数理解析研究所講究録
598巻 1986年 105-116

Invariant eigendistribution on the tangent space of semisimple symmetric spaces

広大　木幡篤孝

§0. Introduction

Gを connected semi-simple Lie group とし, σをGの involutive automorphism. Hをσの fix points 全体の群の開部分群とする. G/Hを semi-simple symmetric space と呼ぶ。よく知られているように この class は Riemannian symmetric space および conected semisimple Lie group を含んでいる。Harish-Chandra は [1] でまず Lie algebra 上で invariant eigendistribution を研究し, 特に nilpotent variety に support をもつものを調べ, そのようなものは存在しないことを証明した。

しかしその後 semi-simple symmetric space の解析が研究され, $SO_0(n+1,1)/SO_0(n,1)$ の場合等には reguler nilpoten orbit 上に support をもつ invariant eigen distribution の発見がなされた。G. van Dijk は [2] で pseudo-Laplacian 単独の方程式を考えて nilpotent variety に support をもつ解を調べている。そこでは pseudo-Laplacian のある方向での radial part を計算することによって 解をもたないための十分条件を調べた。ここでは

G. van Dijk の計算結果を応用して $\mathfrak{g}$-reguler nilpotent element の近傍ではそのような解は1次元以下であることを証明した。(定理2) 又そのような解の固有値は0でなくてはならないことも示した。(定理1)

§1 記号と G. van Dijk [2] の結果 (☆で表わす)

$\mathfrak{g}$: real semi-simple Lie algebra

σ : involution of $\mathfrak{g}$: $\mathfrak{g}=\mathfrak{k}+\mathfrak{q}$ (σによる固有値分解)

x_0 : $\mathfrak{q}$の nilpotent element i.e $\mathrm{ad}_{\mathfrak{g}}\, x_0$: nilpotent かつ $x_0\in\mathfrak{q}$

(以後 x_0をfix してギロンする。)

$\{h_0, x_0, y_0\}$: normal S-triple i.e $\exists h_0\in\mathfrak{k}$, $y_0\in\mathfrak{q}$ s.t

$[x_0, y_0]=h_0$, $[h_0, x_0]=2x_0$, $[h_0, y_0]=-2y_0$

☆ $\exists\theta$; $\mathfrak{g}$の Cartan involution s.t (i) $\theta\sigma=\sigma\theta$ かつ

(ii) $\theta h_0=-h_0$, $\theta x_0=-y_0$, $\theta y_0=-x_0$

([2] の Lemma 1)

$\mathfrak{g}$に 内積 (positive definite) を $(x,y)=-B(x,\theta y)$

で入れる。(Bは Killing form)

☆ $\mathfrak{q}=[x_0,\mathfrak{k}]+Z_{\mathfrak{q}}(y_0)$ ([2] の Lemma 3)

但し $Z_{\mathfrak{q}}(y_0)=\{z\in\mathfrak{q} : [z, y_0]=0\}$

又 上の分解は 内積 (,) に関する 直交分解

$(\because)$ $-B([x_0,\mathfrak{k}],\theta z)=0 \Leftrightarrow B([x_0,\theta z],\mathfrak{k})=0$

$\Leftrightarrow [x_0,\theta z]=0 \Leftrightarrow z\in Z_{\mathfrak{q}}(y_0)$

以後 $V=Z_{\mathfrak{q}}(y_0)=\theta Z_{\mathfrak{q}}(x_0)$ とおく。

$\mathfrak{g}_0=\mathbb{R}h_0+\mathbb{R}x_0+\mathbb{R}y_0$ とし, $\mathfrak{g}_0$の$\mathfrak{q}$上の 表現 ρ

を $\rho(z)=\mathrm{ad}\,z$ ($z\in\mathfrak{g}_0$) で定義する。

表現 ρ のキヤク表現分解を $\mathfrak{g}=\sum_{1\le i}\mathfrak{g}_i$ で表わす。
但し $\mathfrak{g}_i$ は non-zero な ρ のキヤク表現空間.($\mathfrak{g}_1=\mathfrak{g}_0$)
このとき次のような $Z_{\mathfrak{g}}(x_0)$ の orthonormal basis $w_1',\cdots,w_r'$
をとることができる; (i) $w_i'\in\mathfrak{g}_i\cap Z_{\mathfrak{g}}(x_0)$ (ii) $[h_0,w_i']=+\lambda_i w_i'$
但し $r=\dim Z_{\mathfrak{g}}(x_0)$, $\lambda_i=\dim\mathfrak{g}_i-1$ $(1\le i\le r)$
$w_i=\theta w_i'$ とおくと $w_1,\cdots,w_r$ は $Z_{\mathfrak{g}}(y_0)$ の orthonormal basis で $[h_0,w_i]=-\lambda_i w_i$ となる。
以後 $H\cdot x_0=\{hx_0 : h\in H\}$ $(hx_0=\mathrm{Ad}(h)x_0)$ の transversal 方向の座標として $x_0+\sum_{1\le i\le r}u_iw_i$ $(u_i\in\mathbb{R})$ をとる。
但し G を $\mathfrak{g}$ の conected adjoint group とし H を $\mathfrak{h}$ に対応する Lie subgroup とする。

☆ $\pi : H\times U \longrightarrow \mathfrak{g}$ とする。
$\qquad (h,u)\longrightarrow h\cdot(x_0+u)$

$\exists\, 0\in U'\subset U$ (open) s.t $\pi|_{H\times U'}$: submersive

特に $\pi(H\times U')$: $\mathfrak{g}$ の H-invariant open subset
([2] の Lemma 5)

以後上の Lemma に従って x_0 の近傍を H 方向と U 方向に分解し、differential operator, distribution 等も分解して考える。
G. van Dijk は Harish-chandra [7] と同様の方法で、従って radial part の定義等を与え いくつかの同様の結果を得て

いるがここでは詳しくは述べず結果（必要と思われるもの）だけを書くことにする。Dをx_0の$\mathfrak{g}$における近傍上のC^∞-differential operatorとするとき、$\mathfrak{r}(D)$でDのradial componentを表わす。（see [2]。[2]では$\Delta(D)$で表わしている。）

☆ $\mathfrak{r}(E) = \sum_{1\leq i\leq r} (1+\frac{1}{2}\lambda_i) u_i \frac{\partial}{\partial u_i}$ （[2]のLemma 7）

但し Eは$\mathfrak{g}$上のEuler vector field i.e $(Ef)(x) = \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} f(x+tx)$

でEは$\mathfrak{g}$上のH-invariant vector fieldである。

(∵) $u = \sum_{1\leq i\leq r} u_i w_i$ $\quad s = -\frac{1}{2}\log(1+t)$ とおくと、

$$e^{sh_0}(1+t)(x_0+u) = x_0 + \sum_{1\leq i\leq r}(1+t)^{1+\frac{\lambda_i}{2}} u_i w_i$$

fを locally-H-inv C^∞-function とすると、

$$f((1+t)(x_0+u)) = f(x_0 + \sum_{1\leq i\leq r}(1+t)^{1+\frac{\lambda_i}{2}} u_i w_i)$$

$$\therefore \quad \mathfrak{r}(E)\tilde{f}(u) = (Ef)(x_0+u) = \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} f((1+t)(x_0+u))$$

$$= \sum_{1\leq i\leq r} (1+\frac{1}{2}\lambda_i) u_i \frac{\partial}{\partial u_i}\tilde{f}(u)$$

(see [2] Lemma 6)

☆ $\underset{\text{open subset}}{H_0 \subset H}$ $\quad 0 \in \underset{\text{open}}{\mathfrak{V}_0} \subset \mathfrak{V}'$ $\quad H_0$: conected, $e \in H_0$

T : $\Omega_0 = \pi(H_0 \times \mathfrak{V}_0)$ の locally H-invariant distribution とする。

$\exists\, \sigma_T$: $\mathfrak{V}_0$ 上の distribution s.t. $T(f_\alpha) = \sigma_T(\beta_\alpha)$ $(\alpha \in C_c^\infty(H_0 \times \mathfrak{V}_0$

但し $\beta_\alpha \in C_c^\infty(U_0)$: $\beta_\alpha(u) = \int_H \alpha(h, u)dh$ $(u \in U_0)$

更に $\sigma_T = 0 \Rightarrow T = 0$ ([2] の Theorem 10)

§2 不変同次固有関数の局所解について

$S(\mathfrak{g}_\mathbb{C})^H$: $\mathfrak{g}_\mathbb{C}$ ($\mathfrak{g}$ の複素化) の Symetric algebra $S(\mathfrak{g}_\mathbb{C})$ の内で H-invriant なものの全体

とするとき、$S(\mathfrak{g}_\mathbb{C})$ の元は $\mathfrak{g}$ 上の定数係数の微分作用素と思われる。それを ∂p で表わす。($p \in S(\mathfrak{g}_\mathbb{C})$)
今 $\mathfrak{g}$ 上の distribution T で次の条件を満たすものを考える。

$$\begin{cases} \text{(i)} & \partial p T = \chi(p) T \qquad \forall p \in S(\mathfrak{g}_\mathbb{C})^H \\ \text{(ii)} & T : \text{H-invariant} \\ \text{(iii)} & \operatorname{supp} T \subset \overline{H \cdot x_0} \qquad (\text{— は closure}) \end{cases}$$

但し χ は $S(\mathfrak{g}_\mathbb{C})^H$ の charactor

U の 0 の近傍 U_0 を十分小さくとると次のことが成り立つ。
σ_T を U_0 上の T に対応する distribution とすると (ii) と (iii) から
$\operatorname{supp} \sigma_T \subset \{0\}$ (see [2] Lemma 17.18)
又 (i) より $\Omega(\partial p)\sigma_T = \chi(p)\sigma_T$ $\forall p \in S(\mathfrak{g}_\mathbb{C})^H$
従って次の解集合を今後考えることにする。

$$\mathfrak{S}_{\chi_0} = \{\sigma \in \mathcal{D}_0'(\mathcal{U}_0) \; ; \; \rho(\partial p)\sigma = \chi(p)\sigma \quad \forall p \in S(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}})^H \}$$

但し $\mathcal{D}_0'(\mathcal{U}_0)$ は $\mathcal{U}_0$ の 0 に support をもつ distribution

$S(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}})^H_+$ を degree 1 次以上の元全体とする。

定理 1　$\chi(S(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}})^H_+) \neq 0 \Rightarrow \mathfrak{S}_{\chi_0} = \{0\}$

<Proof> $\mathfrak{S}_{\chi_0} \ni \exists \sigma \neq 0 \Rightarrow \chi(S(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}})^H_+) = 0$ を示す。

ξ : half integer (≥ 2) に対し

$$\mathcal{D}_\xi' = \{\sigma \in \mathcal{D}_0'(\mathcal{U}_0) \; ; \; \rho(E)\sigma = -\xi\sigma\}$$ とおく。

$$\rho(E)\delta^{(\alpha)} = -\sum_{1\leq j\leq r}\left(1+\frac{\lambda_j}{2}\right)(\alpha_j+1)\delta^{(\alpha)}$$

但し $\delta^{(\alpha)} = \delta_1^{(\alpha_1)} \cdots \delta_r^{(\alpha_r)}$ （δ_i は x_i に関する Dirac function）

$$\therefore \quad \delta^{(\alpha)} \in \mathcal{D}_\nu' \qquad \nu = \sum_{1\leq j\leq r}\left(1+\frac{\lambda_j}{2}\right)(\alpha_j+1)$$

従って $$\mathcal{D}_0'(\mathcal{U}_0) = \sum_{\xi_0 \leq \xi} \mathcal{D}_\xi'$$ （vector space の直和）

が成り立つ。但し $\xi_0 = \sum_{1\leq j\leq r}\left(1+\frac{\lambda_j}{2}\right)$

$\mathfrak{S}_{\chi_0} \ni \exists \sigma \neq 0$ と仮定する。$\exists \xi_1$: half integer s.t.

$$\sigma_{\xi_1} \neq 0 \qquad \sigma = \sum_{\xi_1 \leq \xi} \sigma_\xi$$

$\mathcal{I}(\partial p)\sigma = \chi(p)\sigma$ より $\sum_{\xi_1 \leq \xi} \mathcal{I}(\partial p)\sigma_\xi = \chi(p)\sum_{\xi_1\leq\xi}\sigma_\xi$

ここで $\deg p = d$ とすると $\mathcal{I}(\partial p)\mathcal{D}'_\xi \subset \mathcal{D}'_{\xi+d}$ より

(p を homogeneous とする。)

$d \geqq 1$ とすると $\chi(p)\sigma_{\xi_1} = 0$

$\sigma_{\xi_1} \neq 0$ より $\chi(p) = 0$ $\therefore\ \chi(S(\mathfrak{g}_\mathbb{C})^H_+) = 0$

この定理 より (i)(ii)(iii) を満たすときには (i) で $\chi = 0$ の場合を考えればよいということがわかる。

次の結果を述べる前に $\mathfrak{g}$-distinguished の定義と知られている結果を述べる。

nilpotent element $x_0 \in \mathfrak{g}$ が $\mathfrak{g}$-distinguished とは、

$\lambda_i > 0 \quad (1 \leq {}^{\forall} i \leq r)$ のとき。

このとき次の結果が成り立つ。

☆ x_0 : $\mathfrak{g}$-distinguished $\Leftrightarrow$ $\mathcal{I}_0(\partial(\omega))$ の degree 2 の homogeneous part が 0 ([2] の Lemma 13)

但し ω : Casimir element i.e. $\partial\omega$: pseudo-Laplacian

$\mathcal{I}_0(\partial\omega)$ は $\mathcal{I}(\partial\omega)$ の local expression at $0 \in U$

従って x_0 が $\mathfrak{g}$-distinguished でないと $\mathcal{I}(\partial\omega)\sigma = \lambda\sigma$ ($\lambda \in \mathbb{C}$) の解 $\sigma \in \mathcal{D}'_0(U_0)$ は 0 しかないことがわかる。

従って以後は x_0 が $\mathfrak{g}$-distinguished のときのみを扱う。

このとき van Dijk は $\mathfrak{I}(\partial\omega)$ を計算している。([2] の Theorem 14)

$$\star \quad c\,\mathfrak{I}(\partial\omega)\sigma_T = \Big[\, 2u_1\frac{\partial^2}{\partial u_1^2} + n\frac{\partial}{\partial u_1} + \sum_{1<i\leq r}(d_i+2)u_i\frac{\partial^2}{\partial u_i \partial u_1}$$
$$+ c\Big\{ \sum_{1<i,j\leq r} a_{ij}(u)\frac{\partial^2}{\partial u_i \partial u_j} + \sum_{1<i\leq r} a_i(u)\frac{\partial}{\partial u_i}\Big\}\Big]\sigma_T$$

但し a_{ij}, a_i : U_0 上の analytic functions $a_{ij}(0)=0$

$c = \|x_0\|$ $\quad n = \dim\mathfrak{g}$

この結果を用いると次の Lemma が得られる。

Lemma $\quad x_0$: $\mathfrak{g}$-distinguished とする。

$\exists\, \sigma \neq 0 \quad$ s.t $\quad (\mathfrak{I}(\partial\omega) - \lambda)\sigma = 0 \qquad (\lambda \in \mathbb{C})$

$\Rightarrow \exists\, \tau \neq 0 \ \ \exists\, \alpha_1 \geq 0 \quad$ s.t $\quad \sigma \equiv \delta_1^{(\alpha_1)}\tau \mod \mathcal{D}'(\alpha_1 - 1)$

かつ $\quad \mathfrak{I}(E)\tau = (\alpha_1 - \frac{n}{2} + 2)\tau$

但し, $\mathcal{D}'(a) = \{\sigma \in \mathcal{D}_0'(U_0) \ ; \ u_1^{a+1}\sigma = 0\}$

τ は $u_2, \cdots u_r$ に関する distribution

<Proof> $\quad \sigma \neq 0 \Rightarrow \exists\, \tau \neq 0 \ \ \exists\, \alpha_1 \geq 0 \ $ s.t $\ \sigma \equiv \delta_1^{(\alpha_1)}\tau \mod \mathcal{D}'(\alpha_1 - 1)$

$$(\mathfrak{I}(\partial\omega) - \lambda)\sigma \equiv \mathfrak{I}(\partial\omega)\delta_1^{(\alpha_1)}\tau \qquad \mod \mathcal{D}'(\alpha_1)$$
$$\equiv (u_1 D_1^2 - D_1\mathfrak{I}(E) - (\tfrac{n}{2} - 2))\delta_1^{(\alpha_1)}\tau \quad \mod \mathcal{D}'(\alpha_1)$$
$$= -(\alpha_1+2)\delta_1^{(\alpha_1+1)}\tau + 2(\alpha_1+1)\delta_1^{(\alpha_1+1)}\tau - \delta_1^{(\alpha_1+1)}\mathfrak{I}(E)\tau$$
$$\equiv \delta_1^{(\alpha_1+1)}\{(\alpha_1 - \tfrac{n}{2} + 2) - \mathfrak{I}(E)\}\tau \quad \mod \mathcal{D}'(\alpha_1)$$

$(\mathfrak{l}(\partial\omega)-\lambda)\sigma=0$ より

$$\mathfrak{l}(E)\tau=(\alpha_1-\frac{n}{2}+2)\tau$$

この Lemma を使うと次の結果が得られる。($\chi=0$ とする。)

定理2. x_0: $\mathfrak{g}$-reguler $\Rightarrow$ $\dim \mathfrak{S}_{x_0}\leq 1$

<Proof> U_0 上の differential operator D_1, D_2 に対し.

$\mu(D_1)(D_2)=[D_1, D_2]$ と定義する。

$\forall p\in S(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}})^H$ に対し $\mathfrak{l}(\partial p)=(\mu(\mathfrak{l}(\partial\omega)))^d(p)$

$d=\text{degree}\, p$ が成り立つことが帰納法で示される。($d\geq 1$)

$0\neq{}^\exists\sigma\in\mathfrak{S}_{x_0}$ とする。 $\mathfrak{l}(\partial\omega)\sigma=0$ より.

$$0=\mathfrak{l}(\partial p)\sigma=(\mu\mathfrak{l}(\partial\omega))^d(p)\sigma=(\mathfrak{l}(\partial\omega))^d(p\sigma)$$

k に関する帰納法と Lemma より.

$$(\mathfrak{l}(\partial\omega))^k p\sigma\equiv(-1)^k\prod_{1\leq\nu\leq k}(d-\nu+1)\,\delta_1^{(\alpha_1+k)}\,p|_{x_1=0}\tau \mod \mathcal{D}'(\alpha_1+k-1)$$

が成り立つ. 従って

$$\mathfrak{l}(\partial\omega)^d p\sigma\equiv(-1)^d d!\,\delta_1^{(\alpha_1+d)}\,p|_{x_1=0}\tau \mod \mathcal{D}'(\alpha_1+d-1)$$

$$\therefore\quad p|_{x_1=0}\tau=0 \qquad \mathfrak{l}(E)\tau=(\alpha_1-\frac{n}{2}+2)\tau$$

$(\forall p\in S(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}})^H_+)$ (Lemma より)

x_0: $\mathfrak{g}$-reguler とすると ($\mathfrak{g}$-reguler なら $\mathfrak{g}$-distinguished である)

$r=l=\mathrm{rank}(\mathfrak{g},\mathfrak{f})$ で $1+\frac{\lambda_i}{2}=d_i$ （d_i は $S(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}})^H$ の多項式環の generator $P_1,\cdots,P_l$ の degree）

が成り立つ. 更に. generator $P_1\cdots P_l$ が. $P_j(x_0+\sum_{1\le i\le l}u_iw_i)=u_j$ となるようにとれることから.

$$u_j\tau=0\quad(2\le j\le l)$$

となる。 従って $\tau=c\,\delta_2\cdots\delta_l$ （c は定数 $\neq 0$）

又 $\rho(E)\tau=-(\sum_{1\le i\le l}d_i-2)\tau$ となるから.

$$\alpha_1=\frac{n}{2}-\sum d_i \quad \text{となる。}$$

従って $\sigma=\underset{\neq 0}{c}\,\delta_1^{(\frac{n}{2}-\sum d_i)}\delta_2\cdots\delta_l+$（$u_1$ に関し微分が低次の項）

という形に書けることがわかる。

$\sigma_{x_0}\ni\exists\sigma_1\neq 0,\ \exists\sigma_2\neq 0$ とする。

上のことから $\sigma_1\equiv c_1\,\delta_1^{(\frac{n}{2}-\sum d_i)}\delta_2\cdots\delta_l \mod \mathcal{D}'(\frac{n}{2}-\sum d_i-1)$

$\sigma_2\equiv c_2\,\delta_1^{(\frac{n}{2}-\sum d_i)}\delta_2\cdots\delta_l$ 〃

$$\tilde{\sigma}=c_2\sigma_1-c_1\sigma_2\in\mathcal{D}'(\tfrac{n}{2}-\textstyle\sum d_i-1)$$

$\tilde{\sigma}\neq 0$ とすると 上のことから矛盾 $\therefore\ \tilde{\sigma}=0$

故に $\dim\sigma_{x_0}\le 1$

（注） 上の展開からわかるように $\frac{n}{2}-\sum d_i$ は non-negative integer にならないといけないわけで. x_0 が $\mathfrak{g}$-reguler

のとき $\frac{n}{2}-\Sigma d_i$ が non-negative integer でないときは
$\mathfrak{S}_{x_0}=\{0\}$ となることがわかる。

References

[1] Harish-Chandra, Invariant distributions on Lie algebras. Amer. J. Math., 86 (1964), 271-309.

[2] G. van Dijk, Invariant eigendistributions on the tangent space of a rank one semisimple symmetric space. Math. Ann. 268, 405-416 (1984)