

## Exponential group の orbit method について

九大・理 藤原英徳  
(Hidenori FUJIWARA)

Kinoshita の着想による "orbit method" はいわば Mackey 理論の適用による見事な formulations であり、後の可解り一群の表現論研究において統一的な手法を提供する事により、その有効性を証明し続けた。可解り一群の構造論的欠陥は "orbit method" の枠組においても数学的帰納法を標準的証明法として採用させ、詳細な解析をする為の道具不足、情報不足をもたしている事は否めない。にもかかわらず "orbit method" は各国の研究者達にさまざまな話題を提供し、今だにその活力を失ってはいない。ここでは可解り一群、exponential group に対し幾つかの話題を拾ってみよう。

### § 1. Dual 位相について

$G$  を可解り一群とする。exponential group, i.e. 連結、単連結な可解り一群  $G$  上の exponential map  $\exp: \mathfrak{g} \rightarrow G$  が単射なるものとする。この時 exponential map は  $\mathfrak{g}$  から  $G$  への diffeomorphism となり、 $\mathfrak{g}$  は可解りである。以下  $G = \exp \mathfrak{g}$  なる記法を用いる。

例の如く "orbit method" の setting から始めよう。  $\mathfrak{g}^*$  を  $\mathfrak{g}$  の

dual space とし、 $f \in \mathfrak{g}^*$  に対し  $B_f(x, Y) \equiv f([X, Y])$  の上  
 の歪対称双一次形式を導入し、その radical を  $\mathfrak{g}(f) \equiv \{x \in \mathfrak{g};$   
 $B_f(x, Y) = 0 \text{ for } Y \in \mathfrak{g}\}$  とおく。  $\mathfrak{g}(f)$  は  $G$  の coadjoint 表現に関  
 する  $f$  の stabilizer のリ-環に他ならない。  $S(f, \mathfrak{g}) \equiv \{\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g};$   
 部分リ-環;  $\mathfrak{h}$  は  $B_f$  に関し totally isotropic subspace},  $M(f, \mathfrak{g}) \equiv$   
 $\{\mathfrak{h} \in S(f, \mathfrak{g}); \mathfrak{h}$  は  $B_f$  に関し maximal totally isotropic subspace} =  
 $\{\mathfrak{h} \in S(f, \mathfrak{g}); 2 \dim \mathfrak{h} = \dim \mathfrak{g} + \dim \mathfrak{g}(f)\}$  とおき、  $M(f, \mathfrak{g})$  の要素を  
 $f$  における  $\mathfrak{g}$  の real polarization と呼ぶ。

さて  $\mathfrak{h} \in S(f, \mathfrak{g})$  に対し、対応する analytic subgroup  $H =$   
 $\exp \mathfrak{h}$  の unitary character  $\chi_{\mathfrak{h}}$ ,  $\chi_{\mathfrak{h}}(\exp X) = e^{i f(X)}$  ( $X \in \mathfrak{h}$ )、からの  
 誘導表現  $\tau(f, \mathfrak{h}) = \text{ind}_H^G \chi_{\mathfrak{h}}$  を構成しよう。このようにある閉  
 部分群の unitary character から誘導して得られる表現は単項表  
 現と呼ばれる。この時 Mackey 理論より  $G$  自身単項である、i.e.  
 任意の既約ユニタリ表現はある  $f \in \mathfrak{g}^*$ ,  $\mathfrak{h} \in S(f, \mathfrak{g})$  から得られ  
 る  $\tau(f, \mathfrak{h})$  に同値である (cf. [19]).

$\tau = \tau$   $f \in \mathfrak{g}^*$ ,  $\mathfrak{h} \in S(f, \mathfrak{g})$  とし  $\tau(f, \mathfrak{h})$  の形の表現がい  
 → 既約になるかを調べると、その判定条件としていわれる  
 Pukanszky condition が知られている:

$$\tau(f, \mathfrak{h}) : \text{既約} \iff \mathfrak{h} \in I(f, \mathfrak{g}) \equiv \{\mathfrak{h} \in M(f, \mathfrak{g}); H \cdot \mathfrak{h} = \mathfrak{h} + \mathfrak{h}^+\}$$

ここに  $\mathfrak{h}^+ = \{\mathfrak{l} \in \mathfrak{g}^*; \mathfrak{l}|_{\mathfrak{h}} = 0\}$ .

次に任意の  $f \in \mathfrak{g}^*$  において  $I(f, \mathfrak{g}) \neq \emptyset$ . 又  $\mathfrak{h}_1, \mathfrak{h}_2 \in I(f, \mathfrak{g})$

とすると  $\tau(f, \vartheta_1) \simeq \tau(f, \vartheta_2)$  が示され、 $\mathfrak{g}^* \ni f \mapsto \theta(f) = \tau(f, \vartheta) \in \hat{G}$  なる surjection が  $\vartheta \in I(f, \mathfrak{g})$  を媒介にして定義される。但し  $G$  の unitary dual を  $\hat{G}$  で表わし、その要素をしばしば代表元と同視する。

更に  $f_1, f_2 \in \mathfrak{g}^*$  とし  $\theta(f_1) = \theta(f_2) \Leftrightarrow G \cdot f_1 = G \cdot f_2$  より  $\theta$  は quotient に移り、 $\tau$  coadjoint 表現による orbit space  $\mathfrak{g}^*/G$  から  $\hat{G}$  への bijection  $\bar{\theta}$  を与える。

さてこの Kirillov-Bernat 対応  $\bar{\theta}$  は集合論的意味以上の情報を含んでいる。実際  $\hat{G}$  は自然な位相として Fell topology を備えている。即ち任意の部分集合  $S \subset \hat{G}$  に対し、その閉包を、

$\pi \in \bar{S} \Leftrightarrow \pi$  に associate した任意の positive definit function  $G \ni g \mapsto (\pi(g)\xi, \xi)$  ( $\xi \in \mathcal{H}_\pi$ :  $\pi$  の空間) が  $S$  の要素に associate した positive definit function で compact set 上一様に近似できる。

を与えるわけである。他方 orbit space  $\mathfrak{g}^*/G$  は自然な位相として  $\mathfrak{g}^*$  の商位相を備えている。この時  $\bar{\theta}: \mathfrak{g}^*/G \rightarrow \hat{G}$  は連続 [18] であり、 $\hat{G}$  は analytic Borel space 故 (cf. [2])、Borel isomorphism である。即ち orbit space  $\mathfrak{g}^*/G$  は Borel structure もこめて  $\hat{G}$  の実現を与える。

問 1.  $\bar{\theta}$  は homeomorphism か... 即ち orbit space  $\mathfrak{g}^*/G$  は topology もこめて  $\hat{G}$  の実現を与えているか?

この問題は Kirillov による "orbit method" 創始以来の open problem であつたといつてもよく Kirillov, Pukanszky 以後最初の結果は Brown [7] による。

定理 1.  $G$  が中零の時  $\bar{\theta}$  は homeomorphism.

Brown の証明は非常に tricky であり exponential への一般化は困難にある。そこで Joy [15] は Fell の結果を用いて定理 1 のより自然な別証明を与えたが、彼の証明も、任意の既約表現が正規部分群の表現から誘導されるという、中零群に特有の性質を本質的に用いている。

Exponential group  $G = \exp \mathfrak{g}$  に対しては、現在のところ次の結果が最良であろう： $f \in \mathfrak{g}^*$  に対し  $m(f) \equiv \mathfrak{g}(f) + [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$  の降中心列

$$m^0(f) = m(f), \quad m^1(f) = [m(f), m^0(f)], \quad \dots, \quad m^k(f) = [m(f), m^{k-1}(f)], \dots$$

を考える。

定理 2 (Boydol [5]). 任意の  $f \in \mathfrak{g}^*$  において  $f(\bigcap_{k=0}^{\infty} m^k(f)) = 0$  ならば  $\bar{\theta}$  は homeomorphism である。

Note 1. basis  $(T, X, Y, Z)$ ;  $[T, X] = X$ ,  $[T, Y] = -Y$ ,  $[X, Y] = Z$  で与えられる 4 次元の完全可解リ-環  $\mathfrak{g}$  を考えると、対応す

る連結、単連結な  $G = \exp \mathfrak{g}$  は定理 2 の仮定をみたさない最も簡単な例。この場合 infinitesimal character の Fell Topology に関する連続性を用いて  $\bar{\theta}$  がやはり homeomorphism なる事が Rosenberg により示され、同様の手法で Boidol は  $\dim G \leq 5$  なる exponential group  $G$  に対し  $\bar{\theta}$  は常に homeomorphism となる事を証明している。

ついでに筆者 [11] の部分的結果も挙げておこう。

定理 3.  $\bar{\theta}$  は  $\mathfrak{g}^*/G$  のある open dense subset  $O_1$  から  $\hat{G}$  の open dense subset  $O_2$  上への homeomorphism を与える。

Boidol、筆者双方に超え難く現われている困難さは結局 Joy の場合に用いられた正規部分群からの誘導という特徴をいかに克服するかにかつらなっているように思われる。又上記 Note 1 が示す如く universal enveloping algebra  $U(\mathfrak{g})$  の center  $Z(\mathfrak{g})$  の利用は群によつては有効であるが、例えば open coadjoint orbit を持つような  $G$  の場合、 $Z(\mathfrak{g})$  は trivial になるから少し拡張する必要がある。  $\bar{\theta}^{-1}$  を具体的に構成してその連続性を示そうとする Pedersen の最近の試みはこの線に沿ったものと思われる。更に群や dual の概念を拡張し、そこで対応する主張を確立した後再び制限して求める主張を示そうというのが Ludwig の variable

group の概念である。いずれにしても考えている位相は Hausdorff から何程遠く、そう簡単なものではない。例之は  $\bar{\theta}^{-1}$  は trivial 表現の所で連続であろうか？

次にもう少し弱い形の問題を考之よう。  $G$  のユニタリ表現  $\pi$  に対しその Hilbert space を  $\mathcal{H}_\pi$  (separable 仮定) とし、又  $L^1(G)$  は  $G$  の左 Haar 測度  $dg$  に関するものとする。任意の  $\psi \in L^1(G)$  に対し  $\pi(\psi) = \int_G \psi(g) \pi(g) dg$  が  $\mathcal{H}_\pi$  における compact operator なる時、 $\pi$  を CCR 表現と云い、任意の既約ユニタリ表現が CCR である時、群  $G$  は CCR であるといわれる。 Fell topology の言葉で CCR を特徴づけると、既約ユニタリ表現  $\pi$  が CCR  $\Leftrightarrow \{\pi\} \subset \hat{G}$  が閉集合。従って連結、単連結可零リ-群  $G$  が CCR であるという事実は、定理 1 により、  $G$  の任意の coadjoint orbit が閉集合であるという事実と対応している。

一般に exponential group  $G = \exp \mathfrak{g}$  は CCR とは限らず、又その coadjoint 表現の orbit は局所閉集合ではあるが閉集合とは限らない。 Kirillov-Bernat map  $\bar{\theta}: \mathfrak{g}^*/G \rightarrow \hat{G}$  の連続性はわかつているので、  $\pi \in \hat{G}$  が CCR なる対応する orbit  $\bar{\theta}^{-1}(\pi)$  は closed orbit であるか、

問 2 (Moore's conjecture). closed orbit  $\Omega \in \mathfrak{g}^*/G$  に対し  $\bar{\theta}(\Omega) \in \hat{G}$  は CCR か？

Note 2.  $\mathfrak{g}$ : algebraic の時 Pukanszky により確立されて以来長い間 open problem であつたこの問題も最近 Charbonnel により肯定的に解かれたとも聞く... 彼が証明したのは closed orbit と tempered orbit (i.e. その上の canonical measure が tempered measure を与えるもの) の一致か?

より一般に連結、単連結 I 型可解リ一群に対する Auslander-Kostant の unitary dual の構成 [1] は dual topology に関し、いかなる情報を与えてゐるであろうか?

## § 2. 単項表現の分解

リ一群  $G$  ( $\sigma$ -compact 仮定) のユニタリ表現  $\pi$  の空間  $\mathcal{H}_\pi$  において  $C^\infty$ -vectors のなす dense subspace  $\mathcal{H}_\pi^\infty$  に通常の位相を与えた Fréchet space を考える.  $\mathcal{H}_\pi^\infty$  の anti-dual を  $\mathcal{H}_\pi^{-\infty}$  で表し (その要素を  $\pi$  の generalized vector と呼ぼう.  $\mathcal{H}_\pi^\infty$  は  $\mathcal{H}_\pi^{-\infty}$  の anti-dual と同一視され、 $\langle a, b \rangle$  ( $a \in \mathcal{H}_\pi^{\pm\infty}$ ,  $b \in \mathcal{H}_\pi^{\mp\infty}$ ) で  $a$  の  $b$  にかける値を表す. この時任意の  $\psi \in C_c^\infty(G)$  に対し  $\pi(\psi)\mathcal{H}_\pi^{-\infty} \subset \mathcal{H}_\pi^\infty$  が成り立つ事を注意しておこう.  $G$  の開部分群  $K$  とその character  $\chi: K \rightarrow \mathbb{C}^*$  に対し

$$(\mathcal{H}_\pi^{-\infty})^{K, \chi} = \{ a \in \mathcal{H}_\pi^{-\infty}; \pi(k)a = \chi(k)a \text{ for } \forall k \in K \}$$

とおき、 $\chi \equiv 1$  の時  $(\mathcal{H}_\pi^{-\infty})^{K, \chi}$  の代わりに  $(\mathcal{H}_\pi^{-\infty})^H$  と書く (cf. [3]).

$G = \exp \mathfrak{g}$  を連結、単連結な中零リ一群とし、 $f \in \mathfrak{g}^*$ ,  $g \in M(\mathfrak{g})$

$f, \vartheta$  から出発して  $\pi = \tau(f, \vartheta) \in \hat{G}$  を構成しよう.  $\pi$  の既約性は中零の特殊性  $I(f, \vartheta) = 1(f, \vartheta)$  よりいえる.  $\vartheta$  について部分リ-環  $\mathfrak{g}$  に supplementary な基底  $\{X_1, \dots, X_m\}$  を考える:  $\mathfrak{g} = \sum_{j=1}^m \mathbb{R}X_j \oplus \mathfrak{g}$ . 各  $\mathfrak{g}_k = \sum_{j=k}^m \mathbb{R}X_j \oplus \mathfrak{g}$  が  $\mathfrak{g}$  の部分リ-環なる時  $\{X_1, \dots, X_m\}$  は adapted supplementary basis と呼ばれる. このような basis を用いて  $\pi$  を空間  $L^2(\mathbb{R}^m)$  に実現する時中零リ-群の "orbit method" において非常に有用な次の定理が得られる.

定理 4 (Kirillov [14], Corwin-Greenleaf-Penney [8]). 位相をこめて  $\mathcal{M}_\pi^\infty$  は急減少函数のなす Schwartz space  $\mathcal{S}(\mathbb{R}^m)$  に一致する.

従ってこの定理における状況では  $\mathcal{M}_\pi^{-\infty}$  は tempered distribution の空間  $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^m)$  に conjugate である.

さて  $f \in \mathfrak{g}^*$ ,  $\vartheta \in S(f, \mathfrak{g})$  から構成された単項表現  $\tau(f, \vartheta)$  の既約分解はどうなるであろうか. 即ち

$$\tau(f, \vartheta) = \int_{\hat{G}}^{\oplus} m(\pi) \pi \, d\nu(\pi)$$

を  $\tau(f, \vartheta)$  の canonical central decomposition とする時, 測度  $\nu$  の class 及び multiplicity  $m(\pi)$  を求めたい.  $G$  が中零の時この問題は完全に解決されており,

定理 5 (Corwin-Greenleaf-Ginzeland [9]). 測度  $\nu$  の class は  $f + \mathfrak{g}^\perp$



上の Lebesgue measure class の Kirillov map  $\theta$  による image であり、他方 multiplicity  $m(\pi)$  は  $(f + \mathfrak{g}^+) \cap \theta^{-1}(\pi)$  に含まれる  $H$ -orbit の数である。但し以前同様  $H = \exp \mathfrak{h}$ 。

exponential case では部分的な結果しか知られていないが、Pukanzhky condition が示唆するように、やはり  $\bar{\theta}^{-1}(\pi) \cap (f + \mathfrak{g}^+) \neq \emptyset$  なる  $\pi \in \hat{G}$  のみがこの分解に関与して行く事がわかって来る。

問 3. 定理 5 は exponential case でも成立するであろうか？

$\mathfrak{g} \in \mathcal{S}(f, \mathfrak{g})$  が ideal の場合には問 3 の答は肯定的であり、しかもこの場合 multiplicity  $m(\pi)$  は一様に 1 または  $+\infty$  である。これらの研究における multiplicity 決定の出発点になり、たのは real polarization に対する次の結果であろうと思われる。  $G = \exp \mathfrak{g}$  : exponential group,  $f \in \mathfrak{g}^*$ ,  $\mathfrak{g} \in \mathcal{H}(f, \mathfrak{g})$ ,  $H = \exp \mathfrak{h}$  とする。  $f + \mathfrak{g}^+$  と  $\Gamma$  の開集合で交わる coadjoint orbit の集合を  $U(f, \mathfrak{g})$  と表わし、  $\Omega \in U(f, \mathfrak{g})$  に対し  $(f + \mathfrak{g}^+) \cap \Omega$  に含まれる  $H$ -orbit の数を  $m(f, \mathfrak{g}, \Omega)$  とおく。

定理 6 (Vergne cf. [4]). 任意の  $\Omega \in U(f, \mathfrak{g})$  に対し、  $m(f, \mathfrak{g}, \Omega)$  は有限で

$$r(f, \mathfrak{g}) \approx \sum_{\Omega \in U(f, \mathfrak{g})} m(f, \mathfrak{g}, \Omega) \bar{\theta}(\Omega).$$

multiplicity のわかっている分之一的な場合は symmetric space に

付随した場合である。  $\sigma \in \text{Aut}(G)$  を  $G$  の involution、  $\sigma$  (resp.  $d\sigma$ ) の fixed points set を  $H$  (resp.  $\mathfrak{h}$ ) とし、  $H = \exp \mathfrak{h}$  の trivial 表現から誘導された単項表現  $\tau(0, \mathfrak{h}) = \text{ind}_H^G \mathbb{1}$  を考えよう。

定理 7 (Benoist [3]). 任意の  $\Omega \in \mathfrak{g}^*/G$  に対して  $\mathfrak{h}^\perp \cap \Omega$  は空集合もしくは唯一つの  $H$ -orbit であり、 それに応じて quasi regular な表現  $\tau(0, \mathfrak{h})$  は multiplicity free である。

ここで multiplicity と関連して一種の reciprocity を考えてみよう。以下しばらく  $G = \exp \mathfrak{g}$  は連結、単連結中零リ-群とし、  $\pi$  を  $\tau$  の既約  $\pm 1$ -値表現とする。

定理 8 (Howe [13]).  $f \in \mathfrak{g}^*$ ,  $\mathfrak{g} \in I(f, \mathfrak{g}) = M(f, \mathfrak{g})$  とする。この時

$$\dim (\mathcal{A}_\pi^{-\infty})_{H, \chi_f} = \begin{cases} 0 & \text{if } \pi \neq \tau(f, \mathfrak{h}), \\ 1 & \text{if } \pi \simeq \tau(f, \mathfrak{h}). \end{cases}$$

但し以前同様  $H = \exp \mathfrak{h}$ ,  $\chi_f(\exp X) = e^{\int_{\mathfrak{h}} f(X)}$  ( $X \in \mathfrak{h}$ )。

又定理 7 の situation を中零リ-群で考える時、やはりこの type の reciprocity の成立を見る。そこにおける記号を用いる事にして、

定理 9 (Bernstein [3]).

$$\dim (\mathcal{H}_\pi^{-\infty})^H = \begin{cases} 0 & \text{if } \theta^{-1}(\pi) \cap \mathfrak{g}^\perp = \emptyset. \\ 1 & \text{if } \theta^{-1}(\pi) \cap \mathfrak{g}^\perp \neq \emptyset. \end{cases}$$

問 4. 定理 5 の状況においてこの reciprocity は成り立つであろうが ... つまり  $\tau(f, \mathfrak{g})$  の分解における  $\pi$  の multiplicity  $m(\pi)$  は  $\dim (\mathcal{H}_\pi^{-\infty})^{H, \chi_f}$  にとれるであろうか?

$\mathfrak{g} \in S(f, \mathfrak{g})$  が ideal である場合問 4 は容易にたしかめられるが今の所一般には  $\dim (\mathcal{H}_\pi^{-\infty})^{H, \chi_f} \geq m(\pi)$  しかわからない.

### § 3. Plancherel formula

$\Gamma$ -群  $G$  及び  $\Gamma$  の閉部分群  $H$  の module をそれぞれ  $\Delta_G, \Delta_H$  で表わし、 $H$  上  $\Delta_{G/H} = \Delta_H / \Delta_G$  とおく。今  $H$  の unitary character  $\chi$  から誘導された単項表現  $\tau = \text{ind}_H^G \chi$  に関し特別な anti-linear form

$$a_\tau: \mathcal{H}_\tau^\infty \ni \psi \mapsto \overline{\psi(e)} \in \mathbb{C} \quad (e: G \text{ の単位元})$$

を考へると、 $\mathcal{H}_\tau^\infty \subset C^\infty(G)$  より  $a_\tau$  は意味を持ち、 $a_\tau \in (\mathcal{H}_\tau^{-\infty})^{H, \Delta_{G/H} \chi}$ 。 $G$  を I 型とする。この canonical central decomposition に応じて  $a_\tau$  は generalized vector と分解される [17].

以下  $G = \exp \mathfrak{g}$  を連結、単連結中零リ一群、 $f \in \mathfrak{g}^*$ 、 $\mathfrak{g} \in S(f, \mathfrak{g})$  とし、以前同様単項表現  $\tau(f, \mathfrak{g}) = \text{ind}_H^G \chi_f$  と  $\Gamma$  の canonical central

decomposition  $\tau(f, g) = \int_{\hat{G}}^{\oplus} m(\pi) \pi d\nu(\pi)$

を考へ、 $\tau = \tau(f, g)$  は finite multiplicity、 $m(\pi) < +\infty$  for  $\forall \pi \in \hat{G}$ 、

を持つと仮定しよう。さてこの分解に応じて generalized vector

$a_\tau \in (\mathcal{H}_\tau^{-\infty})^{H, X_f}$  が分解される (cf. also [6]):  $a_\pi^k \in (\mathcal{H}_\pi^{-\infty})^{H, X_f}$  ( $1 \leq$

$k \leq m(\pi)$ ) が存在して

$$a_\tau = \int_{\hat{G}}^{\oplus} \sum_{k=1}^{m(\pi)} a_\pi^k d\nu(\pi).$$

従つて任意の  $\Phi \in C_c^\infty(G)$  に対し、

$$\langle \tau(\Phi) a_\tau, a_\tau \rangle = \int_{\hat{G}} \sum_{k=1}^{m(\pi)} \langle \pi(\Phi) a_\pi^k, a_\pi^k \rangle d\nu(\pi)$$

即ち 
$$\tilde{\Phi}(e) = \int_{\hat{G}} \sum_{k=1}^{m(\pi)} \langle \pi(\Phi) a_\pi^k, a_\pi^k \rangle d\nu(\pi), \quad (*)$$

ここで  $\tilde{\Phi}$  は  $H$  上適当に normalize された ( $\Phi$  に依らずい) Haar 測度  $dh$

を用いて 
$$\tilde{\Phi}(g) = \int_H \Phi(gh) \chi_f(h) dh \quad (g \in G)$$

で与えられる  $\mathcal{H}_\tau^{-\infty}$  の元である。

公式 (\*) をみたす generalized vector  $a_\pi^k \in (\mathcal{H}_\pi^{-\infty})^{H, X_f}$  を具体的に求めよう。任意の  $\pi \in \hat{G}$  を  $\lambda \in \theta^{-1}(\pi)$  における real polarization

$\mathfrak{b} \in \mathfrak{I}(\mathfrak{g}, \theta)$  を用いたの単項表現として実現しよう:  $B = \exp \mathfrak{b}$ 、

$\chi_\lambda(\exp X) = e^{\sqrt{-1}\lambda(X)}$  ( $X \in \mathfrak{b}$ )、 $\pi = \text{incl}_B^G \chi_\lambda$ 。定理 5 より  $(\mathfrak{f} + \mathfrak{b}^\perp) \cap \theta^{-1}(\pi)$

に含まれる  $H$ -orbits を  $C_1, \dots, C_{m(\pi)}$  とし、 $g_k \cdot \lambda \in C_k$  なる  $g_k$  ( $1 \leq k \leq m(\pi)$ ) なる  $g_k \in G$  をとる。

定理 10 ([12])。等質空間  $H/H \cap g_k B g_k^{-1}$  ( $1 \leq k \leq m(\pi)$ ) 上の不変測度  $d_R \dot{g}$  を用い

$$a_r^k : \mathcal{H}_\pi^\infty \ni \Phi \mapsto \int_{H/H \cap g_k B g_k^{-1}} \overline{\Phi(hg_k)} \chi_r(h) d_R h \quad (1 \leq k \leq m(\pi))$$

とおく。これから  $a_r^k$ ,  $1 \leq k \leq m(\pi)$ , は  $(\mathcal{H}_\pi^{-\infty})^{H, \chi_r}$  に属する一次独立の generalized vectors 7. 種々の測度を適当に normalize する時、公式 (\*) をみたす。

### References

- [1] L. Auslander and B. Kostant, Polarization and unitary representations of solvable Lie groups, Invent. math. 14 (1971), 255-354.
- [2] L. Auslander and C.C. Moore, Unitary representations of solvable Lie groups, Mem. A.M.S. No 62, 1966.
- [3] Y. Benoist, Espaces symétriques exponentiels, Thèse 3<sup>e</sup> cycle, Univ. Paris VII, 1983.
- [4] P. Bérnati et al., Représentations des groupes de Lie résolubles, Dunod, Paris 1972.
- [5] J. Boidol, \*-regularity of exponential Lie groups, Invent. math. 56 (1980), 231-238.
- [6] P. Bonnet, Transformation de Fourier des distributions de type positif sur un groupe de Lie unimodulaire, J. Func. Anal. 55 (1984), 220-246.
- [7] I. Brown, Dual topology of a nilpotent Lie group, Ann. Sci. Éc. Norm. Sup. 6 (1973), 407-411.

- [8] L. Corwin, F. P. Greenleaf and R. Penney, A general character formula for irreducible projections on  $L^2$  of a nilmanifold, *Math. Ann.* 225 (1977), 21-32.
- [9] L. Corwin, F. P. Greenleaf and G. Grélaud, Direct integral decompositions and multiplicities for induced representations of nilpotent Lie groups, to appear.
- [10] J. M. G. Fell, The dual space of  $C^*$ -algebras, *Trans. Amer. Math. Soc.* 44 (1960), 365-403.
- [11] H. Fujiwara, Sur le dual d'un groupe de Lie résoluble exponentiel, *J. Math. Soc. Japan* 36 (1984), 629-636.
- [12] H. Fujiwara, Représentations monomiales des groupes de Lie nilpotents, to appear.
- [13] R. Howe, On a connection between nilpotent groups and oscillatory integrals associated to singularities, *Pacific J. Math.* 73 (1977), 329-364.
- [14] A. A. Kirillov, Unitary representations of nilpotent Lie groups, *Usp. Mat. Nauk* 17 (1962), 57-110.
- [15] K. Joy, A description of the topology on the dual space of a nilpotent Lie group, *Pacific J. Math.* 112 (1984), 135-139.
- [16] C. C. Moore, Representations of solvable and nilpotent groups and harmonic analysis on nil and solvmanifolds, *Proc. Symp. Pure*

Math. 26 (1973), 3-44.

- [17] R. Penney, Abstract Plancherel theorems and a Frobenius reciprocity theorem, J. Func. Anal. 18 (1975), 177-190.
- [18] L. Pukanszky, On the unitary representations of exponential groups, J. Func. Anal. 2 (1968), 73-113.
- [19] O. Takenouchi, Sur la facteur-représentation des groupes de Lie de type (E), Math. J. Okayama Univ., 7 (1957), 151-161.