がすべてサービスするのに必要な時間.

$w_2(t)$ ⋯⋯ 同じく、待ち行列2が必要な時間.

とすれば、

(10) $$E_a(e^{-\theta_1 w_1^- - \theta_2 w_2^-})$$
$$= \frac{\theta_1 \tilde{G}_1(\theta_1)\Phi_{0\cdot}(\xi, \theta_2, y) + \theta_2 \tilde{G}_2(\theta_2)\Phi_{\cdot 0}(\xi, \theta_1, x) + \lambda(1-\tilde{G}_1(\theta_1))(1-\tilde{G}_2(\theta_2))(\Phi(\xi) - p^a_{0,0})}{\lambda G_1(\theta_1) G_2(\theta_2)(x\hat{F}(\xi) - 1)}$$
$$+ \frac{[\theta_2(\tilde{G}_1(\theta_1) - 1) + \theta_1(\tilde{G}_2(\theta_2) - 1)]\varphi(\xi)}{\lambda G_1(\theta_1) G_2(\theta_2)(x\hat{F}(\xi) - 1)}$$

(11) $$E_a(e^{-\theta_1 w_1^-}) = \frac{\theta_1 \Phi_{0\cdot}(-\theta_1, 0, y)}{\lambda(x\hat{F}(-\theta_1) - 1)}$$

(12) $$E_a(e^{-\theta_2 w_2^-}) = \frac{\theta_2 \Phi_{\cdot 0}(-\theta_2, 0, x)}{\lambda(x\hat{F}(-\theta_2) - 1)}$$

(11), (12) は、(10) で、$\theta_2 = 0$, $\theta_1 = 0$ とすれば得られる。なお、(10)〜(12) において、

$$x = \frac{(1-p)G_1(\theta_1)}{1 - pG_1(\theta_1)G_2(\theta_2)}, \quad y = \frac{(1-p)G_1(\theta_1)G_2(\theta_2)}{1 - pG_1(\theta_1)G_2(\theta)}$$

とする。((11)式では、$\theta_2 = 0$, (12)式では $\theta_1 = 0$ とする)

(10)式は (W_1, W_2) の結合分布が $\Phi_{\cdot 0}$ と $\Phi_{0 \cdot}$ により表わされることを示している。これも一種の分解表現である。

§5 おわりに.

この論文では、ベルヌイフィードバック型についてのみ考えたが、応用上は、フィードバック回数が一般分布に従う場合の方が重要であろう。この場合には、個々の客のフィードバック回数を変数に取り入れる必要があり基本方程式はたいへん複雑となる。しかし、著者の直観ではあるが、最終的関係式(9)〜(12)は、同じような形で求まるのではないかと思う。今後研究を進めていきたいと考えている。

なお、(ii),(iii) のような結果が、系内人数の組 (l_1, l_2) に関して成り立てば、積形式との比較として面白いが、これらについては、簡単な表現を得ることはできなかった。これも今後の課題である。

REFERENCES

Disney, R., König, D. and Schmidt, V. (1984) Stationary queue-length and waiting-time distributions in single-server feedback queues, *Adv. Appl. prob.* 16, 437-446.

Disney, R. and König, D. (1985) Queueing networks: a survey of their random processes, *SIAM Review* 27, 335-403.

Kimura, T. (1984) QNA: Queueing Network Analyzer について, オペレーションズ・リサーチ, 6月－8月号.

Miyazawa, M. (1985a) The intensity conservation law for queues with randomly changed service rate, *J. Appl. Prob.* 22, 408-418.

Miyazawa, M. (1985b) The invariance relations of *GI/GI/1/k* and its applications to approximations, 京都大学数理解析研究所講究録 564, 198-209.

Miyazawa, M. (1986) Approximations of the queue length distribution of an *M/GI/s* queue by the basic equations, *J. Appl. Prob.* 23 (to appear).