数理解析研究所講究録
596巻 1986年 171-178

近似式計算における工夫について

北海道大学　　木村俊一 (Toshikazu KIMURA)

1．まえがき

待ち行列ネットワークの分解近似（木村 [1984a]）に関連して、筆者は GI/G/s 待ち行列の近似に興味をもち、特に、その平均待ち時間に対する近似式をこれまでにいくつか提案してきた (Kimura [1984b, c], 木村 [1985])。それらの近似式は、いずれも M/M/s, M/D/s, D/M/s の内挿近似であるために、近似式の精度評価に際して、これら３つのシステムの平均待ち時間と関連する諸量を実際に計算する機会をもった。

本論文では、筆者のこの経験をもとに、いくつかの有用な数値計算上の工夫を紹介する。

2．表記法

先着順サービスにしたがう GI/G/s 待ち行列を近似の対象とする。その平均待ち時間を EW(GI/G/s) で表わす。到着時間間隔とサービス時間を表わす確率変数をそれぞれ u, v で表わし、これらの分布とモーメントに対し次の表記を用いることにする。

$$A(t) = P\{u \le t\}, \qquad B(t) = P\{v \le t\}$$

$$\lambda = 1/E[u], \qquad \mu = 1/E[v]$$

$$c_a^2 = Var[u]/E[u]^2, \qquad c_s^2 = Var[v]/E[v]^2$$

また、トラヒック密度を $\rho \equiv \lambda/s\mu \in [0, 1)$ で定義する。

3. EW(M/G/s) の近似に関連して

EW(M/G/s) の近似式中においては、次の量がしばしば重要な役割を果たすことが知られている (Boxma et al. [1979], Tijms et al. [1981], Miyazawa [1984])。

$$I(s) = \int_0^\infty \{1 - B_e(t)\}^s dt, \qquad s \geqq 2 \tag{1}$$

ここで、 B_e はサービス時間分布 B の定常残余寿命分布で、

$$B_e(t) = \mu \int_0^t \{1 - B(u)\} du \tag{2}$$

で定義される。 I(s) は EW(M/G/s) の軽負荷時での漸近的性質からもたらされるもので、軽負荷時における近似式の精度を高めるためには、必然的に必要になってくる (cf. Burman & Smith [1983])。

サービス時間分布が、一定分布 (D)、指数分布 (M)、超指数分布 (H_2) の場合には、 I(s) は陽な形で求められるため、数値計算上の問題は何ら生じないが、変動係数が1より小さい場合の代表的な分布 − Erlang分布に対しては、 I(s) を初等関数で表わすことができないために、数値積分が必要になる。Erlang分布は変動係数が1より大きい場合にも一次結合の形で用いられるため、 I(s) を求めるルーチンを作成しておくことは有用であると考えられる。以下では、サービス時間分布が k-Erlang 分布 (E_k) のときの I(s) の計算法について述べる。

3.1. I(s) の計算

k-Erlang分布の分布関数は

$$B(t) = 1 - e^{-k\mu t} \sum_{i=0}^{k-1} \frac{(k\mu t)^i}{i!}, \qquad t \geqq 0 \tag{3}$$

で与えられる。(2),(3)より、 B_e は

$$B_e(t) = 1 - \frac{1}{k} e^{-k\mu t} \sum_{i=0}^{k-1} \sum_{j=0}^{i} \frac{(k\mu t)^j}{j!}, \qquad t \geqq 0 \tag{4}$$

となる。(4)を(1)に代入すると、結局、(1)の被積分関数 $f(t) \equiv \{1 - B_e(t)\}^s$ は、指数関数と (k-1)s 次の多項式の積で表わされることがわかる。この場合、

Gauss-Laguerre法を用いれば厳密解を数値的に求められるが、ある特殊関数の零点に関する情報を必要とするために、これらのライブラリーをもたないパソコン・レベルの計算機を使用する際にはかなり面倒になる。そこで、ここでは被積分関数 f(t) だけを用いて計算できるよく知られたSimpsonの公式を用いることにする。

Simpsonの1/3則による有限区間 [a, b] 上での f(t) の数値積分は次式によって行なわれる。

$$\int_a^b f(t)dt = \frac{2}{3} h \{\frac{1}{2}(f_0+f_{2m}) + 2(f_1+\cdots+f_{2m-1}) + (f_2+\cdots+f_{2m-2})\} \qquad (5)$$

ここで、 $f_n = f(t_n)$, $t_n = a + nh$ $(n = 0,1,\ldots,2m)$, $h = (b - a)/2m$ である。しかし、(1)では $a = 0$, $b = \infty$ であるため、数値積分の刻み幅 h を積分区間長とは独立に決める必要がある。ここでは、 B_e の平均に依存して刻み幅 h を決めることにする。(2)より、 B_e の平均は $(1 + c_s^2)/2\mu$ となるから、これを N 等分したものを h とする、i.e., $h = (1 + c_s^2)/2N\mu$。この刻み幅で f(t) を刻んで(5)にしたがって計算を進めてゆき、適当な収束条件（例えば、$|f_n| < 10^{-8}$）を満たした偶数番目の点を(5)における 2m 番目の最終点として、計算を打ち切ることにする。このとき、求められた I(s) の数値積分値を $I_N(s)$ と表わすことにする。明らかに、同一の収束条件下では、 N が大きいほど $I_N(s)$ は I(s) の良い近似となる。

表１は、分布 B が一定分布、指数分布、超指数分布の場合の I(s) と $I_N(s)$ を比較したものである。刻みの個数としては、 N = 100, 1000 を用いた。表１より、(5)による I(s) の計算値は O(h) の誤差を含むことが直ちに読み取れる、i.e.,

$$I_N(s) = I(s) + O(h) \qquad (6)$$

N = 1000 の場合、 s の大きい値で少し誤差が目立つものの、実用上問題のない精度をもっている。しかし、 N = 100 では、精度の点で不満が残る。 N > 1000 とすれば勿論精度は上がるが、 N = 1000 ですでに一つのサンプルを計算するのに、 B や s にもよるが、 IBM 5550 [言語 = IBM-FORTRAN (REGMATH, 8087 OFF), OS = 日本語 DOS (Ver. K2.61)] で平均して約２分かかることを考慮すると、 N の値をこれ以上増やすことはできそうにない。そこで、次の外挿によって精度の向上をはかることにする。(6)より

$$I_{2N}(s) = I(s) + 0.5\ O(h)$$

となるから、

$$2I_{2N}(s) - I_N(s) = I(s) + O(h^2) \tag{7}$$

によって O(h) の誤差項を除くことが期待できる。表１の最下欄が N = 50 に対するこの外挿値を表わし、(7)によって N = 1000 を上回る高い精度の解が得られることがわかる。

表１． Simpsonの1/3則による I(s) の数値積分の比較

B	D		M		H_2
s	5	10	5	10	5
I(s)	.16666667	.90909091	.20000000	.10000000	.23904316
$I_{100}(s)$	.16660257	.90783369	.19987231	.09974955	.23872501
$I_{1000}(s)$	.16666026	.90896518	.19998723	.09997495	.23901131
(7), N=50	.16666666	.90909056	.19999990	.09999923	.23903806

Note: 超指数分布 H_2 は均衡平均をもち、その変動係数は $c_s^2 = 4.0$ である。

3.2. I(s) の近似

数値積分によらずに $B = E_k$ に対する I(s) をうまく近似することはできないだろうか？ 前節で述べた数値積分による方法は、比較的簡単とはいえ、あくまで計算機の使用を前提としていた。もし、 EW(M/G/s) の近似式が I(s) をその係数に含む EW(M/M/s) と EW(M/D/s) の内挿近似で、これらの平均待ち時間の値が数表等で容易に検索可能なときには、 I(s) の値を知るだけのために計算機を使うのは如何にも馬鹿げている。このような場合、正確さは多少犠牲にしても手軽な I(s) の近似式があれば便利である。

これまでに得られている I(s) の２モーメント近似の主なものは次の３つである。

1°. van Hoorn [1983] の近似：

$$I(s) \simeq \left(\frac{1 - c_s^2}{s + 1} + \frac{c_s^2}{s} \right) \frac{1}{\mu} \tag{8}$$

2°. Kimura [1984b] の近似：

$$I(s) \simeq \left\{ \left(s + \frac{1 - c_s^2}{1 + c_s^2} \right) \mu \right\}^{-1} \tag{9}$$

3°. Kimura [1984b] の近似：

$$I(s) \simeq \left(\frac{1 - c_s^{s+1}}{s + 1} + \frac{c_s^{s+1}}{s} \right) \frac{1}{\mu}, \qquad 0 \leqq c_s^2 \leqq 1 \tag{10}$$

1° は B = M と B = D に対する I(s) の値を発見的に内挿したものであり、 2° は Boxma et al. [1979] の近似式における係数から以下に述べるある極限定理を用いて導かれている。また 3° は、分布 B にそれと同一の平均と分散をもつ、ずらし指数分布 (M^d) をあてはめて得られたものである。

近似 1° ~ 3° ともに、 B = D と B = M に対しては厳密解を与える。また、 s が十分大きいところでは、漸近的に理論値に一致することが次の定理の結果を満たすことからわかる。

<u>定理 (Kimura [1984b])</u>： B(0+) = 0 を仮定する。このとき、

$$\lim_{s \uparrow \infty} sI(s) = \frac{1}{\mu}$$

表２は、これらの近似式の $B = E_k$ (k = 2,4,10) に対する精度を比較したものである。この表より、近似 3° が最も良いことがわかる。しかし、このことは近似 3° を用いた EW(M/G/s) に対する近似が最良であることを主張している訳ではない。実際、 Boxma et al. [1979] の近似式に I(s) としてこれらの近似を用いると、 k の値によっては 1° や 2° の方が 3° よりも良いことが確かめられている。

表２． Erlang分布に対する I(s) の近似の比較 (s = 5)

B	E_2	E_4	E_{10}
(7), N=50	.177 319 99	.169 486 02	.167 036 49
近似 1°	.183 333 33	.175 000 00	.170 000 00
近似 2°	.187 500 00	.178 571 43	.171 875 00
近似 3°	.170 833 33	.167 187 50	.166 700 00

４． EW(GI/M/s) の計算

EW(D/M/s) を計算するためのプログラムを書く手間と EW(GI/M/s) のそれとの間には本質的に何の差もない。プログラムの中で異なっているのは、到着分布の Laplace-Stieltjes変換 $A^*(z) = E[e^{-zu}]$ (Re $z \geq 0$) の定義だけであり、他は全く同じである。 EW(GI/M/s) のプログラムは EW(M/M/s) を計算するためにも使うことができるが、通常は出生死滅過程による定式化から得られる陽な公式を用いることが多い。その理由は、超越方程式

$$z = A^*(s\mu(1 - z)), \qquad |z| \leq 1 \tag{11}$$

を解くまでもなく、その単位円内の根 $z = \omega$ が $\omega = \rho$ と自明であること、待ち確率に対応する定数の計算に時間が多くかかること等である。

筆者は、 EW(GI/G/s) の近似式として、 EW(GI/M/s) を直接利用したものをこれまでに幾つか試みたが、その精度評価の際に EW(M/M/s) を EW(GI/M/s) 用のプログラムで計算することがあった。このとき、 ρ に関して単調に変化するはずの近似式の値が、時折異常な値を示すことに気付いた。さらによく調べてみると、この乱れは s が大きくなるにつれて小さくはなるが、その頻度は逆に増加し、 $s\rho$ = 整数 となる ρ で生じていることがわかった。この原因は、 EW(GI/M/s) を計算するために使った次の公式（藤木・雁部 [1980], p. 341 参照）の中にある。

$$EW(GI/M/s) = \frac{C}{s\mu(1-\omega)^2} \tag{12}$$

$$C = \left(\frac{1}{1-\omega} + \sum_{k=1}^{s} \binom{s}{k} \frac{s\{1 - A^*(k\mu)\} - k}{C_k\{1 - A^*(k\mu)\}\{s(1-\omega) - k\}} \right)^{-1} \tag{13}$$

$$C_k = \prod_{i=1}^{k} \frac{A^*(i\mu)}{1 - A^*(i\mu)}, \qquad k = 1,\ldots,s \tag{14}$$

定数 C の中に含まれる $\{s(1-\omega) - k\}$ $(k = 1,\ldots,s)$ の項は常に非零であると思い込んでいたが、M/M/s 待ち行列に対しては $\omega = \rho$ より、$s\rho = j$ $(j = 0,\ldots,s-1)$ となる ρ で確かに零となってしまう。またこのとき同時に、対応する分子も零になることがわかる。計算に使用した IBM 5550 はなぜかこの零割り算のエラーを検出できず、この事態の発生した項全体を零として計算を進めていたのである。

この『虫』を駆除するためには、定数 C の中で 0/0 となる

$$\frac{s\{1 - A^*(k\mu)\} - k}{s(1-\omega) - k} \tag{15}$$

の項を

$$1 + s\mu A^{*\prime}(k\mu) \tag{16}$$

で置き換えればよい。M/M/s 待ち行列以外では ρ の簡単な値に対して(15)が零になることはほとんどないので、実際にこの置き換えが必要となるのは極めて稀であると考えられるが、QNA のような待ち行列ネットワークの性能評価用ソフトウェアの中で EW(GI/G/s) の近似式を用いる際には、各ノードでの ρ はどのような値をとるか予想できず、(16)による修正をほどこしておくべきである。この事実は意外に知られていないようなので、ここで改めて指摘しておきたいと思う。

** 参考文献 **

Boxma, O.J., J.W. Cohen and N. Huffels (1979) "Approximations of the Mean Waiting Time in an M/G/s Queueing System," Opns. Res., 27, 1115-1127.

Burman, D.Y. and D.R. Smith (1983) "A Light-Traffic Theorem for Multi-Server Queues," Math. Opns. Res., 8, 15-25.

藤木正也，雁部頴一 (1980) 通信トラヒック理論，丸善.

van Hoorn, M.H. (1983) Algorithms and Approximations for Queueing Systems, Mathematische Centrum, Amsterdam.

木村俊一 (1984a) "QNA: Queueing Network Analyzer について，(1)~(3)," オペレーションズ・リサーチ，29，366-371，431-439，494-500.

Kimura, T. (1984b) "A Two-Moment Approximation for the Mean Waiting Time in the GI/G/s Queue," Mgmt. Sci., to be published.

Kimura, T. (1984c) "Heuristic Approximations for the Mean Waiting Time in the GI/G/s Queue," Research Report on Information Sciences, No. B-155, Tokyo Institute of Technology.

木村俊一 (1985) "Cosmetatos の近似式の一般化について," 待ち行列理論とその周辺，数理解析研究所講究録，No. 564，210-221.

Miyazawa, M. (1984) "Approximations of the Queue Length Distributions by the Basic Equations I: Case of M/GI/s Queues," Research Report of Dept. of Information Sciences, ISSUT/0-84-2, Science University of Tokyo.

Tijms, H.C., M.H. van Hoorn and A. Federgruen (1981) "Approximations for the Steady-State Probabilities in the M/G/c Queue," Adv. Appl. Prob., 13, 186-206.