数理解析研究所講究録
598 巻 1986 年 117-180

Distributions sphériques invariantes sur l'espace semi-simple $G_c/G_{\mathbb{R}}$

Shigeru SANO (Institute of Vocational Training)*
Nicole BOPP (Université Louis-Pasteur, Strasbourg)

Introduction.

Soit G un groupe de Lie semi-simple connexe et soit H le sous groupe des points fixes d'un automorphisme involutif de G. On définit une application φ de G dans G par $\varphi(g) = g\sigma(g)^{-1}$ $(g \in G)$, et on appelle $\mathcal{X}$ son image. Alors G/H et $\mathcal{X}$ sont isomorphes comme G-espaces symétriques. On démontre la formule d'integration de Weyl pour la décomposition orbitale de $\mathcal{X}$ sous l'action de H. Les mesures sur G/H, H et $\mathcal{X}$ sont normalisées à l'aide de l'application linéaire bijective γ définie dans [31].

Soit $D_\ell(x)$ le coefficient du polynome caractéristique sur $\mathcal{X}$ qui détermine les éléments $\mathfrak{q}$-réguliers. Dans la formule d'intégration de Weyl, le Jacobien est donné par $|D_\ell(x)|^{1/2}$. Supposons que G soit contenu dans un groupe complexe G_c d'algèbre de Lie $\mathfrak{g}_c$ et qu'il existe un sous-groupe de Borel B de G tel que l'espace symétrique $\mathcal{X}$ se décompose en H-orbites de $\mathcal{X} \cap B$. On en déduit que dans le groupe G semi-simple lui-même et dans l'espace symétrique G_c/G, la fonction $\frac{1}{|D_\ell(x)|^{1/4}}$ est localement intégrable. Le groupe G et l'espace symétrique G_c/G sont c-duaux. Nous étudions les distributions sphériques invariantes sur $\mathcal{X} \simeq G\times G/G$ qui désigne un espace symétrique soit du type G, soit de type G_c/G. Pour un opérateur différentiel invariant D sur $\mathcal{X}$, on détermine la partie radiale de D. On démontre qu'il n'existe pas de distribution sphérique invariante à support singulier. D'après les résultats ci-dessus les distributions sphériques invariantes sont des fonctions localement intégrables. Soit $\mathcal{X}'$ l'ensemble des éléments réguliers de $\mathcal{X}$.

* 佐野茂 (職業訓練大)

La restriction d'une distribution sphérique invariante à $\mathcal{X}'$ est une fonction analytique invariante. Réciproquement, étant donnée une fonction analytique invariante Φ sur $\mathcal{X}'$, on donne une condition nécessaire et suffisante pour que Φ définisse une distribution sphérique invariante sur $\mathcal{X}$.

contenu

§1. Décomposition de Harish-Chandra.

Soit G un groupe de Lie semi-simple connexe et σ un automorphisme involutif de G. Soit G_σ l'ensemble des éléments de G qui sont fixés par σ. Si H est un sous-groupe de G tel que $(G_\sigma)_0 \subset H \subset G_\sigma$, il existe un groupe de Lie $\tilde{G}$ qui est un revêtement l'ordre fini de G tel que $\tilde{G}/\tilde{G}_\sigma \simeq G/H$ d'après [29]. On suppose que $G_\sigma = H$. Définissons une application φ de G dans G par

$$\varphi(g) = g\sigma(g)^{-1} \quad (g \in G),$$

et posons

$$X = \varphi(G)$$

Pour chaque élément $a \in G$, définissons l'application différentiable l_a de G dans G par $l_a(b) = ab$ ($b \in G$) et l'application différentiable A_a de X dans X par $A_a(x) = ax\sigma(a)^{-1}$. On a $\varphi(l_a(b)) = A_a(\varphi(b))$. Ainsi G/G_σ et X sont isomorphes comme G-espaces symétriques.

Dans ce paragraphe nous rappelons certains résultats de [29]. Soit $\mathfrak{a}$ un sous-espace de Cartan de ($\mathfrak{g}$, $\mathfrak{h}$)

Définition 1.1. On dit que le centralisateur dans X de $\mathfrak{a}$, noté $A = Z_X(\mathfrak{a})$, est le sous-espace de Cartan de X associé à $\mathfrak{a}$.

Lemme 1.1.

1) Si G est contenu dans un groupe complexe G_c d'algèbre de Lie $\mathfrak{g}_c$ et muni d'une involutin prolongeant σ alors :

$$A = \exp \mathfrak{a}_c \cap X$$

2) A admet un nombre fini de composantes connexes, chacune d'elle étant de la forme $k_j \exp \mathfrak{a}$ où $k_j \in \varphi(K) \cap A$ (K est le sous-groupe des points fixes d'une involution de Cartan θ de G commutant à σ. On suppose que G est à centre fini). De plus $Ad(k_j)^2 = Id$ où Id est l'identité de $\mathfrak{g}$.

3) A centralise aussi le centralisateur $\mathfrak{m}$ de $\mathfrak{a}$ dans $\mathfrak{h}$.

Démonstration. La structure des composantes connexes est donnée dans [29] après l'étude du cas complexe. Comme $Ad(G)$ est contenu dans le groupe complexe $Int(\mathfrak{g}_c)$, on a pour $a \in A$, $Ad(a) = e^{ad(H_0)}$ avec $H_0 \in \mathfrak{a}_c$. On en déduit 3). D'autre part on peut choisir k_j de sorte que $Ad(k_j)$ appartienne à $\exp(i\, ad \mathfrak{a})$. Comme $Ad(k_j) = e^{i\, ad H_0} (H_0 \in \mathfrak{a})$ stabilise $\mathfrak{g}$, on a $e^{2i\, ad H_0} = Id$ et donc $Ad(k_j)^2 = Id$ Q.E.D.

Considérons pour $x \in X$ le polynôme

$$\det\left((1+t)\, Id - Ad(x)\right) = \sum_{j=0}^{\dim \mathfrak{g}} t^j \, D_j(x)$$

Si ℓ est la dimension du centralisateur dans $\mathfrak{g}$ d'un sous-espace de Cartan de $(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$ alors : pour $j = 0, 1, \cdots, \ell-1$, D_j est identiquement nul et D_ℓ n'est pas identiquement nul sur X.

Définition 1.2. On dit qu'un élément x de X est régulier (on écrit $x \in X'$)(resp. singulier) si $D_\ell(x) \neq 0$ (resp. $D_\ell(x) = 0$).

Soit A un sous-espace de Cartan de X associé au sous-espace de Cartan $\mathfrak{a}$ de $(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$. Comme $Ad(A)$ est contenu dans $e^{ad \mathfrak{a}_c}$, l'opérateur $Ad(a)$ ($a \in A$) est scalaire sur tout espace radiciel $\mathfrak{g}_c(\mathfrak{a}, \alpha)$ où α est une racine de la paire $(\mathfrak{g}_c, \mathfrak{a}_c)$.

<u>Définition 1.3.</u> On appelle racine globale et on note $\xi_\alpha(a)$ le nombre complexe tel que :

$$\mathrm{Ad}(a)X = \xi_\alpha(a)X \qquad \text{pour} \quad X \in \mathfrak{g}_c(\mathfrak{a}_c, \alpha)$$

On a en particulier pour $H \in \mathfrak{a}$:

$$\xi_\alpha(\exp H) = e^{\alpha(H)}$$

Remarquons que l'on a pour $a \in A$:

$$\xi_{\alpha^\tau}(a) = \overline{\xi_\alpha(a)}$$ où τ est la conjugaison de $\mathfrak{g}_c$ relativement à $\mathfrak{g}$

En effet comme $\mathrm{Ad}(k_j)^2 = 1$, on a $\xi_\alpha(k_j) = \pm 1$ et il est facile de vérifier le résultat sur $\exp \mathfrak{a}$. On peut alors montrer que pour $a \in A$:

$$D_\ell(a) = \prod_{\alpha \in \Sigma(\mathfrak{a})} (1 - \xi_{-\alpha}(a)).$$

<u>Proposition 1.1.</u> Soit $(\mathfrak{a}_1, \ldots, \mathfrak{a}_n)$ une famille maximale des sous-espaces de Cartan de $(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$ non conjugués deux à deux. Posons $A_j = Z_X(\mathfrak{a}_j)$. On a alors

$$X' = \bigcup_{j=1}^{n} \bigcup_{h \in H} h A_j' h^{-1} \qquad \text{où} \qquad A_j' = A_j \cap X'$$

On appelle cette décomposition la décomposition de Harish-Chandra de X. Si $\mathfrak{a}$ est un sous-espace de Cartan de $(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$ et $A = Z_X(\mathfrak{a})$, on pose $W(A) = N_H(A)/Z_H(A)$. C'est un groupe fini et on a

Proposition 1.2. L'application de $H/Z_H(A) \times A'$ dans $X' = \bigcup_{h \in H} hA'h^{-1}$ qui à $(\dot{h}, a)$ associe hah^{-1} est régulière. C'est un revêtement à $|W(A)|$ feuillets.

§2. Formule d'intégration de Weyl.

Soit $\mathfrak{a}$ un sous-espace de Cartan de $(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$, $A = Z_X(\mathfrak{a})$ le sous-espace de Cartan de X correspondant et $X_A = \bigcup_{h \in H} hAh^{-1}$ l'orbite dans X de A sous l'action de H. Avec une normalisation convenable de la mesure dx sur X invariante par G, de la mesure da sur A invariante par $\exp \mathfrak{a}$ et de la mesure $d\dot{h}$ sur $H/Z_H(A)$ invariante par H on a

Proposition 2.1. Pour toute fonction f continue à support compact sur X_A

$$\int_{X_A} f(x)\, dx = \frac{1}{|W(A)|} \int_A |D_\ell(a)|^{1/2} \int_{H/Z_H(A)} f(hah^{-1})\, d\dot{h}\, da$$

Démonstration. On considère l'application η de $H/Z_H(A) \times A'$ dans X'_A qui à $(\dot{h}, a)$ associe hah^{-1}. Après avoir choisi une base dans les espaces tangents, on va montrer que la valeur absolue du déterminant de la différentielle de η au point $(\dot{h}, a)$ est égale à $|D_\ell(a)|^{1/2}$. On en déduira le résultat puisque η est un revêtement fini de X'_A qui est un ouvert dense de X_A.

L'espace tangent en $\dot{h}$ à $H/Z_H(A)$ s'identifie à $\mathfrak{h} \cap \mathcal{N}_c$ où $\mathcal{N}_c = \bigoplus_{\alpha \in \Sigma(\mathfrak{a})} \mathfrak{g}(\mathfrak{a}, \alpha)$. En effet $Z_H(A)$ a pour algèbre de Lie $\mathfrak{m} = \mathfrak{z}_{\mathfrak{h}}(\mathfrak{a})$, $\mathfrak{h} \cap \mathcal{N}_c$ est un supplémentaire de $\mathfrak{m}$ dans $\mathfrak{h}$ et l'application de $\mathfrak{h}$ dans l'espace tangent en $\dot{h}$ à $H/Z_H(A)$ qui à X associe $\dot{X}$ défini par

$$\dot{X}f = \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} f((\dot{k}\exp tX)) \qquad \text{pour} \qquad f \in C^\infty(H/Z_H(A))$$

est une surjection qui admet pour noyau $\mathfrak{m}$.

L'espace tangent en $x = g\,\sigma(g)^{-1}$ à $\mathcal{X}$, que l'on note $T_x(\mathcal{X})$, s'identifie à $\mathfrak{q}$. En effet l'application de $\mathfrak{g}$ dans $T_x(\mathcal{X})$ qui à X associe X^* défini par

$$X^*f = \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} f\left(g \exp \frac{tX}{2} \exp\left(-\frac{t\sigma(X)}{2}\right)\sigma(g)^{-1}\right) \quad \text{pour} \quad f \in C^\infty(\mathcal{X})$$

est une surjection qui admet pour noyau $\mathfrak{h}$.

On choisit une base $\{T_1, \cdots, T_n\}$ de $\mathfrak{h} \cap \mathcal{N}_c$ du type de celle utilisée au [31] pour définir l'isomorphisme γ de $\mathfrak{h} \cap \mathcal{N}_c$ dans $\mathfrak{q} \cap \mathcal{N}_c$ c'est-à-dire : pour tout élément j de $\{1, \cdots, n\}$, il existe une racine $\alpha \in \Sigma^+(\mathfrak{a})$ tel que $T_j = X_j + \sigma(X_j)$ où $X_j \in \mathfrak{g}_c(\mathfrak{a} : \alpha)$ si α est réelle ou imaginaire et $X_j \in \mathfrak{g}_c(\mathfrak{a} : \alpha) \oplus \mathfrak{g}_c(\mathfrak{a} : \alpha^\tau)$ si α est complexe. On prend alors $\{\gamma(T_1), \cdots, \gamma(T_n)\}$ pour base de $\mathcal{N}_c \cap \mathfrak{q}$ où

$$\gamma(T_j) = \begin{cases} X_j - \sigma(X_j) & \text{si } \alpha \text{ est réelle ou complexe.} \\ i\,(X_j - \sigma(X_j)) & \text{si } \alpha \text{ est imaginaire.} \end{cases}$$

La différentielle de η s'identifie à une application linéaire de $\mathfrak{a} \oplus (\mathfrak{h} \cap \mathcal{N}_c)$ dans $\mathfrak{a} \oplus (\mathfrak{q} \cap \mathcal{N}_c)$. On va calculer son déterminant dans cette base.

Soit a un élément de A et b un élément de G tel que $b\sigma(b)^{-1} = a$. On peut montrer que la différentielle de η en $(\dot{k}, a)$ est l'application $d\eta_{(\dot{k},a)}$:

$$\begin{array}{ccc} (\mathfrak{h} \cap \mathcal{N}_c) \times \mathfrak{a} & \longrightarrow & T_a(\mathcal{X}) \\ \cup\!\!\!\!\!\!\;\; & & \cup \\ (X, Y) & \longmapsto & (\mathrm{Ad}(b^{-1})Y + 2\,\mathrm{Ad}(b^{-1})X)^* \end{array}$$

Or $Ad(b^{-1})Y$ appartient à $\mathfrak{q}$ car $Ad(a)Y = Y$ implique que $Ad(b^{-1})Y = Ad(\sigma(b)^{-1})Y$. En utilisant l'identification de $T_a(\mathcal{X})$ avec $\mathfrak{q}$ on peut écrire que

$$d\eta_{(\dot{h},a)}(X,Y) = Ad(b^{-1})Y + \left(Ad(b^{-1}) - Ad(\sigma(b^{-1}))\right)X.$$

Considérons l'application Φ_1 de $\mathfrak{g}$ dans lui-même définie par

$$\begin{aligned}\Phi_1 : (\mathfrak{m}\oplus\mathfrak{a}) \oplus (\mathfrak{g}\cap\mathcal{V}_c) &\longrightarrow \mathfrak{g}\\ (Y, X) &\longrightarrow Ad(b^{-1})Y + \left(Ad(b^{-1}) - Ad(\sigma(b^{-1}))\right)X\\ &= Ad(b^{-1})\{Y + (I - Ad(a))X\}\end{aligned}$$

Comme le déterminant de $Ad(b^{-1})$ a pour valeur absolue 1 ($\mathfrak{g}$ semi-simple) on obtient en utilisant la définition de D_ℓ :

$$|\det \Phi_1| = |D_\ell(a)|$$

Nous voulons calculer le déterminant de la restriction Ψ_1 de Φ_1 à $\mathfrak{a}\oplus(\mathfrak{g}\cap\mathcal{V}_c)$ dans la base choisie ci-dessus.

Comme, en général, on ne peut pas choisir b dans A , on complexifie la situation. Soit H_c^* le sous-groupe de $G_c^* = Int(\mathfrak{g}_c)$ des points fixes de σ (prolongée à $Int(\mathfrak{g}_c)$). Soit A_c^* le centralisateur de $\mathfrak{a}_c$ dans $\varphi(G_c^*) = \{g\sigma(g)^{-1} : g \in G_c^*\}$. On a alors (p.407 [29])

$$A_c^* = \exp(\mathrm{ad}\,\mathfrak{a}_c)$$

Comme $Ad(a)$ appartient à A_c^* , il existe un élément c^{-1} de A_c^* tel que :

$$Ad(a) = c^{-1}\sigma(c)$$

On en déduit qu'il existe un élément k de H_c^* tel que :

$$\mathrm{Ad}(b) = c^{-1}\cdot k$$

On note aussi Φ_1 et Ψ_1 les prolongements $\mathbb{C}$-linéaires de Φ et Ψ. Comme k appartient à $\mathrm{Int}(\mathfrak{g}_c)$ et stabilise $\mathfrak{h}_c$ et $\mathfrak{g}_c$, on a , si on pose $\tilde{\Phi}_1 = k\,\Phi_1$ et $\tilde{\Psi}_1 = k\,\Psi_1$

$$|\det \tilde{\Phi}_1| = |\det \Phi_1| = |D_\ell(a)|$$

$$|\det \tilde{\Psi}_1| = |\det \Psi_1|$$

Comme c appartient à $\check{A}_c$, $\tilde{\Phi}_1$ (resp. $\tilde{\Psi}_1$) centralise les éléments de $\mathfrak{a}_c \oplus \mathfrak{m}_c$ (resp. $\mathfrak{a}_c$). Si on pose $\Phi = \tilde{\Phi}_1|_{\mathfrak{n}_c}$ et $\Psi = \tilde{\Psi}_1|_{\mathfrak{n}_c \cap \mathfrak{h}_c}$ on obtient alors

$$\Phi(X) = (c - \sigma(c))\,X \qquad \text{pour} \quad X \in \mathfrak{n}_c$$

$$|\det \Phi| = |D_\ell(a)|$$

$$|\det \Psi| = |\det \Psi_1|$$

La matrice de Φ dans la base $\{T_1, \dots, T_n, \gamma(T_1), \dots, \gamma(T_n)\}$ est de la forme :

$$\begin{array}{c|c|c|}
 & T_1, \dots, T_n & \gamma(T_1), \dots, \gamma(T_n) \\
\hline
T_1, \dots, T_n & 0 & D \\
\hline
\gamma(T_1), \dots, \gamma(T_n) & C & 0 \\
\hline
\end{array}$$

où C est la matrice de Ψ dans les base $\{T_1, \dots, T_n\}$ et $\{\gamma(T_1), \dots, \gamma(T_n)\}$

Montrons que C et D ont le même déterminant au signe près.

On prolonge γ en une application $\mathbb{C}$-linéaire sur $\mathfrak{v}_c$ en posant $\gamma^2 = Id$ ce qui permet de définir aussi γ sur $\mathfrak{g}_c \cap \mathfrak{v}_c$.

On obtient alors pour $X \in \mathfrak{g}_c(\mathfrak{h}, \alpha)$:

$$\gamma(X) = \begin{cases} X & \text{si } \alpha \in \Sigma^+ \text{ et } \alpha \text{ réelle ou complexe} \\ -X & \text{si } -\alpha \in \Sigma^+ \text{ et } \alpha \text{ réelle ou complexe} \\ iX & \text{si } \alpha \in \Sigma^+ \text{ et } \alpha \text{ imaginaire} \\ -iX & \text{si } -\alpha \in \Sigma^+ \text{ et } \alpha \text{ imaginaire} \end{cases}$$

On en déduit que pour $X \in \mathfrak{g}_c(\mathfrak{h}, \alpha)$:

$$\gamma \circ \Phi \circ \gamma(X) = \varepsilon \Phi(X) \quad \text{avec} \quad \varepsilon = \begin{cases} 1 & \text{si } \alpha \text{ réelle ou complexe} \\ -1 & \text{si } \alpha \text{ imaginaire} \end{cases}$$

En effet si X appartient à $\mathfrak{g}_c(\mathfrak{h}, \alpha)$, cX et $a(c^{-1})X$ appartiennent aussi à $\mathfrak{g}_c(\mathfrak{h}, \alpha)$ car c centralise $\mathfrak{h}_c$. Or T_j appartient à $\mathfrak{g}_c(\mathfrak{h}, \alpha) + \mathfrak{g}_c(\mathfrak{h}, \alpha^\tau) + \mathfrak{g}_c(\mathfrak{h}, -\alpha) + \mathfrak{g}_c(\mathfrak{h}, -\alpha^\tau)$. Si on pose $\varepsilon_j = 1$ dans le cas où α est réelle ou complexe et $\varepsilon_j = -1$ dans le cas où α est imaginaire, on a

$$\Phi(\gamma(T_j)) = \varepsilon_j \, \gamma^{-1}(\Phi(T_j)).$$

Les matrices C et D ont donc des colonnes égales ou de signes opposés. On en déduit que $|\det C| = |\det D| = |\det \Phi|$ d'où $|\det \Phi_1|^2 = |\det \Phi|^2 = |D_\ell(a)|$. Q.E.D.

§3. Opérateurs différentiels invariants sur G/H.

Soit G un groupe de Lie semi-simple connexe muni d'une involution σ, $(\mathfrak{g}, \mathfrak{h}, \sigma)$ l'algèbre de Lie symétrique associée. Soit H_o le sous-groupe analytique de G d'algèbre de Lie $\mathfrak{h}$, G_σ le sous-groupe des points fixes de σ dans G et H un sous-groupe fermé de G compris entre H_o et G_σ. On note $\mathbb{D}(G/H)$ l'algèbre des opérateurs différentiels à coefficients complexes sur G/H invariants par G.

Définition 3.1. Soit H_1 un sous-groupe fermé de G. Une distribution Θ sur G/H est appelée distribution sphérique H_1-invariante si elle satisfait les conditions suivantes

(i) $\Theta(h\dot{g}) = \Theta(\dot{g})$ pour tout $\dot{g} \in G/H$ et tout $h \in H_1$

(ii) Il existe un homomorphisme χ de $\mathbb{D}(G/H)$ dans $\mathbb{C}$ tel que pour tout $D \in \mathbb{D}(G/H)$, on ait

$$D\Theta = \chi(D)\Theta$$

Si $H_1 = H$, Θ s'appelle une distribution sphérique invariante (DSI) ou plus simplement une distribution sphérique.

On notera $\mathcal{D}'_\chi(G/H)$ l'espace des distributions sphériques qui verifient (ii) pour le caractère infinitésimal χ de $\mathbb{D}(G/H)$.

Le but de ce chapitre étant de déterminer ces distributions, nous allons commencer par étudier $\mathbb{D}(G/H)$.

Soit θ une involution de Cartan de $\mathfrak{g}$ commutant avec σ et $\mathfrak{a}$ un sous-espace de Cartan de $(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$ θ-stable. Nous allons, dans ce paragraphe, définir un isomorphisme γ de $\mathbb{D}(G/H)$ sur une sous-algèbre de $S(\mathfrak{a}_c)$ (algèbre symétrique du complexifié de $\mathfrak{a}$), analogue à l'isomorphisme de Harish-Chandra défini dans le cas Riemannien ([13]).

Soit $\mathcal{U}(\mathfrak{g}_c)$ l'algèbre enveloppante universelle de l'algèbre de Lie complexe $\mathfrak{g}_c$. On note $\mathcal{U}(\mathfrak{g}_c)^H$ la sous-algèbre des éléments de $\mathcal{U}(\mathfrak{g}_c)$ invariants par $Ad(h)$ pour $h \in H$ et $\mathcal{U}(\mathfrak{g}_c)^{\mathfrak{h}_c}$ la sous-algèbre des éléments de $\mathcal{U}(\mathfrak{g}_c)$ invariants par adX pour $X \in \mathfrak{h}_c$. Comme H_o est connexe on a

$$\mathcal{U}(\mathfrak{g}_c)^{H_o} = \mathcal{U}(\mathfrak{g}_c)^{\mathfrak{h}} = \mathcal{U}(\mathfrak{g}_c)^{\mathfrak{h}_c}.$$

L'algèbre $\mathbb{D}(G/H)$ s'identifie à l'algèbre des restrictions à $\mathcal{C}^\infty(G/H)$(fonctions de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur G invariantes à droite par H) des opérateurs différentiels sur G invariants à gauche par G et à droite par H_o. Il existe donc un homomorphisme canonique η de $\mathcal{U}(\mathfrak{g}_c)^H$ sur $\mathbb{D}(G/H)$. Il a pour noyau l'intersection de $\mathcal{U}(\mathfrak{g}_c)^H$ avec $\mathcal{U}(\mathfrak{g}_c)\mathfrak{h}_c$ qui est un idéal bilatéral, et induit donc un isomorphisme ([15] p.395)

(3.1) $$\mathbb{D}(G/H) \simeq \mathcal{U}(\mathfrak{g}_c)^H / (\mathcal{U}(\mathfrak{g}_c)^H \cap \mathcal{U}(\mathfrak{g}_c)\mathfrak{h}_c).$$

On choisit un ordre sur $\Sigma(\mathfrak{a})$ le système de racines de la paire $(\mathfrak{g}_c, \mathfrak{a}_c)$ tel que si α est une racine positive complexe, alors α^τ est aussi une racine positive (τ désigne la conjugaison complexe de $\mathfrak{g}_c$ relativement à $\mathfrak{g}$). On note $\Sigma^+(\mathfrak{a})$ l'ensemble des racines positives et on pose

$$\mathcal{N}_c^+ = \bigoplus_{\alpha \in \Sigma^+(\mathfrak{a})} \mathfrak{g}_c(\mathfrak{a} : \alpha)$$

En utilisant le prolongement $\mathbb{C}$-linéaire de l'isomorphisme γ (défini au [31]) de $\mathfrak{g}\cap\mathfrak{l}$ dans $\mathfrak{g}\cap\mathfrak{l}$ on montre que

$$\mathfrak{g}_c = \mathfrak{h}_c \oplus \mathfrak{a}_c \oplus \mathfrak{n}_c^+$$

On pose pour $H \in \mathfrak{a}_c$

$$\rho(H) = \frac{1}{2}\,\mathrm{trace}\,\left(\mathrm{ad}\,H\big|_{\mathfrak{n}_c^+}\right)$$

D'autre part on appelle W_c le groupe de Weyl du système de racines $\Sigma(\mathfrak{a})$ et on désigne par $I(\mathfrak{a}_c)$ la sous-algèbre des éléments de $S(\mathfrak{a}_c)$ invariants par W_c .

<u>Proposition 3.1.</u> Pour tout élément $D \in \mathcal{U}(\mathfrak{g}_c)$ il existe un unique élément $D'_{\mathfrak{a}}$ appartenant à $S(\mathfrak{a}_c)$ tel que

$$D - D'_{\mathfrak{a}} \in \mathfrak{h}_c\,\mathcal{U}(\mathfrak{g}_c) + \mathcal{U}(\mathfrak{g}_c)\,\mathfrak{n}_c^+ .$$

On définit l'application $\gamma^{\mathfrak{a}}$ de $\mathcal{U}(\mathfrak{g}_c)^{\mathfrak{h}_c}$ dans $S(\mathfrak{a}_c)$ par

$$\gamma^{\mathfrak{a}}(D) = D_{\mathfrak{a}} = e^{\rho}\, D'_{\mathfrak{a}}\, e^{-\rho} \qquad \text{pour} \qquad D \in \mathcal{U}(\mathfrak{g}_c)^{\mathfrak{h}_c}$$

Alors $\gamma^{\mathfrak{a}}$ induit un isomorphisme de $\mathbb{D}(G/H_o)$ sur l'algèbre $I(\mathfrak{a}_c)$.

<u>Démonstration.</u> On déduit ce résultat du cas Riemannien (Théorème 6.15 [15]) en utilisant la dualité . Soit $\mathfrak{g} = \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{p}$ la décomposition de Cartan de $\mathfrak{g}$ relative à θ . Alors $\mathfrak{a}^d = i(\mathfrak{a}\cap\mathfrak{k}) \oplus (\mathfrak{a}\cap\mathfrak{p})$

d'où $\gamma(\mathcal{U}(\mathfrak{g}_c)^{\mathfrak{g}_c})$ est égal à $\gamma(\mathcal{U}(\mathfrak{g}_c)^{H})$ qui est $\mathbb{D}(G/H)$.

Proposition 3.2. Si $\mathfrak{g}$ est muni d'une structure complexe et si $\mathfrak{h}$ est une forme réelle de $\mathfrak{g}$ alors tous les opérateurs différentiels invariants sur G/H proviennent du centre de l'algèbre enveloppante $\mathcal{U}(\mathfrak{g}_c)$. Cette propriété n'est pas vérifiée pour tout espace symétrique, même dans le cas Riemannien ([16]).

Démonstration. Soit J la structure complexe de $\mathfrak{g}$. On a alors $\mathfrak{g} = \mathfrak{h} \oplus J\mathfrak{h}$. Si D appartient à $\mathcal{U}(\mathfrak{g}_c)^{\mathfrak{h}_c}$ on peut trouver un élément D_0 de $\mathcal{U}(\mathfrak{g}_c)$ tel que

$$D - D_0 \in \mathcal{U}(\mathfrak{g}_c)^{\mathfrak{h}_c} \cap \mathcal{U}(\mathfrak{g}_c)\mathfrak{h}_c ,$$

$$D_0 = \sum_{\alpha=(\alpha_1,\dots,\alpha_n)} c_\alpha (JX_1)^{\alpha_1} \cdots (JX_n)^{\alpha_n} \quad \text{où} \begin{cases} X_1, \dots, X_n \text{ est une base de } \mathfrak{h}_c \text{ sur } \mathbb{C} . \\ c_\alpha \in \mathbb{C} \end{cases}$$

Or D_0 est centralisé par tout $X \in \mathfrak{h}_c$. Il est aussi centralisé par JX pour $X \in \mathfrak{h}_c$ car

$$[X, JX_i] = J[X, X_i] \quad \text{et} \quad [-JX, JX_i] = [X, X_i].$$

On en déduit que D_0 appartient à $\mathcal{U}(\mathfrak{g}_c)^{\mathfrak{g}_c}$, d'où le résultat car $\gamma(D) = \gamma(D_0)$.

§4. Opérateurs différentiels invariants sur $\mathcal{X}$.

On reprend les notations du §3 mais on suppose dorénavant que $H = G_\sigma$. Soit φ l'application de G dans lui-même définie par est un sous-espace de Cartan de la paire symétrique $(\mathfrak{g}^d, \mathfrak{k}^d)$ duale de $(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$. Or les complexifiés de $\mathfrak{a}$ et $\mathfrak{a}^d$, de $\mathfrak{k}^d$ et $\mathfrak{k}$, de $\mathfrak{g}^d$ et $\mathfrak{g}$ sont les mêmes. Vu l'isomorphisme indiqué en (3.1) et l'égalité $\mathcal{U}(\mathfrak{g}_c)^{H_o} = \mathcal{U}(\mathfrak{g}_c)^{\mathfrak{h}_c}$, la proposition se démontre uniquement au niveau des complexifications des algèbres de Lie et on peut donc appliquer le résultat identique pour $(\mathfrak{g}^d, \mathfrak{k}^d)$, qui est une algèbre de Lie symétrique Riemannien. Q.E.D.

<u>Remarque 1.</u> Le groupe de Weyl W_c est le groupe Weyl du système de racines de la paire $(\mathfrak{g}^d, \mathfrak{a}^d)$. Il contient (strictement en général) le groupe de Weyl $W(\mathfrak{a}) = N_{H_o \cap K}(\mathfrak{a}) / Z_{H_o \cap K}(\mathfrak{a})$ défini au chapitre I (K est le sous-groupe analytique de G d'algèbre de Lie $\mathfrak{k}$).

<u>Remarque 2.</u> La décomposition d'Iwasawa complexe ($\mathfrak{g}_c = \mathfrak{k}_c \oplus \mathfrak{a}_c \oplus \mathfrak{n}_c^+$) donnée ci-dessus n'est rien d'autre que la complexifiée de la décomposition d'Iwasawa de $\mathfrak{g}^d$:

$$\mathfrak{g}^d = \mathfrak{k}^d \oplus \mathfrak{a}^d \oplus (\mathfrak{n}_c^+ \cap \mathfrak{g}^d).$$

<u>Remarque 3.</u> Dans le cas où tous les opérateurs différentiels invariants sur G/H proviennent du centre $\mathfrak{z}(\mathfrak{g}_c) = \mathcal{U}(\mathfrak{g}_c)^{\mathfrak{g}_c}$ de l'algèbre enveloppante, c'est-à-dire dans le cas où $\eta(\mathcal{U}(\mathfrak{g}_c)^{\mathfrak{g}_c}) = \eta(\mathcal{U}(\mathfrak{g}_c)^{\mathfrak{h}_c})$, le résultat de la Proposition 3.1 reste valable si on remplace H_o par H ($H_o \subset H \subset G_\sigma$). En effet, dans ce cas, on a

$$\mathcal{U}(\mathfrak{g}_c)^{\mathfrak{g}_c} = \mathcal{U}(\mathfrak{g}_c)^G \supset \mathcal{U}(\mathfrak{g}_c)^H \supset \mathcal{U}(\mathfrak{g}_c)^{H_o} = \mathcal{U}(\mathfrak{g}_c)^{\mathfrak{h}_c}$$

$\varphi(g) = g\,\sigma(g)^{-1}$ qui permet d'identifier G/H avec $\mathcal{X} = \varphi(G)$.
On désigne maintenant par $\mathbb{D}(\mathcal{X})$ l'algèbre des opérateurs différentiels invariants sur $\mathcal{X}$ et on note $S^H(\mathfrak{q}_c)$ la sous-algèbre des éléments de $S(\mathfrak{q}_c)$ (algèbre symétrique de $\mathfrak{q}_c$) invariants par $Ad(H)$.

<u>Proposition 4.1.</u> Soit δ l'application de $S^H(\mathfrak{q}_c)$ dans $\mathbb{D}(\mathcal{X})$ définie par $\delta(P) = P^*$ où pour $f \in C^\infty(\mathcal{X})$ et $x = g\,\sigma(g)^{-1} \in \mathcal{X}$ on pose :

$$(P^* f)(x) = \sum_\alpha a_\alpha \left\{ \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial t_1^{\alpha_1} \cdots \partial t_n^{\alpha_n}} f \circ \varphi \left(x \exp \frac{t_1 X_1 + \cdots + t_n X_n}{2} \right) \right\}\Big|_{t=0}$$

si $X_1, \cdots, X_n$ est une base de $\mathfrak{q}$ sur $\mathbb{R}$ et $P = \sum_\alpha a_\alpha X_1^{\alpha_1} \cdots X_n^{\alpha_n}$ avec $\alpha = (\alpha_1, \cdots, \alpha_n) \in \mathbb{N}^n$, $a_\alpha \in \mathbb{C}$ et $|\alpha| = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j$. L'application δ est un isomorphisme $\mathbb{C}$-linéaire de $S^H(\mathfrak{q}_c)$ sur $\mathbb{D}(\mathcal{X})$.

C'est un résultat classique ([15] p.395) qu'on a réécrit en utilisant l'identification par φ de G/H avec $\mathcal{X}$. Rappelons que la définition de $\delta(P)$ ne dépend pas du choix de la base $\{X_1, \cdots, X_n\}$ de $\mathfrak{q}$. On veut étudier l'action de $\mathbb{D}(\mathcal{X})$ sur les fonctions invariantes par H. Soit $\mathfrak{a}$ un sous-espace de Cartan de $(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$ et $A = Z_{\mathcal{X}}(\mathfrak{a})$ le sous-espace de Cartan de $\mathcal{X}$ associé.
La Proposition 1.2 du §1 permet, en utilisant la Proposition 2.2 de [17] , d'affirmer l'existence d'une partie radiale pour les opérateurs différentiels invariants sur $\mathcal{X}$, c'est-à-dire.

<u>Proposition 4.2.</u> Si D appartient à $\mathbb{D}(\mathcal{X})$, il existe un opérateur différentiel (noté $\mathcal{R}_D$) sur A' , invariant par

$W_A = N_H(A)/Z_H(A)$, tel que pour toute fonction $f \in C^\infty(X')$, invariante par H on ait

$$(Df)(a) = \left[\mathbb{R}_D f\,\middle|_{A'}\right](a) \quad \text{pour} \quad a \in A'$$

L'opérateur différentiel $\mathbb{R}_D$ s'appelle la partie radiale de D. Nous allons dans les paragraphes suivants déterminer ces parties radiales pour certains espaces symétriques.

§5. Détermination des parties radiales dans le cas d'un groupe complexe.

Dans ce paragraphe nous allons rappeler les résultats de Harish-Chandra [12] pour un groupe complexe semi-simple (voir aussi [3]). On suppose donc que l'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ du groupe G est munie d'une structure complexe. Si $\mathfrak{j}$ est une sous-algèbre de Cartan de $\mathfrak{g}$, la décomposition de Cartan de G s'écrit

$$G' = \bigcup_{g \in G} g J' g^{-1} \qquad \text{où} \qquad J = Z_G(\mathfrak{j}) = \exp \mathfrak{j}$$

Ici G' désigne l'ensemble des éléments réguliers de G définis de manière analogue à celle du §1 en utilisant le polynôme

$$\det\left((1+t)\,\mathrm{Id} - \mathrm{Ad}_G(g)\right) = \sum_{k=\dim_{\mathbb{C}} \mathfrak{j}}^{\dim_{\mathbb{C}} \mathfrak{g}} d_j(g)\, t^k \quad \text{pour} \quad g \in G$$

Soit Σ le système de racines de la paire ($\mathfrak{g}$, $\mathfrak{j}$), Σ^+ un ensemble de racines positives, ρ la demi-somme des racines positives. Posons pour $H \in \mathfrak{j}$

$$\Delta(\exp H) = e^{\rho(H)} \prod_{\alpha \in \Sigma^+} (1 - e^{-\alpha(H)})$$

Si on appelle ℓ la dimension sur $\mathbb{C}$ de $\mathfrak{j}$ on obtient pour $H \in \mathfrak{j}$

$$d_\ell(\exp H) = (-1)^n (\Delta(\exp H))^2$$

où n désigne le nombre d'éléments de Σ^+. On en déduit qu'au signe près Δ est défini sur A . Désignons par $I(\mathfrak{j})$ la sous-algèbre des éléments de l'algèbre symétrique $S(\mathfrak{j})$ invariants par $W(\mathfrak{j}) = N_G(\mathfrak{j})/Z_G(\mathfrak{j})$. On désigne par $\mathbb{D}_c(G)$ l'algèbre des opérateurs différentiels complexes bi-invariants sur G. Elle est isomorphe au centre $\mathfrak{z}(\mathfrak{g})$ de l'algèbre enveloppante universelle $\mathfrak{u}(\mathfrak{g})$ de l'algèbre de Lie complexe $\mathfrak{g}$.

<u>Théorème 5.1.</u> Si D appartient à $\mathbb{D}_c(G)$, il existe un polynôme p appartenant à $I(\mathfrak{j})$ tel que pour toute fonction holomorphe sur G et centrale on ait

$$[Df](a) = \frac{1}{\Delta(a)} \left[p(\partial) \{ \Delta f|_{J'} \} \right](a) \qquad \text{pour} \qquad a \in J'$$

De plus l'application γ_c de $\mathfrak{z}(\mathfrak{g})$ dans $I(\mathfrak{j})$ qui à D associe p est un isomorphisme d'algèbre.

On construit γ_c de la façon suivante. Soit $\Sigma(\mathfrak{j})$ le système de racines de la paire $(\mathfrak{g}, \mathfrak{j})$, ($\Sigma^+(\mathfrak{j})$ un ensemble de racines positives). Posons

$$\mathcal{N}^{\pm} = \sum_{\pm\alpha \in \Sigma^+(\mathfrak{j})} \mathfrak{g}(\mathfrak{j}.\alpha)$$

Si D appartient à $U(\mathfrak{g})^G = \mathfrak{z}(\mathfrak{g})$ on démontre qu'il existe un unique élément $D'_{\mathfrak{j}}$ appartenant à $U(\mathfrak{j})$ tel que $D-D'_{\mathfrak{j}}$ appartient à $U(\mathfrak{g})\mathcal{N}^+ + \mathcal{N}^- U(\mathfrak{g})$. On identifie $U(\mathfrak{j})$ avec l'algèbre des fonctions polynomês sur $\mathfrak{j}$ et on pose pour

$$[\gamma_c(D)](\lambda) = D'_{\mathfrak{j}}(\lambda-\rho) = D_{\mathfrak{j}}(\lambda) \qquad \text{où} \quad \rho = \frac{1}{2} \sum_{\alpha \in \Sigma^+(\mathfrak{j})} \alpha$$

On peut alors montrer que γ_c est un isomorphisme (appelé isomorphisme de Harish-Chandra) de $\mathfrak{z}(\mathfrak{g})$ sur $I(\mathfrak{a})$. Pour démontrer le théorème on détermine à l'aide de γ_c l'action de D sur les caractères des représentations holomorphes de dimension finie de G et on obtient :

<u>Lemme 5.2.</u> Soit (π, V) une représentation holomorphe Λ irreductible de dimension finie de G sur V de poids dominant Λ et soit χ son caractère. Si D appartient à $\mathfrak{z}(\mathfrak{g})$ on a pour $a \in J'$

$$\Delta(a)\,[D\chi](a) = p(\partial)\{\Delta\chi|_{J'}\}(a) \quad \text{où} \quad p = \gamma_c(D)$$

Ce lemme se démontre en utilisant le fait que $\pi(D)$ est un opérateur scalaire sur V et en étudiant l'action de $\pi(D)$ sur un vecteur de poids Λ pour vérifier que ce scalaire est égal à $[\gamma_c(D)](\Lambda+\rho)$. Puis on utilise la formule des caractères de H. Weyl pour calculer l'action d'un élément de $I(\mathfrak{j})$ sur $\Delta\chi|_{J'}$. Pour finir la démonstration du théorème on utilise le lemme ci-dessous qui se démontre à l'aide du théorème de Peter-Weyl et du " unitary trick ".

<u>Lemme 5.3.</u> Soit $\mathcal{C}t(G)$ l'espace engendré par les caractères des représentations holomorphes de dimension finie de G. L'espace des restrictions à J' des éléments de $\mathcal{C}t(G)$ est dense dans le sous-espace des fonctions invariantes par $W(\mathfrak{j})$ de $A(G)$.

<u>Remarque.</u> Soit $\mathfrak{g}$ une forme réelle de $\mathfrak{g}$ qui s'écrit alors $\mathfrak{g}=\mathfrak{g}\oplus J\mathfrak{g}$ où J est la structure complexe de $\mathfrak{g}$. Si $\mathfrak{a}$ est un sous-espace de Cartan de $(\mathfrak{g},\mathfrak{g})$, $\mathfrak{j}=\mathfrak{a}\oplus J\mathfrak{a}$ est une sous-algèbre de Cartan de $\mathfrak{g}$. On a défini au §3 un isomorphisme $\gamma^{\mathfrak{a}}$ de $\mathbb{D}(G/H)$ sur $I(\mathfrak{a}_c)$ et ici un isomorphisme γ_c de $\mathbb{D}_c(G)$ sur $I(\mathfrak{j})$. Or il est clair que les algèbres $I(\mathfrak{a}_c)$ et $I(\mathfrak{j})$ sont isomorphes car le système de racines de la paire (complexe)$(\mathfrak{g},\mathfrak{j})$ est identique au système de racines de la paire $(\mathfrak{g}_c,\mathfrak{a}_c)$. On en déduit que pour tout opérateur différentiel $D\in\mathbb{D}(G/H)$, il existe un unique élément $D_c\in\mathbb{D}_c(G)\simeq\mathfrak{Z}(\mathfrak{g})$ tel qu'on puisse écrire

$$\gamma^{\mathfrak{a}}(D) = \gamma_c(D_c)$$

après avoir identifié $I(\mathfrak{a}_c)$ et $I(\mathfrak{j})$.

§6. Un exemple d'espaces en c-dualité.

Soit $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie semi-simple, $\mathfrak{g}_c$ sa complexifiée, G_c un groupe de Lie connexe d'algèbre de Lie $\mathfrak{g}_c$ et G le sous-groupe analytique d'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$. On suppose de plus que la conjugaison complexe σ_2 de $\mathfrak{g}_c$ relativement à $\mathfrak{g}$ se remonte en une involution σ_2 sur G_c et que G est l'ensemble des points fixes de σ_2.

Soit σ_1 l'involution définie sur $G \times G$ (resp. $\mathfrak{g}\oplus\mathfrak{g}$) par $\sigma_1(x, y) = (y, x)$ (resp. $\sigma_1(X,Y)=(Y,X)$). On appelle diag le sous-groupe (resp. la sous-algèbre) des points fixes de σ_1. On dit que l'espace symétrique ($G\times G$, diag, σ_1) est un espace symétrique $G\times G/G$ de cas I. On peut réaliser cet espace symétrique comme sous-variété de G : l'application φ_1 de $G\times G/G$ qui à (x, y) associé xy^{-1} induit un G-difféomorphisme de $G\times G$/diag sur $G\subset G_c$. On pose $\mathcal{X}_1 = G$ et G opère sur cet espace symétrique par conjugaison.

Soit σ_2 l'involution définie sur G_c(resp. $\mathfrak{g}_c$) ci-dessus. On dit que l'espace symétrique (G_c, G, σ_2) est un espace symétrique $G\times G/G$ de cas II. On peut réaliser cet espace symétrique comme sous-variété fermée de G_c: l'application φ_2 de $G_c \to G_c$ qui à x associe $x\sigma_2(x)^{-1}$ induit un G-difféomorphisme de G_c/G sur son image qu'on note $\mathcal{X}_2$. De plus G_c opère sur cet espace symétrique par $x \mapsto gx\sigma_2(g)^{-1}$.

Les espaces symétriques $\mathcal{X}_1$ et $\mathcal{X}_2$ son en c-dualité. Soit φ l'application de $\mathfrak{g}_c$ sur $\mathfrak{g}\oplus\mathfrak{g}$ qui à $X+\sqrt{-1}Y$ ($X,Y\in\mathfrak{g}$) associe $(X,X)+J(Y,Y)$ où $J(X,Y)=(-Y,X)$. C'est un isomorphisme d'algèbre de Lie, commutant à l'action adjointe de G et tel que $\sigma_1\circ\varphi = \varphi\circ\sigma_2$. Remarquons que J induit une structure complexe sur $\mathfrak{g}\oplus\mathfrak{g}$.

Il y a dualité du caractère compact entre des variétés G_c/G et G.

Mais G_c/G et G sont des formes réelles de G_c. On donne les théorèmes de G_c/G dans le situation $G\times G/G$ qui contient des résultats du groupe. La démonstration est différente en général. Pour cela, on prepare les notations suivantes. Dans le cas I, on réalisera l'espace symétrique en posant $\mathcal{X}_1 = G$ et on étudiera le triplet associé $(\mathcal{X}_1, \mathfrak{q}_1 : G_c)$ où $\mathfrak{q}_1 = \mathfrak{g}$. Dans le cas II, on réalisera l'espace symétrique en posant $\mathcal{X}_2 = \{ g\sigma(g)^{-1} : g \in G_c \}$ et on étudiera le triplet associé $(\mathcal{X}_2, \mathfrak{q}_2 : G_c)$ où $\mathfrak{q}_2 = i\mathfrak{g}$. Quand il n'est pas nécessaire de distinguer un espace de type I et de type II, nous enlevons l'index.

§7. Détermination des parties radiales dans le cas où $G\times G/G$

On utilise les notations§6. Rappelons que si $\mathfrak{a}$ est un sous-espace de Cartan de $\mathfrak{q}$, alors $\mathfrak{a}_c$ est une sous-algèbre de Cartan de $\mathfrak{g}_c$ et on vérifie aisément que

$$\mathcal{X}' = G_c' \cap \mathcal{X} \quad \text{et} \quad A = \exp \mathfrak{a}_c \cap \mathcal{X} \qquad (\text{ cf §1 pour les notations })$$

On note toujours Δ la restriction à A de la fonction Δ définie au §5 sur le sous-groupe de Cartan $\exp \mathfrak{a}_c$ (noté J au §5).

Théorème 7.1. Soit D un opérateur différentiel invariant sur $\mathcal{X}$, R_D sa partie radiale sur A' et f une fonction de classe C^∞ sur $\mathcal{X}$ invariante par G. Alors pour $a \in A'$ on a

$$R_D f\big|_{A'}(a) = \frac{1}{\Delta(a)} \left[\mathring{\gamma}(D)\right] \left[\Delta f\big|_{A'}\right](a)$$

où $\gamma^{\sigma}(D)$ est l'élément de $I(\mathfrak{a}_c)$ défini au §3 (on fait l'identification indiquée à la fin du §5).

Démonstration. On vérifie tout d'abord le théorème dans le cas II, $\mathcal{X} \simeq G_c/G$ où f est la restricion à $\mathcal{X}$ d'une fonction holomorphe et centrale sur G . En effet dans ce cas pour $P \in S^G(\mathfrak{q}_c)$ on a

$$(p^*f)(g\sigma(g)^{-1}) = P\left(\frac{\partial}{\partial t_1}, \cdots, \frac{\partial}{\partial t_n}\right) f\circ\varphi\left(g\exp\frac{t_1X_1+\cdots+t_nX_n}{2}\right)\Big|_{t=0}$$

où $\{X_1,\cdots,X_n\}$ est une base de $\mathfrak{q}$ sur $\mathbb{R}$. Or pour $X\in\mathfrak{q}$ on a puisque F est centrale et $\sigma(X) = -X$.

$$\begin{aligned} f\circ\varphi\left(g\exp\frac{X}{2}\right) &= F(g\exp X\,\sigma(g)^{-1}) \\ &= F(\sigma(g)^{-1}g\exp X) \\ &= F(gxg^{-1}\exp X) \qquad \text{où} \quad x = g\sigma(g)^{-1}\in\mathcal{X} \end{aligned}$$

Comme ici $S(\mathfrak{q}_c)^G = S(\mathfrak{g}_c)^{G_c}$, on considère l'opérateur différentiel complexe $D_c \in \mathcal{U}(\mathfrak{g}_c)^{\mathfrak{g}_c}$ qui correspond au polynôme P . Puisque c'est un opérateur différentiel bi-invariant et que F est centrale on obtient

$$(p^*f)(x) = (D_cF)(gxg^{-1}) = (D_cF)(x)$$

On déduit donc du théorème 5.1 que pour $a\in A'$

$$[R_Df|_{A'}](a) = \frac{1}{\Delta(a)}\{\gamma_c(D_c)\quad[\Delta f|_{A'}]\}(a)$$

D'après l'identification $\gamma^{\sigma}(D) = \gamma_c(D_c)$ indiquée au §5, il suffit d'applique le théorème 5.1 pour obtenir le résultat
On a donc déterminé l'opérateur différentiel R_D sur les restrictions à A' des fonctions holomorphes et centrales sur G .Le lemme 5.3 permet de conclure que ceci suffit à déterminer R_D .

Dans le cas I où $\mathfrak{X} = \mathfrak{G}$ le résultat du théorème 1.1 est connu ([17]). Si G est contenu dans G_c , on peut en faire une démonstration analogue à la démonstration ci-dessus (cf. [3]).

Q.E.D.

Proposition 7.2. Soit f une fonction analytique sur A' que soit fonction propre des éléments de $I(\mathfrak{a}_c)$. Il existe alors une forme linéaire Λ sur $\mathfrak{a}$ à valeurs complexes telle que pour $P \in I(\mathfrak{a}_c)$ on ait

$$P(\partial) f = P(\Lambda) f.$$

Soit $A_0 = a_0 \exp \mathfrak{a}$ une composante connexe de A et $\mathcal{O}$ une composante connexe de A_0'. Il existe une famille de fonctions polynômes sur $\mathfrak{a}$ $\{P_w\}_{w \in W_c}$ telle que :

1) les polynômes P_w sont $W_c(\Lambda)$-harmoniques où

$$W_c(\Lambda) = \{ w \in W_c \; ; \; w\Lambda = \Lambda \}$$

2) $f(a_0 \exp X) = \sum_{w \in W_c} P_w(X)\, e^{\langle w\Lambda, X \rangle}$ pour $a_0 \exp X \in \mathcal{O}$

Démonstration. C'est un résultat classique ([41] p.60). Remarquons que si Λ est W_c-régulier , c'est-à-dire si $w\Lambda \neq \Lambda$ pour $w \in W_c \setminus \{1\}$, les polynômes P_w sont des constantes .

On peut construire les P_w de la façon suivante : Soit $\Pi = \{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}$ une base du système de racines $\Sigma(\mathfrak{a})$ et, pour $j = 1, \dots, n$ soit H_j l'élément de $\mathfrak{a}_c$ défini par $\alpha_i(H_j) = \delta_{ij}$ $(i = 1, \dots, n)$. Soit p le nombre d'éléments de W_c. Pour chaque valeur du paramètre t, définissons le polynôme $D_1(t)$ de $I(\mathfrak{a}_c)$ par

$$D_1(t) = \prod_{w \in W_c} (t - wH_1)$$

Il existe p polynômes Q_j appartenant à $I(\mathfrak{a}_c)$ tels que

$$D_1(t) = t^p + t^{p-1} Q_1 + \cdots + t\, Q_{p-1} + Q_p .$$

Comme le groupe de Weyl W_c permute les H_j on a

$$[D_1(H_k)] f = 0 \qquad \text{pour} \quad f \in C^\infty(A) \quad \text{et} \quad k = 1, \dots, n$$

Si f est fonction propre des éléments de $I(\mathfrak{a}_c)$, il existe $\Lambda \in \mathfrak{a}_c^*$ tel que

$$P_j(\partial) f = P_j(\Lambda) f$$

La fonction f satisfait donc les équations différentielles suivantes

$$[H_k^p + P_1(\Lambda) H_k^{p-1} + \cdots + P_p(\Lambda)] f = 0 \qquad \text{pour} \quad k = 1, \dots, n$$

L'équation caractéristique de chacune de ces équations est

$$0 = r^p + P_1(\Lambda) r^{p-1} + \cdots + P_p(\Lambda) = \prod_{w \in W_c} (r - w\lambda_1)$$

où on a posé $\Lambda = \lambda_1 \alpha_1 + \cdots + \lambda_n \alpha_n$ et où $w\lambda_1$ est la 1ère-coordonnée de dans la base $\{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}$. Posons $m(\Lambda) = \{w \in W_c : w\Lambda = \Lambda\}$. Les polynômes cherchés sont de la forme

$$P_w(X) = \prod_{k=1}^{n} \{ C_1^k + C_2^k \alpha_k(X) + \cdots + C_{m(\Lambda)}^k \alpha_k^{m(\Lambda)'}(X) \}$$

où les C_j^k $(1 \leq k \leq n,\ 1 \leq j \leq m(\Lambda))$ sont des constantes. Q.E.D.

§8. Un espace fibré associé aux sous-groupes de Borel.

Soit $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie semi-simple réelle et $\mathfrak{g}_c$ sa complexifiée. Soit G_c un groupe de Lie connexe d'algèbre de Lie $\mathfrak{g}_c$ et G le sous-groupe analytique d'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$. Soit H_c le sous-groupe fermé de G_c défini par $H_c = (G_c)_\sigma$. Si on considère la restriction de σ à G, on a $H = G_\sigma = (G_c)_\sigma \cap G$ On note aussi σ l'automorphisme de $\mathfrak{g}_c$ qui est la différentielle de σ. Soit $\mathfrak{g}_c = \mathfrak{h}_c \oplus \mathfrak{q}_c$ la décomposition en sous-espace propres de σ. On pose $\mathfrak{h} = \mathfrak{h}_c \cap \mathfrak{g}$, $\mathfrak{q} = \mathfrak{q}_c \cap \mathfrak{g}$. L'application φ de G_c dans G_c qui à x associe $x\sigma(x)^{-1}$ induit un G_c-difféomorphisme de G_c/H_c sur son image qu'on note X_c. Si on pose $X = G \cap X_c$, la restriction de φ à G induit un G-difféomorphisme de G/H sur X. Soit $\mathfrak{j}_c$ une sous-algèbre de Cartan de $\mathfrak{g}_c$. On a alors $\mathfrak{g}_c = \mathfrak{j}_c + \mathcal{N}_c^+ + \mathcal{N}_c^-$ où $\mathcal{N}_c^+ = \sum_{\alpha>0} \mathfrak{g}_c(\mathfrak{j}_c : \alpha)$ et $\mathcal{N}_c^- = \sum_{\alpha<0} \mathfrak{g}_c(\mathfrak{j}_c : \alpha)$. On pose $\mathfrak{b} = \mathfrak{j}_c + \mathcal{N}_c^+$. Soit B le sous-groupe analytique de G_c correspondant à $\mathfrak{b}$. Tout sous-groupe de G_c conjugué de B est appelé sous-groupe de Borel de G_c. Tout élément de G_c appartient à un sous-groupe de Borel. L'espace hemogéne G_c/B est une variété complexe compacte.

Hypothèse A. Il existe un sous-groupe de Borel B de G_c σ-invariant vérifiant la condition suivante ;

(A) $$X_c = \bigcup_{h \in H_c} h\,(B \cap X_c)\,h^{-1}$$

Voici des exemples pour lesquels l'hypothèse A est satisfaite.

Exemple (i) Soit G_c' un groupe de Lie connexe semi-simple. Soit σ l'involution définie sur $G_c = G_c' \times G_c'$ par $\sigma(g,h) = (h,g)$ $(g, h \in$

On a alors $H_c=\{(g,g) : g\in G_c'\}$ et $X_c=\{(g,g^{-1}) : g\in G_c'\}$. L'application φ de G_c/H_c sur X_c qui à $(g,h)H_c$ associe (gh^{-1}, hg^{-1}) induit un G_c-difféomorphisme. Soit B' un sous-groupe de Borel de G_c'. Alors $B=B'\times B'$ est un sous-groupe de Borel σ-invariant de G_c. On a bien $X_c=\bigcup_{g\in G_c}(g,g)(B\cap X)(g,g)^{-1}$.

(ii) Soit $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie semi-simple complexe. Soit $\mathfrak{g}_c=\mathbb{C}\otimes\mathfrak{g}=\{X+\sqrt{-1}Y : X,Y\in\mathfrak{g}\}$. Soit σ la conjugaison de correspondante. Soit G_c un groupe de Lie connexe d'algèbre de Lie $\mathfrak{g}_c$. On relève σ sur G_c en un automorphisme involutif. Alors $X_c=\{g\sigma(g)^{-1} ; g\in G_c\}$ est un G_c-espace connexe. L'application φ de G_c/H_c sur X_c qui a gH_c associe $g\sigma(g)^{-1}$ induit un G_c difféomorphisme. Soit B un sous-groupe de Borel de G_c. On pose $B_0=B\cap H_c$. Soit $\mathfrak{b}_0$ une sous-algèbre de Borel de $\mathfrak{g}$ correspondant à B_0. On a bien $X_c=\bigcup_{h\in H_c}h(B\cap X)h^{-1}$ car $\sqrt{-1}\mathfrak{g}=\bigcup_{h\in H_c}h(\sqrt{-1}\mathfrak{b})h^{-1}$

(iii) Soit $G_c=SL(n+1,\mathbb{C})$ et σ l'automorphisme involutif de défini par

$$g=\begin{array}{c}\\ 1\\ n\end{array}\!\!\begin{array}{c}\begin{array}{cc}1 & \quad n\end{array}\\ \left(\begin{array}{c|c} X_1 & X_2\\ \hline X_3 & X_4\end{array}\right)\end{array}\longmapsto\sigma(g)=\left(\begin{array}{c|c} X_1 & -X_2\\ \hline -X_3 & X_4\end{array}\right).$$

On a alors

$$H_c=\left\{h=\left(\begin{array}{c|c} a & 0\\ \hline 0 & b\end{array}\right) : \begin{array}{l} a\in GL(1,\mathbb{C}),\ b\in GL(n,\mathbb{C})\\ \det h=1\end{array}\right\},$$

$$X_c=\left\{g=\left(\begin{array}{c|cccc} c_0 & a_1 & a_2 & \cdots & a_n\\ \hline b_1 & c_1 & 0 & & 0\\ b_2 & 0 & c_2 & & \\ \vdots & & & \ddots & \\ b_n & 0 & & & c_n\end{array}\right) : \begin{array}{l} c_j^2-a_jb_j=1\ (j=1,2,\cdots,n)\\ \det g=1,\ \sigma(g)=g^{-1}\end{array}\right\}$$

Si $n=1$, $B = g_0 \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a^{-1} \end{pmatrix} \right\} g_0^{-1}$ où $g_0 = \begin{pmatrix} 1 & \frac{i}{2} \\ i & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$ vérifie l'hypothèse A. Mais si   , il n'existe pas de sous-groupe de Borel de G_c vérifiant l'hypothèse A.

Définition 8.1. Soit G_c/H_c un espace symétrique complexe vérifiant l'hypothèse A et B un sous-groupe de Borel tel que (A) est vérifiée. On définit le sous-espace E de $X_c \times H_c/B_H$ par

$$E = \{ (x, gB_H) \in X_c \times H_c/B_H \; : \; g^{-1} x g \in B \cap X_c \} \quad (B_H = B \cap H_c).$$

Soit pr_1 (resp. pr_2) la projection de E sur le premier (resp.sur le deuxième) facteur. (E, pr_2, H_c/B_H, B_H)est ainsi un espace fibré analytique complexe. La fibre au dessus de gB_H est égale à $g(B \cap X_c) g^{-1}$ L'action A_h ($h \in H_c$) de H_c sur E (resp. X) est définie par

$A_h(x, gB_H) = (h x h^{-1} \;, hg\, B_H)$ (resp. $A_h(x) = h x h^{-1}$ $(x \in X)$)

On a alors $pr_1 \, (A_h(y)) = A_h \cdot pr_1(y)$ $(h \in H_c, y \in E)$ et pr_1 est une application propre car H_c/B_H est compact. Puisque E et X_c ont la même dimension, pr_1 est un recouvrement fini excepté sur l'ensemble des éléments singuliers de X_c (cf. Définition 1.1)

On plonge $B \cap X_c$ dans E par l'application $B \cap X_c \ni b \mapsto (b, eB_H)$ dont l'image est la fibre au dessus de eB_H. Ainsi la projection pr_1 est l'identité sur $B \cap X_c$, et $B \cap X_c$ rencontre chaque H_c-orbite aussi bien dans E que dans X_c . Il existe une m-forme ω_c, H_c-invariante holomorphe sur X_c $(m = \dim E = \dim X_c)$. En effet choisisso des m-vecteurs sur l'espace tangent $T_e(B \cap X_c)$ en e à $B \cap X_c$ et les transforme par l'action de H_c . Par cette méthode, on obtient ω_c sur X_c. Pour définir une m-forme η_c , H_c-invariante et holomorphe sur E, on fixe sa valeur en (e, eB_H).

Ensuite on l'étend à la fibre pour la définir sur $B \cap \mathcal{X}_c$ et on l'étend finalement à E par l'action de H_c. On explicite la m-forme η_c sur E la suivante.

Soit $\mathfrak{z}$ la projection de $\mathfrak{h}_c$ sur $\mathfrak{h}_c/(\mathfrak{b}\cap\mathfrak{h}_c)$ et pr l'application canonique de H_c sur H_c/B_H. Soit V un voisinage ouvert de 0 dans $\mathfrak{h}_c$ tel que l'application exp: $V \to H_c$ soit un difféomorphisme. On pose $U = \exp V$ et $\mathcal{O} = pr(U)$. Il existe une section locale $s : \mathcal{O} \longrightarrow H_c$ telle que pr$(s(gB_H)) = gB_H$ $(gB_H \in \mathcal{O})$. On en déduit une section s de $\mathfrak{h}_c/\mathfrak{b}\cap\mathfrak{h}_c$ dans $\mathfrak{h}_c$ vérifiant.

$$s(pr(\exp X)) = \exp(s(\mathfrak{z}(X))) \qquad (X \in V).$$

A un élément X^* de $\mathfrak{h}_c/\mathfrak{b}\cap\mathfrak{h}_c$, on associe l'opérateur différentiel

$$X^*_{gB_H} f = \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} f(g(\exp tX)B_H)$$

Par cette correspondance, on identifie $\mathfrak{h}_c/\mathfrak{b}\cap\mathfrak{h}_c$ et $T_{gB_H}(H_c/B_H)$.
A un élément Y^* de $\mathfrak{g}_c/\mathfrak{h}_c$, on associe l'opérateur différentiel

$$Y^*_x f = \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} f(a \exp tY\, \sigma(\exp tY)^{-1}\sigma(a)^{-1}) \qquad (x = a\sigma(a)^{-1} \in \mathcal{X}).$$

Ce qui permet d'identifier $\mathfrak{g}_c/\mathfrak{h}_c$ et $T_x(\mathcal{X})$. L'espace tangent $T_{(x,gB)}(\mathcal{X}_c \times H_c/B_H)$ est ainsi identifié à $\mathfrak{g}_c/\mathfrak{h}_c \oplus \mathfrak{h}_c/\mathfrak{b}\cap\mathfrak{h}_c$.

On définit une section local au voisinage du point (b, eB_H) de $(\mathcal{X}_c \cap B) \times H_c/B_H$ dans E par

$$\begin{array}{ccc}(\mathfrak{X}_c\cap B)\times \mathcal{O} & \longrightarrow & E \\ \Downarrow & & \Downarrow \\ (b,\, g B_H) & \longmapsto & (\rho(g) b\ (\rho(g))^{-1},\ g B_H)\end{array}$$

A un élément X^* de $\mathfrak{g}_c/\mathfrak{b}\cap\mathfrak{g}_c$ on associe un vecteur de l'espace tangent $T_{(b,eB_H)}(E)$ par

$$(\widetilde{0,X^*})_{(b,eB_H)} f = \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} f\,(\rho(\exp tX)\, b\ \ (\exp tX)^{-1},\ (\exp tX)B_H)$$

$$= \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} f\,(a \exp t\, Ad(a^{-1})\,\rho(X)\ \exp(-t\, Ad(\sigma(a)^{-1}))\,\rho(X)\sigma(a)^{-1}, (\exp tX)B_H)$$

$$(b = a\,\sigma(a)^{-1})$$

$$= ((Ad(a^{-1}) \quad - Ad(\sigma(a)^{-1}))\ \ \rho(X)\ ,\ X)_{(b,eB_H)}\ f$$

Soit $Y_1,\ldots,Y_\ell$ une base de $\mathfrak{b}\cap\mathfrak{g}$ ($\ell = \dim_{\mathbb{C}} \mathfrak{b}\cap\mathfrak{g}$). Soit $X_1^*,\ldots,X_{m-\ell}^*$ des éléments de $\mathfrak{g}_c/\mathfrak{b}\cap\mathfrak{g}_c$ tels que $[\ (Ad(a^{-1}) - Ad(\sigma(a)^{-1}))\ \rho(X_j)\ ]^*_{j=1,\ldots}$ forment une base de $\mathfrak{g}_c/\mathfrak{b}\cap\mathfrak{g}_c$. On pose $W_j = (Y_j,\, 0)$ $(j=1,\ldots,\ell)$ et $W_j = (\widetilde{0, X_j^*})$ $(j=1,\ldots,m-\ell)$. On considère la base duale η_i : $\eta_i(W_j) = \delta_{ij}$ $(i,j=1,\ldots,m)$. On définit la m-forme η sur $\{(b,eB_H) : b \in B\cap\mathfrak{X}_c\}$ par $\eta_{(b,eB_H)} = (\eta_1\wedge\eta_2\wedge\cdots\wedge\eta_m)_{(b,eB_H)}$

La forme η ne dépend pas de la section locale choisie, car si on choisit une autre section locale ρ', on a alors $\rho(X^*) - \rho'(X^*) \in \mathfrak{b}$ pour tout $X^* \in \mathfrak{g}_c/\mathfrak{b}\cap\mathfrak{g}_c$. On étend η à E en utilisant l'action de H_c ce qui est possible l'hypothèse (A).

la forme η est bien déterminée. En effet si $b' = b_1 b\, b_1^{-1}$ ($b \in B\cap\mathfrak{X}_c$, $b_1 \in B_H$), nous avons $\delta A_{b_1}(\eta_b) = \eta_{b'}$ puisque $\det(Ad(b_1)|_{\mathfrak{g}_c}) = 1$, car G_c et H_c sont des groupes unimodulaires.

Nous allons fixer une base de $\mathfrak{g}_c$ et normaliser exactement η_c et ω_c. Soit $\mathfrak{j}_c$ une sous-algèbre de Cartan de $\mathfrak{g}_c$, $\Sigma(\mathfrak{j}_c)$ l'ensemble des racines de $(\mathfrak{g}_c, \mathfrak{j}_c)$. On suppose que $\mathfrak{j}_c$ et l'ordre sur $\Sigma(\mathfrak{j}_c)$ sont tels que $\mathfrak{b} = \mathfrak{j}_c + \sum_{\alpha>0} \mathfrak{g}_c(\mathfrak{j}_c, \alpha)$ et que $\mathfrak{a}_c = \mathfrak{j}_c \cap \mathfrak{q}_c$ soit un sous-espace de Cartan de $\mathfrak{q}_c$. Soit $Y_1, \cdots, Y_k$ une base de $\mathfrak{a}_c$ ($k = \dim_c \mathfrak{a}_c$). Soit $X_1, \cdots, X_n$ une base de $\mathfrak{h}_c \cap \mathfrak{n}_c$ vérifiant les conditions de la proposition 2.4 du Chapitre I, telle que $X_1, X_2, \cdots, X_p$ soit une base de $\mathfrak{h}_c \cap \mathfrak{n}_c \cap \mathfrak{b}$. A partir des éléments $(Y_1, 0), \cdots, (Y_k, 0), (\gamma(X_1), 0), \cdots, (\gamma(X_p), 0)$ de $\mathfrak{b} \cap \mathfrak{q}$ et les éléments $(\widetilde{0, X^*_{p+1}}), \cdots, (\widetilde{0, X^*_n})$. On construit une forme η_c comme ci-dessus Et à partir des éléments $Y_1, \cdots, Y_p, \gamma(X_1), \cdots, \gamma(X_{n-p})$ de $\mathfrak{q}_c$, on définit la forme ω_c. Les formes ω_c et η_c étant normalisées comme il a été dit plus haut on a le lemme suivant.

Lemme 8.1. Pour un élément (x, hB) de E ($x = k b k^{-1}$, $b \in X \cap B$, $k \in H_c$), on a

$$\delta(pr_1)\,\omega_c = \det\left\{ Ad(a^{-1}) - Ad(\sigma(a)^{-1}) \right\}\Big|_{(\mathfrak{h}\cap\mathfrak{n}_c)/(\mathfrak{h}\cap\mathfrak{n}_c\cap\mathfrak{b})} \eta_c$$

$$(b = a\,\sigma(a)^{-1})$$

Démonstration. Pour $X \in \mathfrak{h} \cap \mathfrak{n}_c$, on a

$$d(pr_1)_{(b,eB)}(\widetilde{0, X^*}) = \left\{ Ad(a^{-1}) - Ad(\sigma(a)^{-1}) \right\} \rho(\gamma(X))_b$$

Pour $Y \in \mathfrak{b} \cap \mathfrak{q}_c$, on a alors

$$d(pr_1)_{(b,eB)}(Y, 0) = Y_b$$

D'après la normalisation des formes, l'assertion du lemme s'en déduit.

Q.E.D.

§9. Intégrabilité local de $\frac{1}{\Delta}$

Dans cet section, on se restreint sur l'espace symétrique $G \times G / G$ que satisfait Supposition A; On adopte des notation de section §2 et §3. On pense le diagramme suivant

$$\begin{array}{ccc} \tilde{\mathfrak{X}} & \subset & E \\ pr_1 \downarrow & & \downarrow pr_1 \\ \mathfrak{X} & \subset & \mathfrak{X}_c \end{array}$$

où $\tilde{\mathfrak{X}} = pr_1^{-1}(\mathfrak{X})$. $\tilde{\mathfrak{X}}$ n'est pas de variété en general. Mais il est un sous-ensemble réel analitique de E . Ensuite pr_1 est un application fini couvert sur $\mathfrak{X}'$. $\tilde{\mathfrak{X}}' = pr_1^{-1}(\mathfrak{X}')$ est alors une variété. Nous nous rappelons $\Delta(x) = |D_\ell(x)|^{1/4}$. On a un théorè suivant

Théorème 9.1. Le fonction $\frac{1}{\Delta(x)}$ est localement intégrable sur $\mathfrak{X}$.

Démonstration. Soit $\mathcal{O}$ une voisinage ouverte finite de une pointe singuliere dans $\mathfrak{X}$. Nous allons démontrer $\int_{\mathcal{O}} \frac{\omega}{\Delta(x)} < +\infty$ où ω est une m-forme differentielle G-invariante sur $\mathfrak{X}$ telle que $\omega = \omega_c|_{\mathfrak{X}}$. $\mathfrak{X}'$ a des components finis car l'ensemble des éléments singuliers a une mesure nulle. C'est assez de demontrer

$$\int_U \frac{\omega}{\Delta(x)} < +\infty \quad \text{où} \quad U = \mathcal{O} \cap \mathfrak{X}'$$

Soit

un component connexe dans $pr_1^{-1}(U)$. D'aprés Lemme 2.1, on a

$$\int_U \frac{\omega}{\Delta(x)} = \frac{1}{k}\int_{\tilde{U}} \frac{\delta(pr_1)\,\omega}{\Delta(x)}$$
$$= \frac{1}{k}\int_{\hat{U}} \frac{\Delta(x)\eta}{\Delta(x)}$$
$$= \frac{1}{k}\int_{\hat{U}} \eta < +\infty$$

où k est un nombre positif car $\tilde{U}$ est l'ensemble analytique.

Q.E.D.

Remarque. On généralise la méthode que Atiyah a utilisée pour démontrer l'intégrabilité locale des distributions propres invariantes sur le groupe de Lie semi-simple [1] . Dans la section suivante, on étudie les DSI à support singulier.

§10. DSI à support singulier

On utilise toujours les notations du §1. Pour un élément $x \in X$, on a d'après [29] ,

$$x = x_s x_u \quad (x_s, x_u \in X)$$

où x_s (resp. x_u) est un élément semi-simple (resp. unipotent) dans G. On étudie l'action de l'opération différentielle H-invariante au voisinage de x . On note $X_0 = \log x_u\ (\in \mathfrak{q})$ l'élément nilpotent de $\mathfrak{g}$ correspondant à x_u . D'après le lemme de Jacobson-Morozov, il existe des éléments H_0 de $\mathfrak{h}$ et Y_0 de $\mathfrak{q}$ tels que $[H_0, X_0] = 2X_0$, $[H_0, Y_0] = -2Y_0$ et $[X_0, Y_0] = H_0$, c'est-à-dire $\{X_0, Y_0, H_0\}$ engendre une sous-algèbre $\mathfrak{g}_0$ de $\mathfrak{g}$ isomorphe à $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{R})$.

On note $\mathfrak{z} = Z_{\mathfrak{g}}(x_0)$ le centralisateur dans $\mathfrak{g}$ de x_0. Soit C le centre de $\mathfrak{z}$ et $\mathfrak{l} = [\mathfrak{z}, \mathfrak{z}]$. On pose $\mathfrak{z}_{\mathfrak{k}} = \mathfrak{z} \cap \mathfrak{k}$, $\mathfrak{z}_{\mathfrak{q}} = \mathfrak{z} \cap \mathfrak{q}$, $\mathfrak{l}_{\mathfrak{k}} = \mathfrak{l} \cap \mathfrak{k}$, $\mathfrak{l}_{\mathfrak{q}} = \mathfrak{l} \cap \mathfrak{q}$, $\mathfrak{c}_{\mathfrak{k}} = \mathfrak{c} \cap \mathfrak{k}$ et $\mathfrak{c}_{\mathfrak{q}} = \mathfrak{c} \cap \mathfrak{q}$. $(\mathfrak{l}, \mathfrak{l}_{\mathfrak{k}})$ est alors une algèbre de Lie symétrique.

Soit $\mathfrak{a}$ un sous-espace de Cartan de $\mathfrak{q}$ contenant H_0 et $\mathfrak{c}_{\mathfrak{q}}$. Pour $\alpha \in \Sigma^+(\mathfrak{a})$, on choisit une base $X_{\alpha,1}, \cdots, X_{\alpha,m_\alpha}$ de $\mathfrak{g}_c(\mathfrak{a}:\alpha)$ $(m_\alpha = \dim \mathfrak{g}_c(\mathfrak{a}:\alpha))$ telle que $B(X_{\alpha,p}, \sigma(X_{\alpha,q})) = -\delta_{p,q}$ $(p, q = 1, \cdots, m_\alpha)$. Soit $\{H_1, \cdots, H_k\}$ une $\mathbb{C}$-base de $(\mathfrak{a} \cap \mathfrak{l})_c$ telle que $B(H_p, H_q) = \delta_{p,q}$ et $\{C_1, \cdots, C_m\}$ une $\mathbb{C}$-base de $\mathfrak{c}_{\mathfrak{q}}$ telle que $B(C_p, C_q) = \delta_{p,q}$. On identifie $\mathfrak{g}$ avec son dual par la forme de Killing. On a défini le polynôme de Casimir ω de $\mathfrak{g}$ par

$$\omega = \sum_{p=1}^{k} H_p^2 + \sum_{q=1}^{m} C_q^2 + \frac{1}{2} \sum_{\alpha \in \Sigma^+(\mathfrak{a})} \sum_{r=1}^{m_\alpha} (X_{\alpha,r} - \sigma(X_{\alpha,r}))^2$$

Soit $\omega_{\mathfrak{l}}$ (resp. ω_c) la restriction de ω à $\mathfrak{l}_{\mathfrak{q}}$ (resp. $\mathfrak{c}_{\mathfrak{q}}$) on a alors

$$\omega_{\mathfrak{l}} = \sum_{p=1}^{k} H_p^2 + \frac{1}{2} \sum_{\alpha \in \Sigma_0^+(\mathfrak{a})} \sum_{r=1}^{m_\alpha} (X_{\alpha,r} - \sigma(X_{\alpha,r}))^2 ,$$

$$\omega_c = \sum_{q=1}^{m} C_q^2$$

où $\Sigma_0^+(\mathfrak{a}) = \{ \alpha \in \Sigma^+(\mathfrak{a}) : \alpha(H_0) = 0 \}$

On pose $\Sigma_1^+(\mathfrak{a}) = \Sigma^+(\mathfrak{a}) \setminus \Sigma_0^+(\mathfrak{a})$. On note

$$V_c^{\pm} = \sum_{\alpha \in \Sigma_1^+(\mathfrak{a})} \sum_{r=1}^{m_\alpha} \mathbb{C}\,(X_{\alpha,r} \pm \sigma(X_{\alpha,r})) ,$$

$$V_{\mathfrak{k}} = V^+ \cap \mathfrak{k} , \quad V_{\mathfrak{q}} = V^- \cap \mathfrak{q}$$

Alors les décompositions $\mathfrak{z} = \mathfrak{z}_{\mathfrak{z}} + V_{\mathfrak{z}}$ et $\mathfrak{q} = \mathfrak{z}_{\mathfrak{q}} + V_{\mathfrak{q}}$ sont des sommes directes.

D'après le Lemme 1, [40] , il existe un involution de Cartan θ de $\mathfrak{l}$ commutant avec σ telle que $\theta : (H_0, X_0, Y_0) \mapsto (-H_0, -Y_0, -X_0)$ On définit une structure Euclidienne sur $\mathfrak{l}$ par la forme bilinéaire définie positive $-B(X, \theta X)$ $(X \in \mathfrak{l})$. On note $U = (\mathfrak{l}_{\mathfrak{q}})_{Y_0}$ le centralisateur de Y_0 dans $\mathfrak{l}_{\mathfrak{q}}$. On choisit une base orthogonale $u_1, \cdots, u_n$ de U telle que $u_1 = Y_0/\|Y_0\|$ et $[H_0, u_j] = -\lambda_j u_j$ $(1 \leq j \leq n = \dim U)$. Alors $\lambda_1 = 2$. Soit $(x_1, \cdots, x_n)(= x \in \mathbb{R}^n)$ les coordonnés d'un élément de U dans cette base. Et soit $e_1, \cdots, e_p$ une base de $V_{\mathfrak{z}}$ et $(t_1, \cdots, t_p)(= t \in \mathbb{R}^p)$ les coordonnés d'un élément de $V_{\mathfrak{z}}$ dans cette base . Ensuite soit $f_1, \cdots, f_q$ une base de $[\mathfrak{l}_{\mathfrak{q}}, Y_0]$ et $(s_1, \cdots, s_q)(= s \in \mathbb{R}^q)$ les coordonnés d'un élément de $[\mathfrak{l}_{\mathfrak{q}}, Y_0]$. Finalement soit $v_1, \cdots, v_m$ une base de $\mathfrak{c}_{\mathfrak{q}}$ et $(y_1, \cdots, y_m)(= y \in \mathbb{R}^m)$ les coordonnés d'un élément de $\mathfrak{c}_{\mathfrak{q}}$.

On définit l'application $\Phi(s, x)$ de $\mathbb{R}^q \times \mathbb{R}^n$ dans $\mathfrak{l}_{\mathfrak{q}}$ par

$$\Phi(s, x) = \mathrm{Ad}(e^{s_1 f_1} \cdots e^{s_q f_q})(X_0 + \sum_{j=1}^{n} x_j u_j).$$

$\Phi(s, x)$ satisfait $\Phi(0) = X_0$ et $d\Phi$ est non-singulière en 0. Ensuite on définit l'application Ψ de $\mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^q \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$ dans X par

$$\begin{aligned}
&\Psi(t, s, x, y) \\
&= e^{t_1 e_1} \cdots e^{t_p e_p} x_0 \exp\Big(\sum_{j=1}^{m} y_j v_j + \mathrm{Ad}(e^{s_1 f_1} \cdots e^{s_q f_q})(X_0 + \sum_{j=1}^{n} x_j u_j)\Big) e^{-t_p e_p} \cdots e^{-t_1 e_1} \\
&= e^{t_1 e_1} \cdots e^{t_p e_p} x_0 \exp\Big(\sum_{j=1}^{m} y_j v_j + \Phi(s, x)\Big) e^{-t_p e_p} \cdots e^{-t_1 e_1} .
\end{aligned}$$

On a alors $\Psi(0)=x$ et Ψ induit un difféomorphisme entre un voisinage ouvert de l'origine dans $\mathbb{R}^{p+q+n+m}$ et celui de x dans X. On prend des sous-ensembles ouverts E_0, F_0, U_0 et V_0 de $\mathbb{R}^p$, $\mathbb{R}^q$, $\mathbb{R}^n$ et $\mathbb{R}^m$ contenant l'origine respectivement tels que $\Psi|_{E_0\times F_0\times U_0\times V_0}$ est un difféomorphisme. On pose $\Gamma_0=E_0\times F_0\times U_0\times V_0$ et $\Omega_0=\Psi(\Gamma_0)$.

Soit da une mesure Euclidean sur Γ_0 et dx une mesure G-invariante sur X.

Lemme 10.1. Pour un élément $\beta\in C_c^\infty(\Gamma_0)$, il existe un unique élément $f_\beta\in C_c^\infty(\Omega_0)$ tel que

$$\int_{\Gamma_0} G(\Psi(a))\,\beta(a)\,da=\int_X G(x)\,f_\beta(x)\,dx$$

pour tout $G\in C_c^\infty(\Omega_0)$. L'application de $C_c^\infty(\Gamma_0)$ dans $C_c^\infty(\Omega_0)$ donné par $\beta\longmapsto f_\beta$ est continue et surjective et supp $f_\beta\subset\Psi(\operatorname{supp}\beta)$.

Démonstration. Elle est analogue à cell du lemme 13 [13].

Q.E.D.

Proposition 10.2. Supposons E_0 et F_0 connexes. Si T une distribution H-invariante localement sur Ω_0, il existe une distribution σ_T sur $U_0\times V_0$ telle que

$$T(f_\beta)=\sigma_T(\alpha_\beta)\qquad(\beta\in C_c^\infty(\Gamma_0))$$

où α_β est une fonction dans $C_c^\infty(U_0 \times V_0)$ donnée par

$$\alpha_\beta(x,y) = \int_{E_0 \times F_0} \alpha(t,s,x,y)\, dt\, ds$$

Démonstration. Elle est analogue à celle du Théorème 2 [13].

Q.E.D

Un élément nilpotent $X_0 \in \mathfrak{l}_q$ est dit $\mathfrak{l}_q$-distingué s'il satisfait $(\mathfrak{l}_q)_{X_0} \cap (\mathfrak{l}_q)_{Y_0} = 0$ (cf. p103 [36], [40]). On note $\Delta(\omega_\ell)$ la partie radiale de ω_ℓ en X_0 concernant ($E_0 \times U_0$, $\{0\} \times U_0$)(cf. Définition §2, [40]). La proposition suivante que van Dijk et Sekiguchi ont donnée est la généralisation d'un résultat de Atiyah pour l'algèbre de Lie semi-simple (cf. [1], p104 [36] , [40]).

Proposition 10.3. Soit T une distribution sphérique invariante sur Ω_0 avec un caractère infinitésimal χ . Alors la distribution σ_T induit par T sur $U_0 \times V_0$ qui est donnée par la Proposition 10.2 satisfait l'équation différentielle

$$(1) \qquad (\Delta(\omega_\ell) + \omega_c - \zeta(x,y) - \chi(\omega))\, \sigma_T = 0$$

où $\zeta(x,y)$ est une fonction analytique sur $U_0 \times V_0$ induit par (5,2,3) [36]. Si X_0 est un élément nilpotent distingué, $\Delta(\omega_\ell)$ est déterminé par

$$(2) \qquad \begin{aligned} \|X_0\|\, \Delta(\omega_\ell) = {} & 2x_1 \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \dim(\mathfrak{l}_q) \frac{\partial}{\partial x_1} + \sum_{j=2}^{n} (\lambda_j + 2)\, x_j \frac{\partial^2}{\partial x_1 \partial x_j} \\ & + \sum_{1 \le i < j \le n} a_{ij} \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{j=2}^{n} a_j(x) \frac{\partial}{\partial x_j} \end{aligned}$$

où $a_{ij}(x)$ et $a_i(x)$ sont des fonctions analytiques sur U_0 satisfaisant $a_{ij}(0)=0 \quad (1\le i, j\le n)$.

On se restreint à l'espace symétrique G×G/G. On utilise les notations de §6.

Proposition 10.4. Soit T une distribution shpérique invariante sur $\mathfrak{X}$ à support singulière, c'est-à-dire $\operatorname{supp} T \subset \mathfrak{X}-\mathfrak{X}'$. Elle est alors identiquement nulle sur tout l'espace $\mathfrak{X}$.

Démonstration. Par hypothèse, σ_T satisfait l'équation différentielle (1) de la Proposition 10.3 et $\operatorname{supp} \sigma_T \subset \{0\}\times U_0$. Si X_0 n'est pas $\mathfrak{l}_q$-distingué, la partie homogène de degré 2 de $\Delta(\omega_\ell)$ en $u=0$ n'est pas nulle (cf. Lemme 4.6 [36]). D'après la Proposition 2.2 [36], on a $\sigma_T = 0$. Si X_0 est un élément nilpotent distingué, σ_T satisfait l'équation differentielle, (2) de la Proposition 10.3 Soit S est une distribution sur U_0. On étend S à $U_0\times U_0$ en posant $(\bar S,\psi)=(S,\bar\psi)$ où $\bar\psi(y)=\psi(0,y)$ ($\psi\in C_c^\infty(U_0\times U_0)$). D'après un théorème 36 (cf. §3 [35]), on a $\sigma_T=\sum_\alpha C_\alpha \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x^\alpha}\bar S \quad (\alpha=(\alpha_1,\dots,\alpha_n))$. Pour l'équation différentielle $(\Delta(\omega_\ell)+\omega_c)\sigma_T = (\zeta+\chi(\omega))\sigma_T$ où χ est un caractère infinitésimal de T . On compare le degré de chaque côté :

$$\Delta(\omega_\ell)\frac{\partial^\alpha}{\partial x^\alpha}\bar S = \{\dim(\mathfrak{l}_q) - 2(\lambda_1+2) - \sum_{j=2}^{n}(k_j+2)(\lambda_j+1)\}\frac{\partial^{|\alpha'|}}{\partial x^{\alpha'}}\bar S$$

+ le degré plus bas

où $\alpha'=(\alpha_1+1,\alpha_2,\dots,\alpha_n)$. On pointe le coefficient de $\frac{\partial^{|\alpha'|}}{\partial x^{\alpha'}}\bar S$. $\mathfrak{l}_q$ est somme directe de λ $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{R})$-module irréductible de poids dominant

$\mathfrak{q} = \mathfrak{k}_1, \mathfrak{k}_2, \cdots \mathfrak{k}_n$ alors $\dim \mathfrak{l}_{\mathfrak{q}} = \sum_{j=1}^{n} (k_j+1)$. Ce coéfficient est donc égal à $-2\lambda_1 - \sum_{j=1}^{n} (k_j+2)\lambda_j - n < 0$. Comme le degré du côté gauche est strictement supérieur au degré du côté droit, on a une contradiction. Par conséquent $T = 0$.

Q.E.D.

<u>Théorème 10.5.</u> Soit Θ une distribution sphérique invariante sur $\mathfrak{X}$. La restriction de Θ à $\mathfrak{X}'$ est une fonction analytique. Θ est localement intégrable sur $\mathfrak{X}$.

<u>Démonstration.</u> Pour un élément $x \in \mathfrak{X}'$, soit $\mathfrak{a}$ le centralisateur de x dans $\mathfrak{q}$ et A le sous espace de Cartan de $\mathfrak{X}$ correspondant à $\mathfrak{a}$. On pose $\mathfrak{X}'_A = \bigcup_{g \in G} g A' g^{-1}$. Soit $\widetilde{\Theta}$ la restriction à $\mathfrak{X}'$ de Θ . D'après le Théorème 7.1, on a

$$\chi(D)[\Delta\widetilde{\Theta}] = \gamma(D)[\Delta\widetilde{\Theta}] \qquad (D \in \mathbb{D}(\mathfrak{X}))$$

Soit $H_1, \cdots, H_n$ une base de $\mathfrak{a}$. Posons $\Omega = \sum_{j=1}^{n} H_j^2 \in S(\mathfrak{a})$. On choisit $c_j \in \mathbb{C}$ tel que $\Box = \Omega^m + \sum_{j=1}^{m} c_j \Omega^{m-j} \in I(\mathfrak{a})$. Evidemment, $\Box$ est un opérateur différentiel elliptique analytique. $\Delta\widetilde{\Theta}$ coincide, du sens des distributions avec une fonction analytique sur $\mathfrak{X}'_A$ car $(\Box - \chi(\gamma^{-1}(\Box)))[\Delta\widetilde{\Theta}] = 0$. Il existe alors une fonction analytique F tel que $F = \Theta$ sur $\mathfrak{X}'$. D'après la Proposition 7.2, F est donné par la forme f/Δ où f est une fonction bornée localement. Alors F est une fonction localement intégrable car $1/\Delta$ est localement intégrable d'après le Théorème 9.1.

Maintenant Θ est donnée par $\Theta = F + S$ où S est distribution sphérique invariante sur $\mathfrak{X}$ à support singulier, c'est-à-dire supp $S \subset \mathfrak{X} \setminus \mathfrak{X}'$. D'après la Proposition 10.4, $S = 0$.

Q.E.D.

§11. Caractérisation des DSI sur G×G/G.

On utilise les notations dans §6. Soit $\mathfrak{a}$ un sous-espace de Cartan de $\mathfrak{g}$ et $A_{\mathfrak{a}} = Z_X(\mathfrak{a})$. Si $\mathfrak{a}_c$ est la sous-algèbre de Cartan de $\mathfrak{g}_c$ qui contient $\mathfrak{a}$ et $(A_{\mathfrak{a}})_c$ le sous-groupe de Cartan de G_c correspondant à $\mathfrak{a}_c$, alors $(A_{\mathfrak{a}})_c$ contient $A_{\mathfrak{a}}$. Soit $\Sigma^+(\mathfrak{a})$ l'ensemble des racines positives de $(\mathfrak{g}_c, \mathfrak{a}_c)$, $S_R^{\mathfrak{a}}$ l'ensemble des racines réelles singulières positives et $S_I^{\mathfrak{a}}$ l'ensemble des racines imaginaires singulières positives. Et posons $S^{\mathfrak{a}} = S_R^{\mathfrak{a}} \cup S_I^{\mathfrak{a}}$. Maintenant supposons que G est acceptable. Alors pour $\rho = \frac{1}{2} \sum_{\alpha \in \Sigma^+(\mathfrak{a})} \alpha$, on peut définir un homomorphisme ξ_ρ de $(A_{\mathfrak{a}})_c$ dans $\mathbb{C}^* \setminus \{0\}$ par $\xi_\rho(\exp X) = e^{\rho(X)}$ $(X \in \mathfrak{a}_c)$. On peut vérifier qu'alors la forme linéaire $\rho_I = \frac{1}{2} \sum_{\alpha \in S_I^{\mathfrak{a}}} \alpha$ se remonte aussi en un homomorphisme ξ_{ρ_I} de $(A_{\mathfrak{a}})_c$ dans $\mathbb{C}^*$ (on utilise la remarque qui suit la définition 4.1 du Chapitre

On pose pour $a \in A_{\mathfrak{a}}$

$$'\Delta^{\mathfrak{a}}(a) = \prod_{\alpha \in \Sigma^+(\mathfrak{a})} (1 - \xi_\alpha(a)^{-1}), \qquad \Delta^{\mathfrak{a}}(a) = \xi_\rho(a)\, '\Delta^{\mathfrak{a}}(a),$$

$$'\Delta_R^{\mathfrak{a}}(a) = \prod_{\alpha \in S_R^{\mathfrak{a}}} (1 - \xi_\alpha(a)^{-1}), \qquad \varepsilon_R^{\mathfrak{a}}(a) = \operatorname{sgn}\left('\Delta_R^{\mathfrak{a}}(a)\right),$$

$$'\Delta_I^{\mathfrak{a}}(a) = \prod_{\alpha \in S_I^{\mathfrak{a}}} (1 - \xi_\alpha(a)^{-1}), \qquad \varepsilon_I^{\mathfrak{a}}(a) = \operatorname{sgn} \operatorname{Re}\left((\sqrt{-1})^{-n(I)} \xi_{\rho_I}(a)\, '\Delta_I^{\mathfrak{a}}(a)\right)$$

$$(n(I) = \# S_I^{\mathfrak{a}})$$

On remplace F par R (resp. I) si X est du cas I (resp. du cas II), et on a donc les notations $S_F^{\mathfrak{a}}$, $'\Delta_F^{\mathfrak{a}}$ et $\varepsilon_F^{\mathfrak{a}}$. Pour une racine $\alpha \in \Sigma(\mathfrak{a})$, on choisit $H_\alpha \in \mathfrak{a}^\alpha = \sqrt{-1}(\mathfrak{a} \cap \mathfrak{k}) \cap (\mathfrak{a} \cap \mathfrak{p})$ tel que $B(H_\alpha, H) = \alpha(H)$ pour tout $H \in \mathfrak{a}$, on définit H'_α par $H'_\alpha = \frac{2}{|\alpha|^2} H_\alpha$. Soit $A'_{\mathfrak{a}}(F) = \{a \in A_{\mathfrak{a}} : \Delta_F(a)$ et $W(A_{\mathfrak{a}}) = N_G(A_{\mathfrak{a}}) / Z_G(A_{\mathfrak{a}})$. Définissons la fonction localement constante

$\varepsilon^F(w:a)$ sur A'_{σ} par $(\varepsilon_F^{\sigma}\Delta^{\sigma})(wa) = \varepsilon^F(w:a)\,(\varepsilon_F^{\sigma}\Delta^{\sigma})(a)$ $(w \in W(A_{\sigma}), a \in A'_{\sigma})$

Soit $\sigma_1, \ldots, \sigma_n$ un ensemble maximal de sous-espaces de Cartan θ -invariant non G-conjugués de q , fixons un ordre pour les racines de $(g_{\mathbb{C}}, \sigma_{j\mathbb{C}})$ et posons $A_j = Z_K(\sigma_j)$ où on écrit j au lieu de σ_j .

Si Θ est une distributions sphérique invariante sur X , alors la restriction de Θ à X' (notée $\widetilde{\Theta}$) est une fonction analytique. On lui associe la famille des fonctions $(K_j)_{j=1,\ldots,n}$ définies sur par

(1) $$K_j(a) = (\varepsilon_F^j \Delta^j)(a)\,\widetilde{\Theta}(a) \quad \text{pour} \quad a \in A'_j$$

Ces fonctions sont ε^F-symétriques, c'est-à-dire,

(2) $$K_j(wa) = \varepsilon^F(w:a)\,K_j(a) \quad \text{pour} \quad w \in W(A_j),\ a \in A'_j$$

Réciproquement, si on se donne une famille de fonctions analytiques sur A'_j et ε^F-symétriques, on peut leur associer une fonction $\widetilde{\Theta}$, G -invariante et analytique sur X' par

(3) $$\widetilde{\Theta}(gag^{-1}) = [(\varepsilon_F^j \Delta^j)(a)]^{-1} K_j(a) , \quad a \in A'_j ,\ g \in G .$$

Le théorème ci-dessous caractérise les fonctions K_j pour lesquelles l'expression

(4) $$(\Theta, f) = \int_{X'} \widetilde{\Theta}(x) f(x)\, dx \quad \text{où} \quad f \in C_c^{\infty}(X)$$

définit une distribution sphérique invariante sur

<u>Théorème 11.1.</u> La fonction G-invariante $\widetilde{\Theta}$ sur X' associée par (3) à la famille $(K_j)_{j=1,\cdots,n}$ définit une distribution sphérique Θ sur X' par (4) si et seulement si les fonctions vérifient les conditions suivantes :

(a-1) Il existe un homomorphisme χ de $\mathbb{D}(X)$ dans $\mathbb{C}$ tel que :

$$D K_j = \lambda_j(D) K_j \qquad \text{pour } D \in I(\mathfrak{a}_j) \quad , \text{ où } \lambda_j = \chi \cdot (\gamma^j)^{-1}$$

(a-2) Chaque K_j peut être prolongée analytiquement de A'_j à $A'_j(F$

(a-3) Pour tout $j \in \{1,\cdots,n\}$ et $\alpha \in S^j_R$, posons $\mathfrak{a} = \mathfrak{a}_j$. Soit $\mathfrak{b}$ le sous-espace de Cartan de β une racine imaginaire singulière de $\Sigma(\mathfrak{b})$ obtenu à l'aide de $\mathfrak{a}$, d'une racine réelle singulière α dans $\mathfrak{g}$ (cf. Définition 1.4). Prenons l'ordre des racines de $\mathfrak{b}$ pour qui satisfait à $P^{\mathfrak{b}} = \nu \cdot P^{\mathfrak{a}}$. Définissons $K^{\mathfrak{b}}$ à partir de $\widetilde{\Theta}$ tel que

$$K^{\mathfrak{b}}(a) = (\varepsilon_F^{\mathfrak{b}} \Delta^{\mathfrak{b}})(a)\, \widetilde{\Theta}(a) \qquad (a \in A'_{\mathfrak{b}})$$

Alors

$$H'_\alpha(\varepsilon_F^{\mathfrak{a}} K^{\mathfrak{a}})(a_0) = H'_\beta(\varepsilon_F^{\mathfrak{a}} K^{\mathfrak{b}})(a_0) \quad \left(\begin{array}{l} a_0 \in A_{\mathfrak{a}} \cap A_{\mathfrak{b}} \\ \prod_{\gamma \in \Sigma[\alpha, \nu \alpha]} (1-\xi_\gamma(a_0^{-1})) \neq 0 \end{array} \right)$$

où chaque côté dénote la valeur limite à a_0 qui existe sous les conditions (4), (a-1) et (a-2).

<u>Démonstration.</u> Soit $\widetilde{\Theta}$ la restriction de Θ à $\mathfrak{X}'$. Alors d'après le Théorème 10.5, $\widetilde{\Theta}$ est une fonction analytique localement intégrable. On pose $\kappa_j(a) = (\varepsilon_F^j \Delta^j)\, \widetilde{\Theta}(a)$ $(a \in A_j')$. Pour un élément f de $C_c^\infty(\mathfrak{X})$, on définit une intégrale orbitale K_f^j sur A_j' par

$$K_f^j(a) = \varepsilon_F^j(a)\, \overline{\Delta^j(a)} \int_{G/Z_G(A_j)} f(gag^{-1})\, d_j\bar{g}$$

D'après la formule de Weyl (Proposition 2.1), on a

$$\begin{aligned}(\Theta, f) &= \int_{\mathfrak{X}'} f(x)\, \widetilde{\Theta}(x)\, dx \\ &= \sum_{j=1}^{n} c_j \int_{A_j'} K_f^j(a)\, \kappa_j(a)\, da\end{aligned}$$

où les c_j sont des nombres positifs. Dans le cas où $\mathfrak{X} = G$, Hirai a démontré le théorème (cf. [19]). Supposons donc que $\mathfrak{X} \simeq G_c/G$. Les changements de signe de $\varepsilon_I \Delta$ ont lieu sur un réseau, alors que les changements de signe de $\varepsilon_R \Delta$ ont lieu sur les murs des chambres de Weyl. La situation étant ici, pour cela, différente de celle du groupe, il faut modifier la démonstration. On définit une intégrale orbitale ψ_R ($R \in C_c^\infty(\mathfrak{g})$) sur σ par

$$\psi_R^\sigma(X) = \delta_I^\sigma(X)\, \pi^\sigma(X) \int_{G/Z_G(\sigma)} R(\mathrm{Ad}(g)X)\, d_\sigma\bar{g}$$

où $\pi^\sigma(X) = \prod_{\alpha \in \Sigma^+(\sigma)} \alpha(X)$ et $\delta_I^\sigma(X) = \mathrm{sgn}\big((\sqrt{-1})^{-n(I)} \prod_{\alpha \in S_I^\sigma} \alpha(X)\big)$

On peut obtenir une relation entre les limites de K_f^{σ} et $\psi_{R_f}^{\sigma}$ en un point semi-régulier (même raisonnement que le lemme 4.3 de [32]). La fonction ψ_R a essentiellement le même comportement au voisinage d'un point singulier que l'intégrale orbitale définie par Harish-Chandra pour une algèbre de Lie semi-simple. On en déduit que ψ_R^{σ} et ψ_R^{τ} vérifient le théorème 30 ,p51 [41] . Par consequent, K_f^{σ} et K_f^{τ} vérifient les relations de sauts données par le théorème 11, p396 [41] . A l'aide de ces relations de saut, on peut démontrer la même formule que celle du Lemme 6.4, [19] . Le théorème se démontre alors par un raisonnement analoque à celui du §9, [19] .

Q.E.D.

Appendice : Un système complet de DSI linéairement indépendantes. Considerons l'espace symétrique $\mathfrak{X} \simeq GL(3,\mathbb{C})/U(2,1)$. Bien que l'algèbre de Lie $\mathfrak{g} = \mathfrak{gl}(3,\mathbb{C})$ soit réductive, on peut aussi appliquer le théorème 11.1 pour obtenir les distributions sphériques (invariantes) sur $\mathfrak{X}$ ([4]). Nous allons, dans ce paragraphe, donner une base de $\mathcal{D}'_{\Lambda}(\mathfrak{X})$ (cf. §3 pour la définition) pour tout caractère infinitésimal Λ de $\mathbb{D}(\mathfrak{X})$. C'est parce que les formules sont plus agréables à écrire pour $GL(3,\mathbb{C})/U(2,1)$ que pour $SL(3,\mathbb{C})/SU(2,1)$ que nous avons choisi de traiter cet exemple.

Soit σ l'involution définie sur $G = GL(3,\mathbb{C})$ par

$$\sigma(g) = J(g^*)^{-1}J \qquad \text{où} \quad g^* = {}^t\bar{g} \quad \text{et} \quad J = \begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&-1\end{pmatrix}.$$

Le sous-groupe des points fixes de G fixés par σ est le groupe $H = \mathcal{U}(2,1)$ qui est connexe. On réalise l'espace symétrique G/H dans $\mathcal{X} = \{ g\sigma(g)^{-1} ; g \in G \}$. On vérifie que

$$\mathcal{X} = \{ x \in GL(3,\mathbb{C}) ; \ Jx \text{ est hermitienne de signature } (2,1) \}$$

Il y a deux classes de conjugaison de sous-espaces de Cartan de $(\mathfrak{g}, \mathfrak{h}) = (\mathfrak{gl}(3,\mathbb{C}), \mathfrak{u}(2,1))$. On choisit pour représentants

$$\mathfrak{a}^0 = \left\{ \begin{pmatrix} t_1 & 0 & 0 \\ 0 & t_2 & 0 \\ 0 & 0 & t_3 \end{pmatrix} : t_j \in \mathbb{R} \right\}$$

$$\mathfrak{a}^1 = \left\{ \begin{pmatrix} t & 0 & \theta \\ 0 & u & 0 \\ -\theta & 0 & t \end{pmatrix} : t, u, \theta \in \mathbb{R} \right\}$$

Soit A^0 et A^1 des sous-espace de Cartan global de $\mathcal{X}$ correspond à $\mathfrak{a}^0$ et $\mathfrak{a}^1$ respectivement donné par

$$A^0 = \left\{ \begin{pmatrix} \varepsilon_1 e^{t_1} & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_2 e^{t_2} & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_3 e^{t_3} \end{pmatrix} \in \mathcal{X} : t_j \in \mathbb{R} \quad \begin{array}{l} \text{soit } \varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \varepsilon_3 = 1 \\ \text{soit } \varepsilon_1 = \varepsilon_3 = -1, \ \varepsilon_2 = 1 \\ \text{soit } \varepsilon_2 = \varepsilon_3 = -1, \ \varepsilon_1 = 1 \end{array} \right\}$$

$$A^1 = \left\{ \begin{pmatrix} x & 0 & y \\ 0 & v & 0 \\ -y & 0 & x \end{pmatrix} \in \mathcal{X} : v(x^2 + y^2) > 0 \right\}$$

L'espace A^0 est composé de trois composantes connexes : $A^\circ_\circ$: $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \varepsilon_3 = 1$,

A°_1 : $\varepsilon_1 = \varepsilon_3 = -1$, $\varepsilon_2 = 1$; A°_2 : $\varepsilon_2 = \varepsilon_3 = -1$, $\varepsilon_1 = 1$.

Le groupe de Weyl associé est donné :

$$W^\circ = N_H(A^\circ)/Z_H(A^\circ) = \{I, w_\circ\}$$ où $w_\circ$ échange $\varepsilon_1 e^{t_1}$ et $\varepsilon_2 e^{t_2}$

$$W' = N_H(A')/Z_H(A') = \{I, w_\circ\}$$ où w_1 échange y et $(-y)$

La fonction Φ invariante par H associée à un couple $(\varphi^\circ, \varphi^1)$ definit une distribution spherique sur $X \cong GL(3,\mathbb{C})/U(2,1)$. Si et seulemet si elle vérifie les propriétés de Théorème II.1 .

Soit $\Lambda \in \mathbb{C}^3$. On appelle $\mathcal{D}'_\Lambda(X)$ l'espace vectoriel des distributions sphériques déterminées par le couple $(\varphi^\circ, \varphi')$ où

$$\partial(P, j)\, \varphi^j = P(\Lambda)\, \varphi^j$$ pour tout polynôme symétrique l

On veut déterminer la dimension de $\mathcal{D}'_\Lambda(X)$ suivant les valeurs de

Comme $w_\circ$ permute les éléments de A°_1 et ceux de A°_2 il suffi déterminer φ° sur $A^\circ_\circ$ et A°_1 avec pour seule condition

(i') $\varphi^\circ_\circ(w_\circ a) = -\varphi^\circ_\circ(a)$ car $w_\circ$ stabilise $A^\circ_\circ$

On introduit les notations suivantes:

pour $T = (t_1, t_2, t_3)$, $\varphi^\circ(T) = \varphi^\circ_\circ\left(\begin{pmatrix} e^{t_1} & 0 & 0 \\ 0 & e^{t_2} & 0 \\ 0 & 0 & e^{t_3} \end{pmatrix}\right)$

$$\varphi_1^\circ(T) = \varphi_1^\circ\left(\begin{pmatrix} -e^{t_1} & 0 & 0 \\ 0 & e^{t_2} & 0 \\ 0 & 0 & -e^{t_3} \end{pmatrix}\right),$$

Pour $\Theta = (t+i\theta, u, t-i\theta)$
$(u=-2t)$

$$\varphi^1(\Theta) = \varphi^1\left(\exp\begin{pmatrix} t & 0 & \theta \\ 0 & u & 0 \\ -\theta & 0 & t \end{pmatrix}\right)$$

La condition (i) s'ecrit pour φ^1 : $\varphi^1(w_1\Theta) = \varphi^1(\Theta)$
Il suffit donc de déterminer φ^1 pour $0<\theta<\pi$. Pour déterminer $\mathcal{D}'_\Lambda(X)$ il est équivalent de déterminer les triplets de fonctions φ°, φ_1° et φ^1 telles ques

(i)' $\varphi^\circ(w_0 T) = -\varphi^\circ(T)$ où $w_0(t_1,t_2,t_3) = (t_2,t_1,t_3)$

(ii) φ° et $\varphi_1^\circ \in C^\infty(\mathbb{R}^2)$, $\varphi^1 \in C^\infty(\mathbb{R}\times(0,\pi))$

(iii) Pour tout plynome P symétrique

$$P\left(\frac{\partial}{\partial t_1}, \frac{\partial}{\partial t_2}, \frac{\partial}{\partial t_3}\right)\varphi_k^\circ = P(\Lambda)\varphi_k^\circ \qquad (k=0,1)$$

$$P^\circ\left(\frac{\partial}{\partial t}, \frac{\partial}{\partial u}, \frac{\partial}{\partial \theta}\right)\varphi^1 = P(\Lambda)\varphi^1$$

où P° est écrit dans la base $x=\begin{pmatrix} 1&0&0\\0&0&0\\0&0&1\end{pmatrix}$, $y=\begin{pmatrix} 0&0&0\\0&1&0\\0&0&0\end{pmatrix}$, $z=\begin{pmatrix} 0&0&1\\0&0&0\\-1&0&0\end{pmatrix}$

(iv)

$$\left(\frac{d}{dt_1}-\frac{d}{dt_3}\right)\varphi^\circ(t,u,t) = i\frac{d}{d\theta}\varphi^1(\Theta)\Big|_{\theta\downarrow 0} \qquad (\mathrm{I})$$

$$\left(\frac{d}{dt_1}-\frac{d}{dt_3}\right)\varphi_1^\circ(t,u,t) = i\frac{d}{d\theta}\varphi^1(\Theta)\Big|_{\theta\uparrow \pi} \qquad (\mathrm{II})$$

On va appeler :

$\mathcal{F}_\Lambda$ l'espace vectoriel des triplets verifiant (ii) et (iii)

$\mathcal{E}_\Lambda$ l'espace vectoriel des triplets verifiant (ii), (iii) et (iv)

Alors $\mathcal{D}'_\Lambda($ est le sous-espace $\mathcal{L}_\Lambda$ des triplets de $\mathcal{E}_\Lambda$ verifiant (i').

(A) Cas où Λ est régulier $\lambda_1 \neq \lambda_2 \neq \lambda_3$

a) $\dim \mathcal{F}_\Lambda = 18$

On utilise un résultat classique (cf. Varadarajan p.61 [41]) pour montrer que

$$\begin{cases} \varphi_0^\circ(T) = \sum_{\sigma\in S_3} A_\sigma e^{\langle\sigma\Lambda, T\rangle} + A'_\sigma e^{\langle\sigma\Lambda, w_1 T\rangle}, \\ \varphi_1^\circ(T) = \sum_{\sigma\in S_3} \lambda_\sigma e^{\langle\sigma\Lambda, T\rangle} + \lambda'_\sigma e^{\langle\sigma\Lambda, w_1 T\rangle}, \\ \varphi'(T) = \sum_{\sigma\in S_3} \alpha_\sigma e^{\langle\sigma\Lambda, T\rangle} + \alpha'_\sigma e^{\langle\sigma\Lambda, w_1 \Theta\rangle} \end{cases}$$

On introduit w_1 pour simplifiée l'écriture des conditions de saut.

b) Ecriture des conditions de sauts :

$$(\mathrm{I}) \Leftrightarrow \quad A_\sigma - A'_\sigma = -(\alpha_\sigma - \alpha'_\sigma) \quad \text{pour tout } \sigma \in S_3$$

$$(\mathrm{II}) \Leftrightarrow \quad \mathcal{A}_\sigma - \mathcal{A}'_\sigma = -\left(\alpha_\sigma e^{\langle \sigma\Lambda, \xi_\pi \rangle} - \alpha'_\sigma e^{-\langle \sigma\Lambda, \xi_\pi \rangle}\right)$$

pour tout $\sigma \in S_3$

où $\xi_\pi = (-i\pi, 0, -i\pi)$

On peut fixer arbitrairement les constantes (pour $\sigma \in S_3$)

$$A_\sigma + A'_\sigma, \quad \mathcal{A}_\sigma + \mathcal{A}'_\sigma, \quad \alpha_\sigma, \quad \alpha'_\sigma$$

d'où $\dim \mathcal{E}_\Lambda = 12$

Pour étudier la condition d'invariance par w_0 , il faut exhiber une base de $\mathcal{E}_\Lambda$.

Solutions nulles sur A' ($\alpha_\sigma = \alpha'_\sigma = 0$)

$$A_\Lambda \begin{cases} e^{\langle \Lambda, T \rangle} + e^{\langle \Lambda, w_\circ T \rangle} \\ 0 \\ 0 \end{cases} \qquad B_\Lambda \begin{cases} 0 \\ e^{\langle \Lambda, T \rangle} + e^{\langle \Lambda, w_\circ T \rangle} \\ 0 \end{cases}$$

$\{ A_{\sigma\Lambda}, B_{\sigma\Lambda} : \sigma \in S_3 \}$ sont des éléments indépendants de

Solutions non nulles sur A' (en prenant $A_\sigma + A'_\sigma = 0$ et $\mathcal{A}_\sigma + \mathcal{A}'_\sigma = 0$ elles sont indépendantes des précédentes)

Posons
$$\begin{cases} \alpha - \alpha' = \beta \\ \alpha e^{\langle \Lambda, \xi_\pi \rangle} - \alpha' e^{-\langle \Lambda, \xi_\pi \rangle} = \beta' \end{cases}$$

1^{er} cas $\quad e^{\langle \Lambda, \xi_\pi \rangle} \neq e^{-\langle \Lambda, \xi_\pi \rangle} \Leftrightarrow \lambda_1 - \lambda_3 \notin \mathbb{Z}$

En prenant $\beta = -2,\ \beta' = 0$:

$$C_\Lambda = \begin{cases} e^{\langle \Lambda, T\rangle} - e^{\langle \Lambda, w_1 T\rangle} \\ 0 \\ 2\ \dfrac{e^{\langle \Lambda, \Theta - \xi\pi\rangle} + e^{\langle \Lambda, w_1(\Theta - \xi\pi)\rangle}}{e^{\langle \Lambda, \xi\pi\rangle} - e^{-\langle \Lambda, \xi\pi\rangle}} \end{cases}$$

En prenant $\beta = 0,\ \beta' = -2$

$$D_\Lambda = \begin{cases} 0 \\ e^{\langle \Lambda, T\rangle} - e^{\langle \Lambda, w_1 T\rangle} \\ -2\ \dfrac{e^{\langle \Lambda, \Theta\rangle} - e^{\langle \Lambda, w_1 \Theta\rangle}}{e^{\langle \Lambda, \xi\pi\rangle} - e^{-\langle \Lambda, \xi\pi\rangle}} \end{cases}$$

$2°$ cas $\quad e^{\langle \Lambda, \xi\pi\rangle} = e^{-\langle \Lambda, \xi\pi\rangle} \Leftrightarrow \lambda_1 - \lambda_3 \in \mathbb{Z}^*$. Posons $m = \lambda_1 - \lambda_3$.

Les conditions de saut s'écrirent

$$A - A' = -(\alpha - \alpha') = (-1)^m (\mathcal{A} - \mathcal{A}')$$

En prenant $\alpha + \alpha' = 2,\ \beta = 0$

$$E_\Lambda = \begin{cases} 0 \\ 0 \\ e^{\langle \Lambda, \Theta\rangle} + e^{\langle \Lambda, w_1 \Theta\rangle} = e^{\langle \Lambda, \Theta + w_1\Theta\rangle} \cos m\theta \end{cases}$$

$\alpha + \alpha' = 2,\ \beta = -2$

$$F_\Lambda = \begin{cases} e^{\langle \Lambda, T\rangle} - e^{\langle \Lambda, w_1 T\rangle} \\ (-1)^m \{ e^{\langle \Lambda, T\rangle} - e^{\langle \Lambda, w_1 T\rangle} \} \\ -\{ e^{\langle \Lambda, \Theta\rangle} - e^{\langle \Lambda, w_1 \Theta\rangle} \} \end{cases}$$

On en déduit une base $\mathcal{E}_\Lambda$ dans les fifférents cas.

et $\dim \xi_\Lambda = 12$

cas 1. $\lambda_i - \lambda_j \notin \mathbb{Z}$

Base : $\{ A_{\sigma\Lambda} , B_{\sigma\Lambda} , C_{\sigma\Lambda} , D_{\sigma\Lambda} ; \sigma \in A_3 \}$

cas 2. $\lambda_1 - \lambda_3 \in \mathbb{Z}^*$ $\lambda_1 - \lambda_2 \notin \mathbb{Z}$

Base : $\left\{ \begin{array}{lll} A_{\sigma\Lambda} , & B_{\sigma\Lambda} & \text{pour } \sigma \in S_3 \\ E_\Lambda , & F_\Lambda & \\ C_{\sigma\Lambda} , & D_{\sigma\Lambda} & \text{pour } \sigma \in S_3 \setminus \{Id\} \end{array} \right.$

cas 3. $\lambda_i - \lambda_j \in \mathbb{Z}^*$

Base $\{ A_{\sigma\Lambda} , B_{\sigma\Lambda} , E_{\sigma\Lambda} , F_{\sigma\Lambda} ; \sigma \in S_3 \}$

c) Condition d'invariance (i')

On veut déterminer le sous-espace vectoriel des éléments le ξ_Λ verifiant la condition (i'). Pour cela il suffit le regarder la composante definie sur $\mathring{A}_0$. Il est clair que $B_{\sigma\Lambda}$, $D_{\sigma\Lambda}$, $E_{\sigma\Lambda}$ apparitiennent à $\mathcal{I}_\Lambda$. D'autre part F_Λ t C_Λ ayant la même composante sur $\mathring{A}_0$, il est inutile e distinguer les 3 cas ci-dessus. L'élément $\sum_{\sigma \in S_3} x_\sigma A_{\sigma\Lambda} + y_\sigma C_{\sigma\Lambda}$ erifie (i) si et seulement si pour tout $\sigma \in S_3$ on a :

$$x_\sigma + y_\sigma = - x_{w, w_0 \sigma} + y_{w, w_0 \sigma}$$

L'espace $\mathcal{L}_\Lambda$ est donc de dimension

$$\dim \mathcal{D}'_\Lambda(\mathbb{X}) = 9$$

et il a pour base

$$\{ B_{\sigma\Lambda} , D_{\sigma\Lambda} , C_{\sigma\Lambda} - A_{\tau\sigma\Lambda} + A_{\tau^2\sigma\Lambda} \ ; \sigma \in S_3 \}$$

où $\tau = w_1 w_0$

Remarque. Si on se trouve dans les cas 2 ou 3, il faut remplacer ci-dessus D par E et C par F .

En particulier $\mathcal{L}_\Lambda$ contient (dans le cas 1)

$$\Phi_\Lambda = C_\Lambda + C_{\tau\Lambda} + C_{\tau^2\Lambda}$$

(B) Cas où Λ est "semi-regulier" $\lambda_1 = \lambda_3 \neq \lambda_2$

On pose $\lambda_1 = \lambda_3 = \lambda$ $\lambda_2 = \mu$ $(\lambda \neq \mu)$.

a) $\dim \mathcal{F}_\Lambda = 18$

Le stabilisateur de Λ dans σ_3 est le sous-groupe $\{1, w_1\}$.
Les polynomes harmoniques relativement à ce sous-groupe sont engendrés par 1 et $t_1 - t_3$. Le triplet (φ°, φ_1°, φ^1) appartient à $\mathcal{F}_\Lambda$ si et seulement si

$$\varphi_0^\circ(T) = \sum_{\sigma \in S_3} (A_\sigma + A'_\sigma(t_1 - t_3))\ e^{\langle \sigma\Lambda, T \rangle}$$

$$\varphi_1^\circ(T) = \sum_{\sigma \in S_3} (\mathcal{A}_\sigma + \mathcal{A}'_\sigma(t_1 - t_3))\ e^{\langle \sigma\Lambda, T \rangle}$$

$$\varphi'(\Theta) = \sum_{\sigma \in S_3} \left(\alpha_\sigma + \alpha'_\sigma\, 2i\theta\right) e^{\langle \sigma\Lambda, \Theta \rangle}$$

où A, A', $\mathcal{A}$, $\mathcal{A}'$, α et α' appartiennent à $\mathbb{C}$

b) Ecriture des conditions de saut : $A_3 = \{1, \tau, \tau^2\}$, $\tau = w_1 w_2$

(I) $\Leftrightarrow$ $A'_1 = -\alpha'_1$

$$2(A'_\tau + A'_{\tau^2}) + (\lambda-\mu)(A_\tau - A_{\tau^2}) = -2(\alpha'_\tau + \alpha'_{\tau^2}) - (\lambda-\mu)(\alpha_\tau - \alpha_{\tau^2})$$

(II) $\Leftrightarrow$ $\mathcal{A}'_1 = -\alpha'_1$

$$2(\mathcal{A}'_\tau + \mathcal{A}'_{\tau^2}) + (\lambda-\mu)(\mathcal{A}_\tau - \mathcal{A}_{\tau^2})$$

$$= -2\left(\alpha'_\tau\, e^{(\lambda-\mu)i\pi} + \alpha'_{\tau^2}\, e^{-(\lambda-\mu)i\pi}\right)$$

$$-(\lambda-\mu)\left((\alpha_\tau + 2i\pi\alpha'_\tau)\, e^{(\lambda-\mu)i\pi} - (\alpha_{\tau^2} + 2i\pi\alpha'_{\tau^2})\, e^{-(\lambda-\mu)i\pi}\right)$$

On peut fixer arbitrairement les constantes (pour $\sigma \in A_3$)

$$\alpha_\sigma,\ \alpha'_\sigma,\ A_\sigma,\ \mathcal{A}_\sigma,\ A'_\tau - A'_{\tau^2},\ \mathcal{A}'_\tau - \mathcal{A}'_{\tau^2}$$

d'où $\dim \xi_\Lambda = 14$

Exhibons une base de ξ_Λ :

Solutions nulles sur A' $(\alpha_\sigma = \alpha'_\sigma = 0)$

$$A_\Lambda = \left\{ \begin{array}{l} e^{\langle \Lambda, T\rangle} \\ 0 \\ 0 \end{array} \right. , \quad A'_\Lambda = \left\{ \begin{array}{l} e^{\langle \tau\Lambda, T\rangle} + e^{\langle \tau^2\Lambda, T\rangle} \\ 0 \\ 0 \end{array} \right. , \quad A''_\Lambda = \left\{ \begin{array}{l} (t_1 - t_3)\{ e^{\langle \tau\Lambda, T\rangle} - e^{\langle \tau^2\Lambda, T} \\ 0 \\ 0 \end{array} \right.$$

$$B_\Lambda = \left\{ \begin{array}{l} 0 \\ e^{\langle \Lambda, T\rangle} \\ 0 \end{array} \right. , \quad B'_\Lambda = \left\{ \begin{array}{l} 0 \\ e^{\langle \tau\Lambda, T\rangle} + e^{\langle \tau^2\Lambda, T\rangle} \\ 0 \end{array} \right. , \quad B''_\Lambda = \left\{ \begin{array}{l} 0 \\ (t_1 - t_3)\, e^{\langle \tau\Lambda, T\rangle} - e^{\langle \tau^2\Lambda, T\rangle} \\ 0 \end{array} \right.$$

$$C_\Lambda = \left\{ \begin{array}{l} e^{\langle \tau\Lambda, T\rangle}\left(1 - \frac{(\lambda-\mu)}{4}(t_1 - t_3)\right) - e^{\langle \tau^2\Lambda, T\rangle}\left(1 + \frac{(\lambda-\mu)}{4}(t_1 - t_3)\right) \\ 0 \\ 0 \end{array} \right.$$

$$D_\Lambda = \left\{ \begin{array}{l} 0 \\ e^{\langle \tau\Lambda, T\rangle}\left(1 - \frac{(\lambda-\mu)}{4}(t_1 - t_3)\right) - e^{\langle \tau^2\Lambda, T\rangle}\left(1 + \frac{(\lambda-\mu)}{4}(t_1 - t_3)\right) \\ 0 \end{array} \right.$$

Solutions non nulles sur A'.

$$E_\Lambda = \left\{ \begin{array}{l} 0 \\ 0 \\ e^{\langle \Lambda, \Theta\rangle} \end{array} \right. \qquad F_\Lambda = \left\{ \begin{array}{l} (t_3 - t_1)\, e^{\langle \Lambda, T\rangle} \\ (t_3 - t_1)\, e^{\langle \Lambda, T\rangle} \\ 2i\theta\, e^{\langle \Lambda, \Theta\rangle} \end{array} \right.$$

$$G_\Lambda = \left\{ \begin{array}{l} 0 \\ \frac{\lambda-\mu}{2i} \sin(\lambda-\mu)\pi \cdot (t_1 - t_3)\left[e^{\langle \tau\Lambda, T\rangle} + e^{\langle \tau^2\Lambda, T\rangle} \right] \\ e^{\langle \tau\Lambda, \Theta\rangle} + e^{\langle \tau^2\Lambda, \Theta\rangle} . \end{array} \right.$$

$$H_\Lambda = \begin{cases} -\frac{(\lambda-\mu)}{2}(t_1-t_3)\left[e^{\langle\tau\Lambda,T\rangle}+e^{\langle\tau^2\Lambda,T\rangle}\right] \\ -\frac{(\lambda-\mu)}{2}\cos(\lambda-\mu)\pi\,(t_1-t_3)\left[e^{\langle\tau\Lambda,T\rangle}+e^{\langle\tau^2\Lambda,T\rangle}\right] \\ e^{\langle\tau\Lambda,\Theta\rangle}-e^{\langle\tau^2\Lambda,\Theta\rangle} \end{cases}$$

$$I_\Lambda = \begin{cases} 0 \\ \left[\frac{(\lambda-\mu)}{2i}\cos(\lambda-\mu)\pi - i\sin(\lambda-\mu)\pi\right](t_1-t_3)\left[e^{\langle\tau\Lambda,T\rangle}+e^{\langle\tau^2\Lambda,T\rangle}\right] \\ 2i\theta\left[e^{\langle\tau\Lambda,\Theta\rangle}-e^{\langle\tau^2\Lambda,\Theta\rangle}\right] \end{cases}$$

$$J_\Lambda = \begin{cases} -(t_1-t_3)\left[e^{\langle\tau\Lambda,T\rangle}+e^{\langle\tau^2\Lambda,T\rangle}\right] \\ \left[(\lambda-\mu)\sin(\lambda-\mu)\pi - \cos(\lambda-\mu)\pi\right](t_1-t_3)\left[e^{\langle\tau\Lambda,T\rangle}+e^{\langle\tau^2\Lambda,T\rangle}\right] \\ 2i\theta\left[e^{\langle\tau\Lambda,\Theta\rangle}+e^{\langle\tau^2\Lambda,\Theta\rangle}\right] \end{cases}$$

c) Condition d'invariance (i')

Il est clair que B_Λ, B'_Λ, B''_Λ, D_Λ, E_Λ, G_Λ, I_Λ vérifient la condition (i'). Le sous-espace vectoriel supplémentaire dans $\mathcal{L}_\Lambda$ est engendré par

$$H_\Lambda - \frac{\lambda-\mu}{2} J_\Lambda \quad \text{et} \quad 2A_\Lambda - A'_\Lambda + C_\Lambda - \frac{\lambda-\mu}{4} J_\Lambda$$

d'où $\quad \dim \mathcal{L}_\Lambda = 9$

Remarque : Les seuls éléments de $\mathcal{L}_\Lambda$ non nuls sur $\mathring{A}_0$ sont les multiples de

$$2A_\Lambda - A'_\Lambda + C_\Lambda - \frac{\lambda-\mu}{4} J_\Lambda$$

(C) Cas où Λ est "singulier" $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3$

a) $\dim \mathcal{F}_\Lambda = 18$

Le stabilisateur de Λ dans σ_3 est σ_3 lui-meme. L'espace $\mathcal{H}$ des polynomes σ_3 -harmoniques est de demension 6.

Il a base
$$\left\{\begin{array}{l} 1 \;;\; t_2 - t_1 \;;\; t_2 - t_3 \;; \\ (t_2 - t_3)(t_2 + t_3 - 2t_1) \;:\; (t_2 - t_1)(t_2 + t_1 - 2t_3) : \\ t_1^2 (t_2 - t_3) + t_2^2 (t_3 - t_1) + t_3^2 (t_1 - t_2) \end{array}\right.$$

Posons pour $T = (t_1, t_2, t_3)$ $\quad t = \frac{t_1 + t_3}{2}$, $\zeta = \frac{t_1 - t_3}{2}$, $u = t_2$

L'espace $\mathcal{H}$ est engendré par

$$\left\{\begin{array}{l} P_0 = 1 \;,\quad P_1 = u - t \\ P_2 = \zeta \;,\quad P_3 = (u-t)^2 - 3\zeta^2 \\ P_4 = \zeta (u - t) \\ P_5 = \zeta \left((u-t)^2 - \zeta^2 \right) \end{array}\right.$$

Posons (On a remplacé ζ par $i\theta$ dans les P_j)

$$\left\{\begin{array}{l} Q_0 = 1 \;,\quad Q_1 = u - t \\ Q_2 = i\theta \;,\quad Q_3 = (u-t)^2 + 3\theta^2 \\ Q_4 = i\theta (u-t) \\ Q_5 = i\theta \left[(u-t)^2 + \theta^2 \right] \end{array}\right.$$

On obtient alors :

$$\varphi_0^\circ(T) = \sum_{k=0}^{5} A_k P_k \, e^{\langle \Lambda, T \rangle}$$

$$\varphi_1^\circ(T) = \sum_{k=0}^{5} \mathcal{A}_k P_k \, e^{\langle \Lambda, T \rangle}$$

$$\varphi^1(\Theta) = \sum_{k=0}^{5} \alpha_k Q_k \, e^{\langle \Lambda, \Theta \rangle}$$ où A_k, $\mathcal{A}_k$ et $\alpha_h \in \mathbb{C}$

b) Ecriture des conditions de sauts :

Avec les nouvelles variables on peut écrié :

$$\begin{cases} (\mathrm{I}) & \dfrac{d}{d\zeta} \varphi_0^\circ \Big|_{\zeta=0} = i \dfrac{d}{d\theta} \varphi^1 \Big|_{\theta=0} \\ (\mathrm{II}) & \dfrac{d}{d\zeta} \varphi_1^\circ \Big|_{\zeta=0} = i \dfrac{d}{d\theta} \varphi^1 \Big|_{\theta=0} \end{cases}$$

On en deduit (car $e^{\langle \Lambda, T \rangle} = e^{\langle \Lambda, \Theta \rangle} = e^{\lambda(2t+u)}$)

$$(\mathrm{I}) \Longleftrightarrow A_2 = -\alpha_2 \; ; \; A_4 = -\alpha_4 \; ; \; A_5 = -\alpha_5$$

$$(\mathrm{II}) \Longleftrightarrow \mathcal{A}_2 = -\alpha_2 - 3\pi^2\alpha_5 + 6i\pi\alpha_3$$

$$\mathcal{A}_4 = -\alpha_4 \; ; \; \mathcal{A}_5 = -\alpha_5$$

On peut fixer arbitrairement les α_j pour $j = 0, \cdots, 5$ les A_k et les $\mathcal{A}_k$ pour $k = 0, 1, 3$

d'où $\dim \xi_\Lambda = 12$.

Exhibons une base de ξ_Λ :

$$A_\Lambda = \begin{cases} e^{\langle\Lambda,T\rangle} \\ 0 \\ 0 \end{cases}, \quad A'_\Lambda = \begin{cases} 0 \\ e^{\langle\Lambda,T\rangle} \\ 0 \end{cases}, \quad A''_\Lambda = \begin{cases} 0 \\ 0 \\ e^{\langle\Lambda,\Theta\rangle} \end{cases}$$

$$B_\Lambda = \begin{cases} (u-t)\, e^{\langle\Lambda,T\rangle} \\ 0 \\ 0 \end{cases}, \quad B'_\Lambda = \begin{cases} 0 \\ (u-t)\, e^{\langle\Lambda,T\rangle} \\ 0 \end{cases}, \quad B''_\Lambda = \begin{cases} 0 \\ 0 \\ (u-t)\, e^{\langle\Lambda,\Theta\rangle} \end{cases}$$

$$C_\Lambda = \begin{cases} ((u-t)^2 - 3\zeta^2)\, e^{\langle\Lambda,T\rangle} \\ 0 \\ 0 \end{cases}, \quad C'_\Lambda = \begin{cases} 0 \\ ((u-t)^2 - 3\zeta^2)\, e^{\langle\Lambda,T\rangle} \\ 0 \end{cases}$$

$$D_\Lambda = \begin{cases} -\zeta\, e^{\langle\Lambda,T\rangle} \\ -\zeta\, e^{\langle\Lambda,T\rangle} \\ i\theta\, e^{\langle\Lambda,\Theta\rangle} \end{cases}, \quad E_\Lambda = \begin{cases} -\zeta\,(u-t)\, e^{\langle\Lambda,T\rangle} \\ -\zeta\,(u-t)\, e^{\langle\Lambda,T\rangle} \\ i\theta\,(u-t)\, e^{\langle\Lambda,\Theta\rangle} \end{cases}$$

$$F_\Lambda = \begin{cases} 0 \\ 6i\pi\zeta\, e^{\langle\Lambda,T\rangle} \\ ((u-t)^2 + 3\theta^2)\, e^{\langle\Lambda,\Theta\rangle} \end{cases}, \quad G_\Lambda = \begin{cases} -\zeta\left[(u-t)^2 - \zeta^2\right] e^{\langle\Lambda,T\rangle} \\ \left(-\zeta\left[(u-t)^2 - \zeta^2\right] - 3\pi^2\zeta\right) e^{\langle\Lambda,T\rangle} \\ i\theta\left[(u-t)^2 + \theta^2\right] e^{\langle\Lambda,\Theta\rangle} \end{cases}$$

c) Condition d'invariance.

Les polynomes σ_3 -harmoniques vérifiant $P(w_0 T) = -P(T)$ sont engendrés par :

$$\begin{cases} P_1 - P_2 \quad (t_1 - t_2) \\ P_3 + 2P_4 \quad ((t_1 - t_2)(t_1 + t_2 - 2t_3)) \\ P_5 \end{cases}$$

On en déduit que $\dim \mathcal{L}_1 = 9$ et que $\mathcal{L}_1$ admet pour base :

solutions nulles sur A_0° : A_1', A_1'', B_1', B_1'', C_1', F_1

Solutions non nulles sur A_0° : $B_1 + E_1$, $C_1 - 2E_1$, G_1

BIBLIOGRAPHIE

[1] M.F.Atiyah, Characters of semi-simple Lie groups(lectures given in Oxford), Mathematical Institute, Oxford, 1976.

[2] D.Barbasch-D.A.Vogan,Jr., The Local Structure of Characters, J.Funct.Anal.,37(1980),27-55.

[3] F.A.Berezin, Laplace operators on semi-simple Lie groups, Amer.Math.Soc.Transl.,21(1962),239-339.

[4] N.Bopp, Formule d'inversion pour $GL(3,\mathbb{C})/U(2,1)$, Publ.IRMA, Univ.Strasbourg, (1985),1-15.

[5] G.B.Elkington, Centralizers of unipotent elements in semisimple algebraic groups, J.of Algebra 23(1972), 137-163.

[6] J.Faraut, Distributions sphériques sur les espaces hyperboliques, J.Math.Pures Appl.,58(1979),369-444.

[7] J.Faraut, Analyse harmonique sur les paires de Guelfand et les espaces hyperboliques, Analyse Harmonique, (1983),315-446.

[8] J.Faraut, Analyse harmonique et fonctions speciales, Ecole d'ete d'analyse harmonique de tunis, (1984).

[9] M.Flensted-Jensen, Spherical functions on a real semisimple Lie group, A method of reduction to the complex case, J.Funct. Anal.,30(1978),106-146.

[10] M.Flensted-Jensen, K-finite joint eigenfunctions of $U(\mathfrak{g})^K$ on a non-Riemannian semisimple symmetric space G/H, Lect. Notes in Math.,880(1981),91-101, Springer.

[11] Harish-Chandra, Representations of a semisimple Lie group, I,II,III, Trans.Amer. Math. Soc. 75(1953),185-243; 76(1954), 26-65; 76(1954),234-253.

[12] Harish-Chandra, The characters of semisimple Lie groups, Trans.Amer.Math.Soc.,83(1956),98-163.

[13] Harish-Chandra, Spherical functions on a semisimple Lie group, I.Amer.J.Math.,80(1958),241-310;II,ibid.,80(1958), 553-613.

[14] Harish-Chandra, Invariant distributions on Lie algebras, Amer.J.Math., 86,271-309 (1964).

[15] S.Helgason, Differential geometry and symmetric spaces, Pure and Appl. Math. Vol.12, Academic Press, New York, 1962.

[16] S.Helgason, Fundamental solutions of invariant differential operators on symmetric spaces, Amer.J.Math.,86(1964),565-601.

[17] S.Helgason, Analysis on Lie Groups and homogeneous Spaces," Conf.Board Math.Sci.Series,No.14,Amer.Math.Soc., Providence, Rhode Island, 1972.

[18] T.Hirai, Invariant eigendistributions of Laplace operators on real simple Lie groups I, Japan.J.Math., 39(1970),1-68.

[19] T.Hirai, Invariant eigendistributions of Laplace operators on real simple Lie groups II, Japan.J.Math.New Series, 2 (1976),27-89.

[20] B.Hoogenboom, Spherical functions and invariant differential operators on complex Grassmann manifolds, Ark.Mat.,20(1982), 69-85.

[21] R.Hotta-M.Kashiwara, Quotients of the Harish-Chandra system by primitive ideals, to appear in 'Giornate di Geometria ', Roma 1984,PM, Birkäuser 1985.

[22] M.Kashiwara, The Riemann-Hilbert Problem for Holonomic Systems, Publ.RIMS,Kyoto Univ., 20(1984),319-365.

[23] M.Kashiwara-A.Kowata-K.Minemura-K.Okamoto-T.Oshima-M.Tanaka, Eigenfunctions of invariant differential operators on a symmetric space, Ann. of Math.,107(1978),1-39.

[24] T.H.Koornwinder, On Vretare's dimension formula for class one irreducible representation of connected semi-simple Lie groups, informal manuscript.

[25] M.T.Kosters, Spherical distributions on rank one symmetric spaces, thesis, Univ. of Leiden, 1983.

[26] T.Oshima, A note on dimension formulas for Riemannian symmetric spaces, Seminar Reports of Unitary Representation No.1, 1981.

[27] T.Oshima, A realization of semisimple symmetric spaces and construction of boundary value maps, to appear.

[28] T.Oshima, Boundary value problems for systems of linear partia differential equations with regular singularities, Adv.Studies in Pure Math., 4(1984),391-432.

[29] T.Oshima-T.Matsuki, Orbits on affine symmetric spaces under the action of the isotropy subgroups, J.Math.Soc.Japan, 32(1980),399-414.

[30] T.Oshima-J.Sekiguchi, Eigenspaces of invariant differential operators on an affine symmetric space, Invent.Math.,,57(1980), 1-81.

[31] S.Sano, Algèbre de Lie semi-simple symétrique et transformation de Cayley , preprint.

[32] S.Sano, Invariant spherical distributions and the Fourier inversion formula on $GL(n,\mathbb{C})/GL(n,\mathbb{R})$, J.Math.Soc.Japan,36 (1984),191-219.

[33] S.Sano, Distributions sphériques invariantes sur l'espace semi-simple et son c-dual, Lect.Notes in Math., Springer, preprint.

[34] S.Sano-S.Aoki-S.Kato, A Note on Connection Formulas for Invariant Eigendistributions on Certain Semisimple Symmetric Spaces, Bull.of I.V.T.,14-A(1985),99-108.

[35] L.Schwartz, Théorie des distributions, Hermann, 1950.

[36] J.Sekiguchi, Invariant spherical hyperfunctions on the tangent space of a symmetric space, Adv.St. in Pure Math.,6 (1985),83-126.

[37] M.Sugiura, Unitary representations and harmonic analysis Kodansha, Tokyo,1975.

[38] R.Takahashi, Sur les functions spheriques et la formule de Plancherel dans le groupe hyperbolique, Japan.J.Math.,31(1961), 55-90.

[39] P.C.Trombi-V.S.Varadarajan, Asymptotic behaviour of eigenfunctions on a semisimple Lie group:The discrete spectrum, Acta Math.,129(1972),237-280.

[40] G.van Dijk, Invariant eigendistributions on the tangent space of a rank one semisimple symmetric space, preprint.

[41] V.S.Varadarajan, Harmonic Analysis on real reductive groups, Lecture Notes in Math.,576,Springer Verlag, 1977.

[42] L.Vretare, On a recurrence formula for elementary spherical functions on symmetric spaces and its applications to multipliers for the spherical Fourier transform, Math.Scand., 41(1977),99-112.

[43] G.Warner, Harmonic Analysis on semi-simple Lie groups, Vol.1, 2, Springer Verlag, 1972.