数理解析研究所講究録
598巻 1986年 236-256

236

$SU(p,q)$ の指標等式について

福井大学教育学部　三上俊介（Shunsuke Mikami）

§1. 序

1. G を連結実半単純 Lie 群(中心有限)とし，$\mathfrak{g}$ をその Lie 環とする。Θ を G 上の tempered な不変固有超関数（以下 IED と記す）とし，λ をその infinitesimal character とする。すなわち $\mathfrak{z}$ を $\mathfrak{g}$ の複素化 $\mathfrak{g}_c$ の展開環の中心とすると，$\lambda \in Hom_{alg}(\mathfrak{z}, \mathbb{C})$ であって $Z\cdot\Theta = \lambda(Z)\Theta$ $\quad {}^{\forall}Z \in \mathfrak{z}$ が成りたつ。

IED に関する次の基本的な結果は Harish-Chandra により得られている。

<u>命題</u>　Θ は局所可積分関数であって，G' (= G の正則元全体) 上実解析関数になる。（この関数のことを Θ' と書くことにする。）

そこで $Car(G) = \{G$ の Cartan 部分群の共役類の全体$\}$ とし，$T_0, T_1, \cdots, T_l$ をその完全代表系とすると，

$$G' = \bigcup_{j=0}^{\ell} \bigcup_{g \in G} g T_j' g^{-1} \qquad (T_j' = T_j \cap G')$$

となるから、不変性により、Θ'は各T_j'の上での形が求まれば完全に定まる。

本稿においては、$G=SU(p,q)$（または$U(p,q)$）の場合にΘ'のいくつかのCartan部分群T_j上への制限$\{\Theta'|_{T_j'}\}$の間の関係式（これを指標等式と本稿ではよぶ），それらとWeyl群の元の作用に関する条件やstable character χ_φの持ち上げとの関連について述べる。（$G=Sp(n,\mathbb{R})$の場合にも同様の考察がされている。cf [9]）

2. 本論に入る前に問題の由来について少し述べる。その為にLanglandsによる既約admissible表現の分類におけるtempered parameter φをもつL-packet Π_φについて説明する。(cf [6],[8])
$\underline{G}$として$\mathbb{R}$上定義された連結reductive線型代数群とし，$G=\underline{G}(\mathbb{R})$（$\mathbb{R}$-rational points全体）となる実Lie群Gを対象とする。TをGのCartan部分群（すなわち$T=\underline{T}(\mathbb{R})$，ここに$\underline{T}$は$\mathbb{R}$上定義された$\underline{G}$のmaximal torus），$\Lambda$を$T$上のunitary characterとする。$\underline{T}$のmaximal split $\mathbb{R}$-torusの$\underline{G}$におけるcentralizerを$\underline{M}$とし，$M=\underline{M}(\mathbb{R})$とおき，$M$をLevi部分群にもつ$G$の(cuspidal) parabolic部分群を$P=MN$とおく。このときTはMのfundamental Cartan部分群になる。そこでMのderived groupの単位元

を含む連結成分をM^+, Z_MをMの中心, $T^+=T\cap M^+$, $\hat{\lambda}=d(\Lambda_{|T^+})$ ($\Lambda_{|T^+}$の微分)とおく。M, TのLie環を各々$\mathfrak{m}, \mathfrak{t}$で表わし，$(\mathfrak{m}, \mathfrak{t})$のルート系 $\Delta(\mathfrak{m}, \mathfrak{t})$ に$\hat{\lambda}$がdominantになる様に順序を導入しておく。そして

$$\iota=\frac{1}{2}\sum_{\alpha>0}\alpha \qquad (\alpha \text{は} (\mathfrak{m}, \mathfrak{t}) \text{の ルート})$$

とし、$\hat{\lambda}+\iota$に対応するM^+の離散系列表現を$\pi(\hat{\lambda}, \iota)$と書き
$\pi(\Lambda, \iota)=Ind_{M^+Z_M}^{M}(\pi(\hat{\lambda}, \iota)\otimes\Lambda_{|Z_M})$ とおく。さらに

$$W(\underline{M}, \underline{T})=Norm_{\underline{M}}(\underline{T})/\underline{T} \qquad (\cong W(\mathfrak{m}_c, \mathfrak{t}_c) : \text{ルート系のWeyl群})$$

$$W(M, T)=Norm_M(T)/T$$

とおく。($Norm_{\underline{M}}(\underline{T})$は$\underline{M}$における$\underline{T}$のnormalizer，他も同じ.)
そして $\pi_\varphi^0=\bigoplus_{\omega}\pi(\omega\Lambda, \omega\iota)$ とする。但し，ωは
$W(M.T)\backslash W(\underline{M}.\underline{T})$ の完全代表系をわたる。

註. φは$\{T, \Lambda\}$の対のある同値類に付与されたラベルである。正確には $\varphi=\langle\Lambda\rangle=\{\Lambda\circ Adg^{-1}\ ;\ g\in A(T)\}$ (cf [6]，$A(T)$の定義は§5)

このφに対応するL-packet Π_φ とは

$$\Pi_\varphi=\{\,Ind_{MN}^{G}(\pi_\varphi^0\otimes 1_N) \text{ の既約成分}\}$$

として定められる。これは有限集合であり，特に$P=G$, Tがcompactのとき，Π_φは同じinfinitesimal characterをもつGの離散系列表現の全体になる。表現$\pi_i\in\Pi_\varphi$の指標をΘ_{π_i}と書くことにする。

D. Shelstad は "stable tempered IED の持ち上げ" という手法により一連の指標等式を得た。([18], 本§5にに持ち上げの概略を説明してある。) それは、適当に $\varepsilon_i = \pm 1$ をとって $\sum_{\pi_i \in \Pi_\varphi} \varepsilon_i \Theta_{\pi_i}$ というG上の tempered IED を考える。このとき、quasi-split reductive群 H と $\chi_{\varphi'} = \sum_{\pi_i' \in \Pi_{\varphi'}} \Theta_{\pi_i'}$ というH上の tempered IED が存在して、

$Car(G) = Car_H^1(G) \cup Car_H^2(G)$ (但し、$Car_H^1(G)$ は Hのある Cartan 部分群と同型対応がつくGの Cartan 部分群Tの共役類 [T] の全体とし、$Car_H^2(G) = Car(G) \setminus Car_H^1(G)$) とおくと、

i) $[T] \in Car_H^1(G) \Rightarrow \sum \varepsilon_i \Theta'_{\pi_i \mid T'}$ は $\chi_{\varphi'}$ を用いて表わすことができる。

ii) $[T] \in Car_H^2(G) \Rightarrow \sum \varepsilon_i \Theta'_{\pi_i \mid T'} \equiv 0$

i)に関しては反転公式なども詳しく調べられている([18])。そこで ii)の型の指標等式がどのくらいあるか、また Weyl群による特徴付け等について調べてみよう、というのが我々の問題の出発点である。

註 φ' は φ から定まるHの tempered parameter で $\Pi_{\varphi'}$ はHでの L-packet を意味する。またこの $\sum \varepsilon_i \Theta_{\pi_i}$ が $\chi_{\varphi'}$ のGへ

の持ち上げ（Lift $\chi_{\varphi'}$ と書く）になっている。（[8], 本§5）.

§2. 準備と記号

以下の議論に必要ないくつかの記号他を導入する。

1. $\mathfrak{t}$: $\mathfrak{g}$ の Cartan subalgebra

$S(\mathfrak{t}_c)$: $\mathfrak{t}_c$ の symmetric algebra

$I(\mathfrak{t}_c) = S(\mathfrak{t}_c)^W = \{ S(\mathfrak{t}_c)$ の元で Weyl 群 $W = W(\mathfrak{g}_c, \mathfrak{t}_c)$ 不変なもの全体 $\}$

とおく。このとき Harish-Chandra isomorphism $\gamma^{\mathfrak{t}}: \mathfrak{z} \longrightarrow I(\mathfrak{t}_c)$ が存在する。そこで $\lambda \in \mathrm{Hom}_{alg}(\mathfrak{z}, \mathbb{C})$ に対して $\lambda \circ (\gamma^{\mathfrak{t}})^{-1} = \lambda_{\mathfrak{t}}$ と書く。（$\mathfrak{t} = \mathfrak{t}_j$ のときは $\lambda_{\mathfrak{t}} = \lambda_j$ とも書く。）$\lambda_{\mathfrak{t}} \in \mathrm{Hom}_{alg}(I(\mathfrak{t}_c), \mathbb{C})$ であるが，対応する $\mathfrak{t}_c^*$ の元が W に関し regular（resp. singular）のとき λ が regular（resp. singular）と呼ぶことにする。

2. $(\mathfrak{g}_c, \mathfrak{t}_c)$ の imaginary root に関する reflections で生成される $W(\mathfrak{g}_c, \mathfrak{t}_c)$ の部分群を $W_I(\mathfrak{g}, \mathfrak{t})$ と書き，imaginary Weyl 群とよぶ。

3. $\mathrm{Car}(G) = \{ [T_j] \ ; \ j = 0, \cdots, \ell \}$ とする。

λ が T_j に関し T-admissible

$\overset{\mathrm{def}}{\Longleftrightarrow}$

$$\mathcal{B}_T(T_j, \lambda_j) = \left\{ \begin{array}{ll} \zeta \in C^\infty(T_j) & \text{s.t} \\ \quad 1) \ \zeta \text{ は } \varepsilon\text{-symmetry をみたす} & \\ \quad 2) \ D\zeta = \lambda_j(D)\zeta & {}^\forall D \in I(\mathfrak{t}_{jc}) \\ \quad 3) \ \text{tempered} & \end{array} \right\}$$

$\neq \{0\}$ (cf [4])

註 $(\mathfrak{g}_c, \mathfrak{t}_{jc})$ のルート α に対して X_α をそのルートベクトルとする。このとき $Ad(t)X_\alpha = \xi_\alpha(t)X_\alpha$ によって定まる T_j 上の character を ξ_α，また G が admissible の仮定の下で $\rho = \frac{1}{2}\sum_{\alpha>0}\alpha$ とおき，その微分が ρ になる様な T_j 上 character を ξ_ρ と書く。そこで

$$\Delta(t) = \Delta^j(t) = \xi_\rho(t)\prod_{\alpha>0}(1-\xi_\alpha(t)^{-1})$$

$$\varepsilon_R(t) = \varepsilon_R^j(t) = \operatorname{sgn}\prod_{\alpha>0,\ \text{real}}(1-\xi_\alpha(t)^{-1})$$

$$(t \in T_j \cap G')$$

とおき，$W(G, T_j)$ に関し ζ が $\varepsilon_R^j\Delta^j$ と同じ symmetry をみたすとき，ζ は ε-symmetry をみたすという。

また 2) では $I(\mathfrak{t}_{jc})$ の元 D は自然に T_j 上の微分作用素とみなすことができ，ζ はそれらの同時固有関数になっていることを要請している。

§3. $SU(p, q)$ の指標等式

Θ を G 上の tempered IED，λ をその infinitesimal character

T^* を G の vector part 最大の Cartan 部分群，λ が T-admissible になる Cartan 部分群（の共役類の代表系）を $\{T_j \,;\, j \in J\}$ $J \subset \{0, 1, \cdots, \ell\}$ とおく。そして次の3つの条件を考える。

a) $\quad \Theta'|_{T^* \cap G'} \equiv 0$

b) $\quad \Theta'|_{T_j \cap G'}(t^{w_j}) = -\Theta'|_{T_j \cap G'}(t) \qquad {}^\forall t \in T_j \cap G',\ {}^\forall j \in J$

（w_j は $W_I(\mathfrak{g}, t_j)$ の最長元）

c) $[T^*] \in Car_H^2(G)$ となる様な有限個の H（(T, κ)-group とか endoscopic group とよばれる）上の stable character χ_H が存在し

$$\Theta = \sum_H c_H \, Lift\, \chi_H \qquad \text{となる。}$$

（c_H は定数で χ_H は §1.2 で $\chi_{\varphi'}$ と書かれていたもの。）

<u>定理</u> $\quad G = SU(p, p)$ （$U(p, p)$ でも全く同様）とする。

1) λ が regular のとき．　a), b), c) は同値である．

2) λ が singular のとき．　条件 (*)

(*) "Θ' が compact Cartan 部分群上 $\neq 0$"

をみたすならば　a), b), c) は同値である。

<u>系</u> $\quad G = SU(p, q) \quad (p < q)$ とする。

λ が regular，または integral かつ条件 (**)

(**) $\Delta_\lambda = \{\alpha \in \Delta(\mathfrak{g}, \mathfrak{t}_0) \ ; \ \langle \alpha, \lambda_0 \rangle = 0\}$ が

$A_1 \times \cdots \times A_1$ 型のルート系になる。（T_0 が G の compact Cartan 部分群であるとする）

をみたすならば

"$\Theta \neq 0 \implies \Theta'|_{T^* \cap G'} \neq 0$" が成りたつ。

註1. 定理において Θ に関する条件(*)は本質的ではないと思われるが、未だ(*)を外した形では証明できていない。定理において(*)を外すことができれば、系において条件(**)は不要になる。

註2. (c)と(a)が同値ということは、Shelstad の方法により T^* 上での(i)の型の指標等式はつくされていることを意味する。

註3 $G = Sp(n, \mathbb{R})$ の場合にも λ が regular, integral の場合には a)〜c) の同値性が（cf[9]），一部の singular な λ に対しては a) と b) の同値性が証明できる。

§4. 証明の方針

1. 後の議論の為にも $G = SU(1,1)$ ($\cong SL(2, \mathbb{R})$) の場合を

少しみてみよう。　G の Cartan 部分群（の代表系）として

$$T_0=\left\{ u_\varphi=\begin{pmatrix} e^{i\varphi} & 0 \\ 0 & e^{-i\varphi}\end{pmatrix},\ \varphi\in\mathbb{R} \right\}$$

$$T_1=\left\{ \varepsilon a_t=\begin{pmatrix} \varepsilon & 0 \\ 0 & \varepsilon\end{pmatrix}\begin{pmatrix} ch\,t & sh\,t \\ sh\,t & ch\,t\end{pmatrix},\ \varepsilon=\pm 1,\ t\in\mathbb{R} \right\}$$

がとれる。今の場合は G 上の tempered IED Θ は regular integral infinitesimal character をもつ場合だけを調べればよい。従って

$$\exists n\in\mathbb{Z},\ n>0,\quad \Theta'(u_\varphi)=\frac{Ae^{in\varphi}+Be^{-in\varphi}}{e^{i\varphi}-e^{-i\varphi}}\qquad となり$$

さらに　T_1 上では

$$\Theta'(\varepsilon a_t)=\frac{(B-A)(\varepsilon e^{-|t|})^n}{\varepsilon|e^t-e^{-t}|}$$

であることが離散系列の指標の形よりわかる。すると．

$$\text{a)}\quad \Theta'_{|T_1\cap G'}\equiv 0 \iff A=B$$

$$\iff \Theta'(u_{-\varphi})=-\Theta(u_\varphi)$$

$$\iff \text{b)}:\ \Theta'(u_\varphi^{w_0})=-\Theta'(u_\varphi)$$

（但し　$w_0=Ad\begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0\end{pmatrix}$ ）

$$\iff \Theta=A(\Theta^+_{n+1}-\Theta^-_{n+1})$$

（$\Theta^\pm_{n+1}$ は離散系列表現の指標）

故に　a) と b) の同値性がわかり，また $[T_1]\in Car^2_H(G)$ となる H は

$SO(2)$ 以外になく，更に $\mathrm{Lift}\,\chi_n = \Theta_{n+1}^{+} - \Theta_{n+1}^{-}$ となることから c) との同値性もわかる。

2. $SU(p,q)$ 上の任意の tempered IED は $U(p,q)$ 上の有限個の tempered IED の $SU(p,q)$ への制限の一次結合として表わされ，その差異は有限巡回群の表現により定まるため，$U(p,q)$ での結果がそのまま $SU(p,q)$ に移すことができること，及び記号の煩雑さを少しでも除く為に，以後 $G = U(p,q)$ $(p \leq q)$ の場合を調べる。（今までの定義等はそのまま用いることができる。）

$$G = U(p,q) = \{ g \in GL(p+q, \mathbb{C}) ;\ {}^t\bar{g} I_{p,q} g = I_{p,q} \}$$

$$I_{p,q} = \begin{pmatrix} \overbrace{1 \ \cdots \ 1}^{p} & \\ & \underbrace{-1 \ \cdots \ -1}_{q} \end{pmatrix}$$

$K \cong U(p) \times U(q)$ を G の maximal compact 群，K の Lie 環を $\mathfrak{k}$，K に対応する Cartan involution を θ とし，$\mathfrak{g} = \mathfrak{k} + \mathfrak{p}$ を $\mathfrak{g}$ の Cartan 分解とする。θ-stable な Cartan 部分群の代表系として，

$$T_0, T_1, \cdots, T_p \quad \text{s.t} \quad \dim \mathfrak{t}_j \cap \mathfrak{p} = j \quad (0 \leq j \leq p)$$

となる様に選べる。実際 $T_j = (T_j \cap K) \cdot (T_j \cap \exp \mathfrak{p})$，

$$T_j \cap K = \{ \mathrm{diag}(e^{i\varphi_1}, \cdots, e^{i\varphi_{p-j}}, e^{i\theta_j}, \cdots e^{i\theta_1}, e^{i\theta_1}, \cdots, e^{i\theta_j}, e^{i\psi_{q-j}}, \cdots, e^{i\psi_1}),\ \varphi_r, \theta_s, \psi_t \in \mathbb{R} \}$$

$$T_j \cap \exp \mathfrak{g} = \left\{ \begin{pmatrix} 1_{p-j} & & & & & \\ & \mathrm{ch}t_j & & & & \mathrm{sh}t_j & \\ & & \mathrm{ch}t_1 & \mathrm{sh}t_1 & & \\ & & \mathrm{sh}t_1 & \mathrm{ch}t_1 & & \\ & \mathrm{sh}t_j & & & \mathrm{ch}t_j & \\ & & & & & 1_{q-j} \end{pmatrix} \quad t_k \in \mathbb{R} \right\}$$

ととればよい。

また G 上の tempered IED Θ に対して

$$\varkappa(t) = \varkappa^j(t) = \varepsilon_R^j(t)\Delta^j(t)\Theta^j(t) \qquad t \in T_j \cap G' \quad \cdots ①$$

とおく。($U(p.q)$ の場合，通常の Δ^j の代りに多価性を除く為に便宜的に $\Delta^j \times (\det t)^{\frac{p+q-1}{2}}$ にとりかえておく。) 明らかに条件 b) は次の条件 b′) と同値になる。

$$b') \qquad (-1)^{p-j}\varkappa^j(t^{w_j}) = (-1)\varkappa^j(t) \qquad j \in J$$

3. 先ず Θ の infinitesimal character λ が regular かつ integral の場合を調べる。

<u>補題</u> $G = U(p.p)$，λ : regular かつ integral とする。

$(-1)^p\varkappa^0(t^{w_0}) = (-1)\varkappa^0(t) \qquad t \in T_0 \cap G'$ が成りたてば

各 Cartan 部分群 T_j $(0 \leq j \leq p)$ 上で

$$(-1)^{p-j}\varkappa^j(t^{w_j}) = (-1)\varkappa^j(t) \qquad t \in T_j \cap G'$$

が成りたつ。

この補題は $\{\varkappa^j\}$ の満たす semi-regular elements 上での境界条件，並びに $\varkappa^j$ の有界性より導かれる。

従って λ が T-admissible となる Cartan 部分群は T_0 だけで，

補題において $j=p$ のとき $w_p=1$ であることより b) ⇒ a) が示せる。

4. a) ⇒ b) を示すのは p に関する帰納法による。

$$T_j = \left\{ \begin{pmatrix} e^{i\varphi_1} & & & \\ & 1 & & \\ & & \ddots 1 & \\ & & & e^{i\psi_1} \end{pmatrix} \right\} \times T_j^{(p-1)} \qquad (j=0,\cdots,p-1)$$

とおくと、$T_j^{(p-1)}$ は $U(p-1,p-1)$ の vector part の次元が j である Cartan 部分群と同型になる。 $W=W(\mathfrak{g}_0,\mathfrak{t}_{0c})$, $W_k=W(G,T_0)$ とおき、$W_k\backslash W$ の完全代表系 $\{\omega_1,\cdots,\omega_N;\ \omega_i\in W\}$ を $\forall i$ $(1\leqq i\leqq N)$ に対し $w_0\omega_i\in\{\omega_1,\cdots,\omega_N\}$ をみたす様に選ぶ。

$$\pi^{o}_{\omega_i,\lambda} = \mathrm{sgn}(\omega_i)\sum_{w\in W_k}\mathrm{sgn}(w)\,\xi_{w\omega_i\lambda_0}$$

とおくと、

$$\pi^{o} = \sum_{i=1}^{N} m_{\omega_i}\pi^{o}_{\omega_i,\lambda}$$

と表わされる。そこで $\pi^{o}_{\omega_i,\lambda}(t^{w_0}) = \mathrm{sgn}(w_0)\pi^{o}_{w_0\omega_i,\lambda}(t)$ だから、示すべきことは $m_{w_0\omega_i} = -m_{\omega_i}$ $\forall i$ ……②

ということになる。

$\mathfrak{t}_0\ni X=\mathrm{diag}(i\varphi_1,\cdots,i\varphi_p,i\psi_p,\cdots i\psi_1)=\mathrm{diag}(x_1,\cdots,x_{2p})$ に対し $\lambda_0(X)=\sum_{i=1}^{2p}c_ix_i$ $\quad c_i\in\mathbb{Z}$, $\quad c_1>c_2>\cdots>c_{2p}$ とし、

$0\leqq j\leqq p-1$ に対し

$$T_j\ni t=t_1\cdot t_2\ ,\qquad t_1=\mathrm{diag}(e^{i\varphi_1},1,\cdots 1,e^{i\psi_1})$$
$$t_2\in T_j^{(p-1)}$$

と分解しておく。任意の s,t $(1\leqq s,t\leqq 2p,\ s\neq t)$ に対し

$\mathcal{X}^j$ における $e^{ic_s\varphi_1+ic_t\psi_1}$ の係数（t_2の関数）をとりだして考えると，それは $U(p-1,p-1)$ 上のある tempered IED $\Theta_{s.t}$ を用いて $\varepsilon_R\cdot\Delta\cdot\Theta'_{s.t}$ と表わされるものになる。全く同様に $e^{ic_t\varphi_1+ic_s\psi_1}$ の係数をとりだすと，$\Theta_{t.s}$ に対応している。条件 a) より $\mathcal{X}^p\equiv 0$ であるから，T_{p-1} と T_p の間の境界条件につき，$U(1.1)$ の結果を適用すると，$U(p-1,p-1)$ 上の tempered IED $\Theta_{s.t}-\Theta_{t.s}$ は $T_{p-1}^{(p-1)}$（$U(p-1,p-1)$ の vector part 最大の Cartan 部分群）上 $\equiv 0$ となる。そこで $\varepsilon_R^\circ\cdot\Delta^\circ\cdot(\Theta_{s.t}-\Theta_{t.s})^\circ$ を m_{ω_i} を用いて表わし，帰納法の仮定を適用すれば $\{m_{\omega_i}\}$ の4つの項の関係を与える連立方程式が求まり，それを整理することにより ② が示せる。

5. λ が regular（必ずしも integral とは限らない）の場合は，λ が T-admissible になる Cartan 部分群は唯1つで，それを T とする。T に対し §1.2 で構成した cuspidal parabolic 部分群を $P=MN$ とすると，P からの誘導指標の形 ([2] [3])，及び 4. で述べた結果を M_1（但し $M=M_1A$, $A=T\cap\exp\mathfrak{g}$, $M_1\cap A=\{1\}$）に適用したものを合わせればよい。

6. 次に singular な場合を考える。（但し $\Theta|T_0\cap G'\neq 0$）

$\lambda_0(X)=\sum c_ix_i$, $\quad c_1\geq\cdots>c_s>\cdots>c_t=c_{t+1}>\cdots\geq c_{2p}$ とする。regular の場合とは異なり，$\{\mathcal{X}^\circ_{\omega_i,\lambda}\ 1\leq i\leq N\}$ は一次独立ではなくなる。そこで

$$W_\lambda = \{ w \in W(\mathfrak{g}_c, \mathfrak{t}_{0c}) ; \quad w\lambda_0 = \lambda_0 \}$$ とおき，

$W_\lambda \backslash W$ の完全代表系の一部 $\{\omega_1, \cdots, \omega_r\}$ を

1) $\omega_i u \neq \omega_j$, $1 \neq {}^\forall u \in W_\lambda$, $1 \leq i, j \leq r$

2) 1)をみたす maximal なもの

3) $1 \leq {}^\forall i \leq r$ に対し $w_0 \omega_i w_\lambda^{-1} \in \{\omega_1, \cdots, \omega_r\}$

(w_λ は W_λ の最長元.)

を満たす様にえらぶ。 すると regular の場合と同様に

$$\varkappa^0 = \sum_{i=1}^{r} m_{\omega_i} \varkappa^0_{\omega_i \cdot \lambda}$$

と表わすことができる。故に条件 b) を $j=0$ の場合に示すには

$$m_{w_0 \omega_i w_\lambda^{-1}} = -\operatorname{sgn}(w_\lambda) m_{\omega_i} \quad 1 \leq {}^\forall i \leq r \quad \cdots ③$$

が成り立つことをいえばよい。 4. と同じ手法を用いる。

$\{\varkappa^j\}$ $(0 \leq j \leq p-1)$ の $e^{ic_s\varphi_1 + ic_t\psi_1}$ の係数に対応する $U(p-1, p-1)$ の tempered IED を $\Theta_{s.t}$, $e^{ic_t\varphi_1 + ic_s\psi_1}$ の係数に対応するそれを $\Theta_{t.s}$ とする。 $\varkappa^p \equiv 0$ だから, $U(1.1)$ の結果より $\Theta_{s.t} - \Theta_{t.s}$ に帰納法の仮定(または4.での結果)を適用して, 4の場合より簡単に b) を $j=0$ の場合に証明できる。 $j \geq 1$ に対しては step by step に証明を続ける。

$$\lambda_0' = \lambda_0 + \mu \quad (\text{但し } \mu : \text{dominant integral}, \ \lambda' : \text{regular})$$

とし, $\omega = \omega_j$ $(1 \leq j \leq N)$ に対して

$$\hat{m}_\omega = \begin{cases} \dfrac{1}{\# W_\lambda} m_{\omega_i} \operatorname{sgn}(u) & \text{if } \ \omega = \omega_i u \quad 1 \leq i \leq r, \ u \in W_\lambda \\ 0 & \text{それ以外} \end{cases}$$

$$\pi'^{i} = \sum_{j=1}^{N} \hat{m}_{w_i} \pi^{i}_{w_j,\lambda'}$$

とおくと. $\hat{m}_{w_0 w_j} = -\hat{m}_{w_j}$ だから. 4.での結果より $\pi'^{p} \equiv 0$ となる。従って補題より

$$(-1)^{p-j} \pi'^{j}(t^{w_j}) = (-1)\pi'^{j}(t) \qquad t \in T_j \cap G' \quad 0 \leq j \leq p \cdots ④$$

ここで $\mu \to 0$ とする極限操作を行う(+)ことにより得られる関数(resp. tempered IED)を $\hat{\pi}$ (resp. $\hat{\Theta}$ s.t. $\hat{\pi} = \varepsilon_R \cdot \Delta \cdot \hat{\Theta}'$) と書く

$$\hat{\pi}^{0} \equiv \pi^{0}, \quad かつ \quad (-1)^{p-j} \hat{\pi}^{j}(t^{w_j}) = (-1)\hat{\pi}^{j}(t)$$

$$(t \in T_j \cap G', \quad 0 \leq j \leq p).$$

すなわち $\hat{\Theta}$ は Θ と同じ infinitesimal character λ をもち, しかも $\pi^{0} - \hat{\pi}^{0} \equiv \Delta^{0} \cdot (\Theta - \hat{\Theta})'_{|T_0 \cap G'} \equiv 0$. 従って $\pi^{1} - \hat{\pi}^{1}$ は T_1 上実解析的になる。そこで

$$(\pi^{1} - \hat{\pi}^{1})(t) = \sum_{s:\lambda_s = \lambda_{s+1}} e^{2ic_s\theta_1} \pi_{1s}(t_{12})$$

$$T_1 \ni t = t_{11} \cdot t_{12} \qquad \begin{array}{l} t_{11} = \begin{pmatrix} \mathrm{ch}\,t_1 & \mathrm{sh}\,t_1 \\ \mathrm{sh}\,t_1 & \mathrm{ch}\,t_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{i\theta_1} & 0 \\ 0 & e^{i\theta_1} \end{pmatrix} \\ t_{12} = \mathrm{diag}(e^{i\varphi_1} \cdots e^{i\varphi_{p-1}}, e^{i\varphi_{p-1}} \cdots e^{i\varphi_1}) \end{array}$$

とおき, $T_1, \cdots, T_p$ 上で $e^{2ic_s\theta_1}$ の係数を集めて考えると, $U(p-1,p-1)$ の tempered IED に対応し, $\pi^{p} - \hat{\pi}^{p} \equiv 0$ だから, 帰納法の仮定がそれらに再び適用できて,

$$(-1)^{p-1} \pi_{1s}(t_{12}^{w_1}) = (-1)\pi_{1s}(t_{12})$$

$$\therefore \quad (-1)^{p-1} (\pi^{1} - \hat{\pi}^{1})(t^{w_1}) = (-1)(\pi^{1} - \hat{\pi}^{1})(t).$$

故に $\quad (-1)^{p-1} \pi'^{1}(t^{w_1}) = (-1)\pi'^{1}(t) \qquad t \in T_1 \cap G'$

すなわち b) が $j=1$ の場合にも成立することがわかる。この操作を繰り返す。

7. λ_0 が最も singular な場合 $(c_1=c_2>c_3=c_4>\cdots>c_{2p-1}=c_{2p})$ もほとんど同様にできる。また b) ⇒ a) についても step by step に $\tilde{\mu}$ で補正していくことにより証明できる。

Shelstad の結果より c) ⇒ a) が示されるので、b) ⇒ c) を見ればよい。λ が regular integral の場合には $Spin(\mathbb{R})$ の場合に用いたと全く同じ手法による。([9]) $\mathcal{B}_T=\mathcal{B}_T(T_0,\lambda_0)$ 上に $(S\zeta)(t)=(-1)^p\zeta(t^{w_0})$ により定義される作用素 S に関し、$\mathcal{B}_T=\mathcal{B}_T^+\oplus\mathcal{B}_T^-$ $(\mathcal{B}_T^\pm=\{\zeta\in\mathcal{B}_T\ ;\ S\zeta=\pm\zeta\})$ と固有空間分解する。次に $[T^p]\in Car_H^2(G)$ となる様な H の特徴付けを求め、それを用い (H 上の stable character $\chi_{\varphi'}$ の G への持ち上げ $Lift\,\chi_{\varphi'})\times\varepsilon_R\cdot\Delta$ が $\mathcal{B}_T^-$ の基底になっていることを示す。かくして b) より c) が導ける。

(+) $T_j'(R)=\{t\in T_j\ ;\ \xi_\alpha(t)\neq 1\quad\forall\alpha:\text{real ルート}\}$ の各連結成分 F 上

$$\varkappa'^j(a\cdot\exp X)=\sum_{w\in W}c_F(w;\lambda')\exp(w\lambda_j'(X)),\quad (a\exp X\in F)$$

と表わせる。([4]) さらに定数 $c_F(w;\lambda')$ は上の μ のとり方によらずに一定である。そこで $\mu\to 0$ とは係数部分は変えずに $\exp(w\lambda_j'(X))$ を $\exp(w\lambda_j(X))$ にとりかえることを意味する。

§5. stable tempered IED の持ち上げ

この§において、D. Shelstad による手法の概略について述べる。（正確な記述は [5][7][8] を参照して下さい。） §1.2 における と同様 $\underline{G}$ を $\mathbb{R}$ 上定義された連結 reductive 線型代数群, $G = \underline{G}(\mathbb{R})$, $T = \underline{T}(\mathbb{R})$, $\underline{T}$ は $\mathbb{R}$ 上定義された, $\underline{G}$ の maximal torus とする。 このとき

$$A(T) = \{ g \in \underline{G} ;\ g\underline{T}g^{-1} \text{が} \mathbb{R}\text{上定義され, かつ}$$
$$Ad g : \underline{T} \longrightarrow g\underline{T}g^{-1} \text{ が } \mathbb{R}\text{-同型になる} \}$$

と定義すると, 容易に $A(T) = \{ g \in \underline{G} ;\ \sigma(g^{-1})g \in \underline{T} \}$ であることがわかる。 ここに $\Gamma = Gal(\mathbb{C}/\mathbb{R}) = \{1, \sigma\}$ である。$A(T)$ の元 g に Γ から $\underline{T}$ への 1-cocycle $(1 \to 1,\ \sigma \to \sigma(g^{-1})g)$ が対応し, 従って $\mathcal{D}(T) = G\backslash A(T)/\underline{T} \hookrightarrow H^1(\Gamma, \underline{T})$ なる injection が存在する。そこで $\varkappa \in Hom(H^1(\Gamma, \underline{T}), \{\pm 1\})$ （今までの関数 $\varkappa$ とは関係ない） とし, この $(T, \varkappa)$ の pair に対し $\varkappa$-orbital integral $\Phi_f^{\varkappa}(t)$ を次の様に定義する。

$$\Phi_f^{\varkappa}(t) = \sum_{\omega \in \mathcal{D}(T)} \varkappa(\omega) \int_{G/T} f(g t^{\omega} g^{-1})\, d\bar{g} \qquad f \in \mathcal{C}(G),\ t \in T \cap G'$$

（但し, $\mathcal{C}(G)$ は G 上の急減少関数全体, $d\bar{g}$ は G/T 上の G-不変測度を表わす。） 特に $\varkappa \equiv 1$ のとき, stable orbital integral とよぶ。 また G 上の tempered IED Θ が stable であるとは, G の任意の Cartan 部分群 T と $^{\forall}g \in A(T)$ に対し,

$$\Theta'(gtg^{-1}) = \Theta'(t) \qquad (t \in T \cap G')$$

が成りたつことと定義する。§1.2 の $\chi_\varphi = \sum_{\pi_i \in \Pi_\varphi} \Theta_{\pi_i}$ は stable tempered IED になる。

さて $(T, \varkappa)$ に対し L-group を経由して，次の様な $\mathbb{R}$ 上定義された quasi-split な reductive 代数群 $\underline{H}$ が構成できる。($(T, \varkappa)$-group とよばれている。) $H = \underline{H}(\mathbb{R})$ とおくと，

1) $\operatorname{rank} H = \operatorname{rank} G \qquad \dim H \leqq \dim G$

2) $\underline{H}$ の $\mathbb{R}$ 上定義された maximal torus $\underline{T}^H$ で $\underline{T}$ と $\mathbb{R}$ 同型なものがある。(この $\mathbb{R}$ 同型を $i : \underline{T}^H \longrightarrow \underline{T}$ と書く)

3) $\mathcal{D}_H(T^H)$ (i により $\mathcal{D}(T)$ に移して考える) 上 $\varkappa \equiv 1$ となる。($\mathcal{D}_H$ は H に対して，先程の様に定めた $\mathcal{D}$ のことを表わす。)

以後，$(T, \varkappa, T^H)$ の代りに $(T_1, \varkappa_1, T_1^H)$ と書き，$\underline{G}$ と $\underline{H}$ の $\mathbb{R}$ 上定義された maximal tori で互いに $\mathbb{R}$ 同型なものをすべて集める。すなわち、

$\{ [T_m] \ ; \ m = 1, \cdots\cdots, n \}$ ([ ] は共役類を意味する。)

$\{ [T^H_{m'}] \ ; \ m' = 1, \cdots\cdots, n' \}$

$i_{m'} : \underline{T}^H_{m'} \longrightarrow \underline{T}_m$ ($\mathbb{R}$-同型)

$\mathcal{I} = \{ i_{m'} : m' = 1, \cdots, n' \}$ とおく (§4 での番号付けとは無関係) 丁度 §1 での記号に従えば，

$\operatorname{Car}'_H(G) = \{ [T_m] \ ; \ m = 1, \cdots n \}$ となる。

註　各 T_m $(m=1,\cdots,n)$ に対して $\varkappa_m \in \mathrm{Hom}(H^1(\Gamma, T_m), \{\pm 1\})$ が存在して，$(T_m, \varkappa_m)$ から同じ $\underline{H}$ が構成できる。特に区別しなくても混乱が起こらない場合，すべて $\varkappa$ と書く。

そこで　3) の性質を反映して，$\varkappa$-orbital integral $\Phi_f^{\varkappa}$ を H 上の stable orbital integral にうつすことができる。すなわち

<u>定理 (Shelstad [7] [8])</u>　$\underline{G}$ が単連結，半単純のとき，
$\bigcup_{m=1}^{n} T_m'$ 上の関数 Δ_H^G が存在して次の条件を満たす。

$^{\forall}f \in \mathcal{C}(G)$ に対し

$$t_H \longrightarrow \begin{cases} \Delta_H^G(t)\Phi_f^{\varkappa}(t) & \text{if } \ t_H \xrightarrow{g} t \in \bigcup_{m=1}^{n} T_m' \quad \cdots ⑤ \\ 0 & \text{if } \ t_H \in H' \cap \tilde{T},\ [\tilde{T}] \neq [T_{m'}'] \quad \cdots ⑥ \\ & \qquad\qquad\qquad\qquad (m'=1,\cdots n) \end{cases}$$

という対応は H 上の stable orbital integral で表わせる。

すなわち，

$$^{\exists}f_H \in \mathcal{C}(H) \quad \text{s.t} \quad \Phi'_{f_H}(t_H) = \begin{cases} \Delta_H^G(t)\Phi_f^{\varkappa} & \text{if } ⑤ \\ 0 & \text{if } ⑥ \end{cases}$$

この対応の dual として得られるのが stable tempered IED の持ち上げである。　いま Θ_H を H 上の stable tempered IED とし、その G への持ち上げ $\mathrm{Lift}\,\Theta_H$ を次の様に定義する。

<u>定義</u>　$(\mathrm{Lift}\,\Theta_H)(f) = \Theta_H(f_H) \qquad (f \in \mathcal{C}(G))$

Θ_H の stable であることより，右辺は f に対応する f_H のとり方に依らず，しかも $\mathrm{Lift}\,\Theta_H$ もやはり G 上の tempered IED にな

る。 Shelstad は $\Theta_H = \chi_{\varphi'}$ に対し Lift $\chi_{\varphi'}$ を G 上の L-packet Π_φ に属する表現の指標 Θ_{π_i} を用いて

$$\mathrm{Lift}\,\chi_{\varphi'} = \sum_{\pi_i \in \Pi_\varphi} \varepsilon_i \Theta_{\pi_i}$$

と表わされることを示した。（ε_i の値は $\varkappa$ などにより具体的に決定できる。）

文　献

[1] Harish-Chandra : Invariant eigendistributions on semisimple Lie groups. Trans.Amer.Math.Soc., 119(1965) 457-508.

[2] Hirai,T.: The characters of some induced representations of semisimple Lie groups. J.Math.Kyoto Univ., 8(1968) 313-363.

[3] Hirai,T.: Invariant eigendistributions of Laplace operators on real simple Lie groups I. Case of SU(p,q). Japan.J. Math., 39(1970) 1-68.

[4] Hirai,T.: Invariant eigendistributions of Laplace operators on real simple Lie groups III. Method of construction for semisimple Lie groups. Japan.J.Math., 2(1976) 269-341.

[5] Langlands,R.P.: Stable conjugacy; definitions and lemmas. Canad. J.Math., 31(1979) 700-725.

[6] Shelstad,D.: Characters and inner forms of a quasi-split group over $\mathbb{R}$. Composito Math., 39(1979) 11-45.

[7] Shelstad,D.: Orbital integral and a family of groups attached to a real reductive group. Ann.Sci.École Norm.Sup., 12(1979)

1-31.

[8] Shelstad,D.: L-indistinguishability for real groups. Math.Ann., 258(1982), 385-430.

[9] Mikami,S.: On character identities for Sp(n,R) and the lifting of stable tempered invariant eigendistributions. Japan.J.Math., 11(1985), 361-385.