数理解析研究所講究録
597巻 1986年 134-138

テータ函数と無限階微分方程式系

京都大学 数理解析研究所
河合隆裕

無限階微分方程式系は解析的に取扱いにくい代物ではあるが、それだけに興味深い対象である。ただ、一次元の場合でも（有限階の場合とは異う）単独方程式を考えたのでは解空間が無限次元になってしまうから、と云う理由だけで、まず手始めとして定数係数の系を一次元の時に考えるのは賢明ではないと考える：事態が退化して難しくなり過ぎるからである。［この付近の話題に就いての議論は別の機会に譲り度い。］実際

Sato, M., M. Kashiwara and T. Kawai: Microlocal analysis of theta functions. Adv. Studies in Pure Math. 4 (1984), 267-289

の主題である $\mathbb{R}$-holonomic 系は本質的に変数係数であるから、解空間の有限次元性、Reconstruction theorem 等の良い性質を持っている。本講演では、$\mathbb{R}$-holonomic 系の最も簡単な例である、佐藤先生により見出だされた Θ-zerovalue の満たす方程式系、即ち

$$(1)\quad [\exp P_j - 1]\, f(t) = 0 \quad (j = 1, 2)$$

但し

$$(2)\quad P_1 = \begin{bmatrix} 0 & t \\ 4\pi i\left(t\frac{d}{dt} + \frac{1}{2}\right) & 0 \end{bmatrix}$$

$$(3)\quad P_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 4\pi i\frac{d}{dt} & 0 \end{bmatrix}$$

を題材に、このように純粋に局所的な条件のみから、Θ-zerovalue の変換に関する大域的

な結果を導き出せることを示し，"$\mathbb{R}$-holonomic系により函数を統制できる" という スローガンを実証することを試みた。その議論の大筋は次の通り：

$t \longmapsto s = -1/t$ という座標変換を行い，P_j を s-座標で書き下したものを $\tilde{P}_j$ とすれば，$S = \begin{bmatrix} s^{1/2} & 0 \\ 0 & s^{3/2} \end{bmatrix}$ として

$$S^{-1} \tilde{P}_1 S = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -4\pi i \frac{d}{ds} & 0 \end{bmatrix}$$

$$S^{-1} \tilde{P}_2 S = \begin{bmatrix} 0 & s \\ 4\pi i \left(s\frac{d}{ds} + \frac{1}{2} \right) & 0 \end{bmatrix}$$

故，(1) より

$$(4) \begin{cases} \exp(-P_2)\, S^{-1} f(-1/s) = S^{-1} f(-1/s) \\ \exp(P_1)\, S^{-1} f(-1/s) = S^{-1} f(-1/s) \end{cases}$$

を得る。ここで $\exp(-P_2)\exp(P_2) = 1$ に

注意すれば、 (4) は

(5) $\quad (\exp P_j - 1)\, S^{-1} f(-1/s) = 0 \quad , \quad j = 1, 2$

と同値である。ここで方程式系 (1) の正則解の空間の次元が ($\{\mathrm{Im}\, s > 0\} = \{\mathrm{Im}\, t > 0\}$ で局所的に) 1次元である (T. Kawai, An example of a complex of linear differential operators of infinite order, Proc. Japan Acad., 59 (1983), 113-115) ことより

(6) $\quad f(s) = C S^{-1} f(-1/s) \qquad (C：定数)$

を得る。ここで

$$f(t) = \begin{bmatrix} \sum_{\nu} \exp(\pi i \nu^2 t) \\ \sum_{\nu} 2\pi i \nu \exp(\pi i \nu^2 t) \end{bmatrix}$$

が (1) を満たすことより, (6) の第一成分を $s = i$ で比べて $C = \exp(\pi i/4)$ を得る。この

ようにして、純粋に局所的な関係式（1）から虚変換に関する大域的な情報が得られたことになる。なお、ここでは $t \longmapsto -1/t$ という変換を天下り的に導入したが、この変換自身も、P_1、P_2 の特殊な交換関係を用いて

$$\exp\left(-\frac{\pi}{2}\left(\frac{-P^2+Q^2}{4\pi i}\right)\right)$$

として理解されることも判っている。これに就いては、上述の S-K-K の Adv. St. in Pure Math. の論文，§2 を参照され度い。