数理解析研究所講究録
597巻 1986年 97-108

Leech latticeの自己同型群とテータ関数

名大　小池　正夫
(Masao Koike)

1　24次元Euclid空間内のLeech lattice Lは正定値，unimodularな2次形式を持ち，長さ2のvectorがないことで特徴づけられる。ここでは，その自己同型群 $\cdot O$ の各元によって固定される元のなす部分lattice

$$L^{\pi} = \{\, x \in L \,;\ \pi \cdot x = x \,\}$$

を考える。各πに対して，L^{π}は又，正定値な2次形式をもつ。それに付随するテータ関数

$$\vartheta_{\pi}(z) = \sum_{x \in L^{\pi}} e^{\pi i z \langle x, x \rangle} \qquad z \in H = \{ z \in \mathbb{C} \,;\, \mathrm{Im}\, z > 0 \}$$

は保型形式をなす。

L自身のテータ関数は容易に定められるが，全てのπに対して$\vartheta_{\pi}(z)$を定めることは容易なことではない。ここでは Conway-Norton の予想 "Moonshine" との関係で生じたideaを用いて，この問題に取り組む。

2 Moonshineについて説明する.

F_1をMonsterと呼ばれるsporadicな単純群の中で位数最大のものとする。F_1がMoonshineを持つとは. F_1の各元gに対して上半平面の関数$T_g(z)$（Thompson seriesと呼ばれる）が対応させられて. 次の性質をみたす。

(0) $T_g(z)$はFourier展開 $T_g(z) = q^{-1} + \sum_{n=1}^{\infty} H_n(g) q^n$, $q = e^{2\pi i z}$ できて. H上の正則関数である。

(1) 単位元eのThompson series $T_e(z)$は楕円modular invariantである. i.e. $T_e(z) = J(z) - 744 = q^{-1} + 196884q + \cdots$

(2) 各$n \geq 1$に対して. $H_n(g)$はgの関数と見た時. F_1の指標になっている。

(3) 各gに対して. genus 0のあるFuchs群Γ_gが対応して$T_g(z)$はΓ_gの保型関数体（有理関数体と同型）の生成元となる. Γ_gについては更に性質が付加されるが省く.

Moonshineの研究は遅々として進んでいない。基本的なこと.

(i) (0)～(3)をみたす$T_g(z)$は1意的に定まるか?

(ii) どんな群がMoonshineを持つか?

すら. わかっていない。 $G = PSL_2(\mathbb{F}_q)$については[6]参照

Conway・Norton [2]はF_1の各元gに対して(0)(1)(3)を

みたす $T_g(z)$ を具体的（Γ_g, 小さいFourier係数, η-積表示等）な関数として与えているが、(2)の性質が未だ証明できていない。

3. $\vartheta_\pi(z)$ の決定と Moonshine との関係についてのべる.

そのために Frame shape について説明する. ρ を $\cdot O$ の L への作用から得られる24次元表現とする。すると $\det(X\cdot 1_{24} - \rho(\pi))$ は有理整数係数の多項式で、根は全て1のべき根である. 故に次のようにかける.（1意的に）

$$\det(X\cdot 1_{24} - \rho(\pi)) = \prod_{1\le t\in\mathbb{Z}} (X^t - 1)^{r_t} \qquad r_t \in \mathbb{Z}$$

一般に symbol $\prod_{1\le t\in\mathbb{Z}} t^{r_t} = 1^{r_1}\cdot 2^{r_2}\cdot 3^{r_3}\cdots$ で $\forall t$ について $r_t = 0$ となるものを generalized permutation という。 π の（ρ に関する）Frame shape とは上の $\rho(\pi)$ の characteristic polynomial の分解を用いて generalized permutation $\prod t^{r_t}$ のことです. Frame shape は置換の輪積表示の拡張である.

$\cdot O$ の元の Frame shape は 近藤[8] を参照.

generalized permutation $\pi = \prod t^{r_t}$ に付随する η-積を

$$\eta_\pi(z) = \prod \eta(tz)^{r_t}$$

で定義する. ここで $\eta(z)$ は Dedekind の η 関数と呼ばれる "weight $\frac{1}{2}$" の保型形式 $\eta(z) = q^{\frac{1}{24}}\prod_{n=1}^{\infty}(1-q^n)$ です.

Conway-Norton [2] に書かれている．Leech lattice と Moonshine との関係についての予想とは

$$
(*)\begin{cases}
\cdot\, O \text{ の各元 } \pi \text{ に対して．} F_1 \text{ の元 } g \text{ が対応して} \\
\vartheta_\pi(z)/\eta_\pi(z) \quad = \quad T_g(z) + \mathrm{const} \\
\text{とかけるだろう．}
\end{cases}
$$

π と g の対応の意味づけから，Kac, Lepowsky 等による L を用いて F_1-module の構成があるが，予想の証明にはなっていない。

4 我々の $\vartheta_\pi(z)$ を決める idea というのは $(*)$ の中で $\eta_\pi(z)$, $T_g(z)$ はともに具体的に書けているものの中にあるのだから，$(*)$ が成りたつような，$\vartheta_\pi(z)$（2次形式のテータ関数という保形形式の中で特殊なもの）の存在を許すような $T_g(z)$ と $\eta_\pi(z)$ に対して見つけられるか？

5 定理をかく前に π を次のように分類しておくと便利だ．π に対して $\pi = \prod t^{r_t}$ と Frame shape でかく．この時

$$wt\ \pi = \frac{1}{2}\sum r_t,$$

$$\deg \pi = \sum t r_t,$$

$$\mathrm{ord}\ \pi = \text{l.c.m. of } t \ \text{ s.t. } r_t \neq 0.$$

と定義する。

(1)　π が C 型 $\underset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$ ${}^{\forall}r_t \geq 0$

(2)　π が E 型 $\underset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$ $\mathrm{wt}\,\pi > 0$ で ${}^{\exists}t$ s.t $r_t < 0$

(3)　π が F 型 $\underset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$ $\mathrm{wt}\,\pi = 0$

・0 の Frame shape は上の 3 種類に完全に分類される．π が F 型の時 $L^{\pi} = \{0\}$ であって．$\vartheta_\pi(z) = 1$ となる．だから．$\vartheta_\pi(z)$ の決定という立場からは F 型の元は無視してよい．この場合は $\eta_\pi(z)$ 自身が保型関数として．直接 $T_g(z)$ と関係してくる．それについては 近藤[8] を参照．

以下．π は C 型，又は E 型とする．

この時は．$\vartheta_\pi(z)$, $\eta_\pi(z)$ は 同じ正の weight を持った保型形式で，その商が保型関数となっている。

6. 重要な Atkin-Lehner involution を定義する．

N を $\mathrm{ord}\,\pi$ の倍数として，Q を N の Hall divisor．i.e. $Q|N$, $(Q, \frac{N}{Q}) = 1$，とする．この時 generalized permutation $\pi = \prod t^{r_t}$ への Atkin-Lehner involution $W_{Q,N}$ の作用を

$$\pi \circ W_{Q,N} \underset{\text{def}}{=} \prod_{\substack{t \\ s=(t,Q)}} \left(\frac{t \cdot Q}{s^2}\right)^{r_t}$$

π を・0 の Frame shape に対して N を適当にえらび（たいていは $\mathrm{ord}\,\pi$）．全ての Hall divisor Q を動かして．$\pi \circ W_{Q,N}$ を考え．

そのうち相異なるもの達の集合を $S(\pi)$ とかく.

<u>命題</u>　π が C型 $\Rightarrow$ $S(\pi)=\{\pi\}$

π が E型 $\Rightarrow$ $S(\pi)$ の元 π' は $\deg \pi'=0$ 又は

$\cdot 0$ の他の元の Frame shape となる.

これは $\cdot 0$ の Frame shape の表を眺めることで証明ができるが, intrinsic な説明がほしい. 別ないい方をすれば, このような性質を Frame shape がもつことと, Moonshine の存在とが深く関っていると思われる.

7　Atkin-Lehner involution を使って E型を細かく分類する.

π が self-conjugate な E型 $\underset{def}{\Longleftrightarrow}$ $S(\pi)\ni\pi'$ $\pi\neq\pi'$ ならば

$\deg \pi'=0$ となる.

そうでない時, non-self-conjugate という.

更に self-conjugate な E型の元 π に対して

π が E_1 型 $\underset{def}{\Longleftrightarrow}$ $S(\pi)=\{\pi\}$

π が E_2 型 $\underset{def}{\Longleftrightarrow}$ $S(\pi)\neq\{\pi\}$

と分ける。

E_1 型と C型は同じ形の定理をみたす.

<u>定理 1</u>　πが C型又は E_1型とする. この時, 次の性質をみたす保型形式 $\theta_\pi(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(\pi) q^n$ が存在する.

(1.1)　$\theta_\pi(z)$ は 2次形式のテータ関数である.

(1.2)　$a_1(\pi) = 0$

(1.3)　F_1 のある元 g が存在して,

$$\theta_\pi(z) / \eta_\pi(z) = T_g(z) + \mathrm{const}$$

が成りたつ。

かなりの π については $\theta_\pi(z)$ は1意的に定まるが, そうでないものもある

このような $\theta_\pi(z)$ の存在とその具体的表示は 近藤・田坂 [9] による $\pi \in M_{24}$ の際の $\vartheta_\pi(z)$ の決定の参考になった.

<u>8</u>　残った場合は 定理 1 のように (1.1)~(1.3) の条件で $\theta_\pi(z)$ がはっきりときまるのとは少し違った様相を呈する.

ここと, 9 とでそれを示す. 8 では簡単のため, 次の

〈仮定〉　π は E_2型で $S(\pi) = \{\pi, \pi'\}$, $\deg \pi' = 0$ とする.

を設ける.

$t_{g,c}(z) = T_g(z) + c$, c const とかく. 更に c が文脈から求まる時は 単に $t_g(z)$ とかく.

<u>定理 2</u>　π を上のようにした時、次の性質をみたす保型形式 $\theta_\pi(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(\pi) q^n$ が一意的に存在する。

(2.1)　$\theta_\pi(z)$ は 2次形式のテータ関数である。

(2.2)　$a_1(\pi) = 0$

(2.3)　F_1 のある元 g が存在して

$$\theta_\pi(z) / \eta_\pi(z) = t_g(z)$$

(2.4)　F_1 のある元 g' が存在して

$$\theta_\pi(z) / \eta_{\pi'}(z) = 1 + \beta_\pi t_{g'}^{-1} \qquad \beta_\pi : \text{const.}$$

(2.5)　g の位数を m とし、$m+$ で [2] の中での F_1 の元の表示とする。この時 ある定数 α_π で

$$\theta_\pi(z)/\eta_\pi(z) + \alpha_\pi \theta_\pi(z)/\eta_{\pi'}(z) = t_{m+}(z).$$

ここでは (＊) 以外にも、Thompson series とのつながりの仕方があることに注意したい。

9. π が non-self-conjugate E型の場合を説明する。

今まで見たように π が C型又は self-conjugate な E型の場合は Conway-Norton の予想 (＊) が正しいことが想像できるのだが、上の場合 (＊) の成りたつような $\theta_\pi(z)$ は存在しないことがわかる。しかし、この場合でも 定理2 の (2.4), (2.5) といった別なつながりが Thompson series とあることが期待され

るが、件を容易に見つからなかった。近藤[10]による$\vartheta_\pi(z)$の計算例を詳しく調べることで、最終的に次の定理を得ることができた。

πが non-self-conjugate なE型の元とする。これらは15個の共役類からなり、3つずつが同じ$S(\pi)$に属している。すなわち　$S(\pi)=\{\pi_1,\pi_2,\pi_3,\pi_4\}$　で　$\deg\pi_4=0$,
π_1,π_2,π_3は$\cdot O$の元の Frame shape となっている。

<u>定理3</u>　各π_iに対して保型形式$\theta_{\pi_i}(z)$　$(i=1,2,3)$
$=\sum_{n=1}^{\infty}a_{\pi_i}(n)q^n$ が存在して次の性質をみたす。

(3.1)　$\theta_{\pi_i}(z)$は2次形式のテータ関数である

(3.2)　$a_1(\pi_i)=0$

(3.3)　F_1の元g, g'が存在して

$$\theta_{\pi_i}(z)/\eta_{\pi_i}(z)=t_g(z)+c_{\pi_i}\cdot t_{g',b_{\pi_i}}^{-1}(z)$$

(c, b はある定数) とかける。

(3.4)　F_1のある元g_iが存在し

$$\theta_{\pi_i}(z)/\eta_{\pi_i}(z)=t_g(z)+t_{g'}(z)-t_{g_i}(z)$$

とかける。

10 これまでの話で **4** で説明した方針に従って，$\vartheta_\pi(z)$ となるべき保形形式として $\theta_\pi(z)$ をある場合は1意的に，そうでない場合も他の事実と組み合わせて，唯1つの $\theta_\pi(z)$ を見つけることができる．そして，Conway-Norton の予想(＊)は次のようにかきかえられる．

<u>予想</u> $\qquad \vartheta_\pi(z) = \theta_\pi(z)$.

定理1, 2, 3が $\vartheta_\pi(z)$ がみたしていると期待される。

11 Conway-Norton の予想(＊)を足がかりに，求めた $\theta_\pi(z)$ を全体として 改めて眺めて見ると又新しい性質がうかびあがってくる。

Atkin-Lehner involution $W_{\theta,N}$ は次の3つの対象に作用している

(1) generalized permutation

(2) 保型形式 (保型関数)

(3) 2次形式のテータ関数．

(1)については **6** で説明した。(2)は Atkin-Lehner involution が最初に定義されたところで Atkin-Lehner [1] を参照．実は(1)の定義は 次の命題からきている。

命題 $$\eta_\pi(z) \mid W_{Q,N} = (\mathrm{const}) \times \eta_{\pi\circ W_{Q,N}}(z)$$

(3)については 2次形式のテータ関数は保型形式だから、$W_{Q,N}$が作用できる。この時 北岡[3]によって

$$\theta(z; M) \mid W_{Q,N} = (\mathrm{const}) \times \theta(z; M')$$

ここで M, M' は 2次形式の lattice で $\theta(z, M)$ はそれに付随するテータ関数である。この時 M'は Mと$W_{Q,N}$で定まるから

$$\theta(z; M') \underset{\mathrm{def}}{=} \Theta(z; M, Q, N) \quad \text{とかく}$$

定理 4 πとπ'を $\cdot O$の Frame shape とする ($\pi = \pi'$でもよい)
Atkin-Lehner involution $W_{Q,N}$で $\pi\circ W_{Q,N} = \pi'$ とするならば

$$\Theta(z; L^\pi, Q, N) = \theta(z; L^{\pi'}) \left(= \theta_\pi(z) \text{ とする}\right)$$

が成りたつ。

定理4は **10** の予想で $\vartheta_\pi(z) = \theta(z; L^\pi)$ が定まったとしてのことであるが、Atkin-Lehner involution が compatible に作用していると期待される。これも intrinsic な証明がぜひほしい。

12. $\cdot O$の Frame shape 達と $S(\pi)$の元達は他にも、いろいろと

興味深い性質を持っているのですが、詳しくは[7]を参照。又 $\theta_\pi(z)$ が具体的にどうなるかも、ここではひとつもかきませんが [5],[6],[7],[9],[10] を参照してください。

References

[1]A。O。L。Atkin and J。Lehner, Hecke operators on $\Gamma_0(m)$,Math。Ann。,185(1970)

[2]J。H。Conway and S。P。Norton, Monstrous moonshine, Bull。London Math。,11(1979)

[3]Y。Kitaoka, A remark on the transformation formula of theta functions associated with positive definite quadratic forms, J。of Number Th。,12(1980)

[4]M。Koike, On Mckay's conjecture, Nagoya J。 Math。, 95(1984)

[5]M。Koike, Mathieu group M_{24} and modular forms, Nagoya J。 Math。,99(1985)

[6]M。Koike, Moonshines of $PSL_2(F_q)$ and the automorphism group of Leech lattice, to appear in Japanese J。

[7]M。Koike, Modular forms and the automorphism group of Leech lattice

[8]T。Kondo, The automorphism group of Leech lattice and elliptic modular functions, J.Math.Soc.Japan, 37(1985)

[9]T.Kondo and T.Tasaka, The theta functions of sublattices of Leech lattice, Nagoya J。 Math., 101(1986)

[10]T。Kondo, a private communications dated at Nov。8, 1984。