

$U(4,2)/(U(2) \times U(2,2))$ 上の不変固有超関数の

接続公式について

東大・理 青木 茂 (Shigeru AOKI)

北里大・教養 加藤末広 (Suehiro KATO)

目 次

§ 1. 前説	<u>1.1</u> 問題設定等	1~4
	<u>1.2</u> 主要結果と予想	4~8
§ 2 準備	<u>2.1</u> 一般的事項について	1~7
	<u>2.2</u> $Z_G(A)/Z_H(A)$ について	7~10
§ 3 不変微分作用素とその軌道部分		1~8
§ 4 不変積分 — 階数 1 の reduction		1~10
§ 5 singular I. D.		1~12
	<u>5.1.</u> $A = A_1$ の場合	2~8
	<u>5.2</u> 各 Cartan 部分空間内での条件	8~12
§ 6 定理 1.1 の証明		1~18
	<u>6.1</u> X_{λ_1, λ_2} が regular の場合	5~11
	<u>6.2</u> X_{λ_1, λ_2} が singular の場合	11~16
	表 6.1. ①, ② [X 上の I.E.D. の形]	17~18
付録	<u>A.1</u> I.E.D. Θ の $D'_H(X)$ における分解について	1~4
	<u>A.2</u> N 上の I. D. について	4~5
	<u>A.3</u> 予想定理とその証明の outline	5~9

§ 1. 序説

1.1. 問題設定等

G を半单纯リ一群, σ を σ の包含的自己同型, $H \in \sigma$ の固定元全体のなす G の部分群 G^σ とその単位元を含む連結成分 G^0 。この間にある群とする。この時, $X = G/H$ を 半单纯対称空間と言ふ。 O を X の H -不变な開集合, $D(X)$ を X 上, G -不变微分作用素のなす環とする時, 以下, 2 条件を満たす O 上の Schwartz 超関数 Θ を考察する。

i) Θ は H -不变,

ii) 任意の $D \in D(X)$ に対して, $D \cdot \Theta = \chi(D) \Theta$ となる $D(X)$ の指標 $\chi: D(X) \rightarrow \mathbb{C}$ が存在する。

我々は, 群の場合の用語を借用して, このような $\Theta \in \mathcal{D}(O)$ を, O 上の (infinitesimal character が "X" である) 不変固有超関数 (以下, I.E.D. と略す) と呼び、その全体を $\mathcal{D}'_{X,H}(O)$ と書く。

X が, 半单纯リ一群 (cf. [Hirai 3, 4]) あるいは, その C -双対の場合 (cf. [Sano 10]) には, 任意の I.E.D. は局所可積分となる。従って, 低次元の部分多様体に台をもつ I.E.D. は存在しない。また, この場合, $D(X)$ の動径部分は, 本質的には, 対数像微分作用素となる。これらの事情が, 群又はその C -双対の場合の I.E.D. の研究を, 一般の場合に比べて, 容易にしている。ところが, 表題の半单纯対称空間が属する

$$(\star) \quad U(p, q) / (U(r) \times U(p-r, q)) \quad (p > r)$$

という系列では、上述の諸性質は望みがたい。実際、階数 $\kappa = 1$ の場合にすてて、上述の諸性質が一つも成立しないう多くの例がある。我々の $U(4, 2) / (U(2) \times U(2, 2))$ にも、以下本論文で見るように、この困難がつきまとつ。(cf. [Aoki-Kato 1], [Panaut 2])

X' を X の半單純正則元の全体がなす H -不变な開稠密部分集合とする。任意、I.E.D. は、 X' 上、実解析的関数である事が知られていい。 X が群の場合に、[Hirai 4] は、I.E.D. の研究の第一歩として、次の問題を提起し、解決した。

問題 任意の X' 上の I.E.D. \textcircled{H}' に対して、それが X 上の I.E.D. \textcircled{H} に拡張できるための条件は何か？

本論稿では、我々は、すててに見た階数 $\kappa = 1$ の場合 ([Aoki-Kato 1]) に引き続いて、系列 (\star) の階数 $\kappa = 2$ の場合について、上の問題及びその関連事項を考察する。

我々は、[Aoki-Kato 1] と同様に、I.E.D. の研究と不变積分と、不变微分作用素の動径部分の研究を通じて行なう。動径部分については、系列 (\star) に属する半單純対称空間の場合には、[Hoogenboom 5] から、その構造がわかるので、これが“大きな手がかり”となる。不变積分については、その、(正則ではない) 半單純元

ρ_0 のまわりでの運動を. ρ_0 の centralizer から生ずるより小さな対称空間(手2の2.2参照)の不变積分の ρ_0 のまわりでの運動に帰着させる方法を用いる。この方法を確立するために、我々は、群の場合の不变積分の研究において基本的役割を果した。“A Theorem of Compacity”を、半單純対称空間に拡張する。この、不变積分の研究方法は、 ρ_0 が“semi-regular”的場合には、 ρ_0 のまわりでの不变積分の運動を、階数 1 の半單純対称空間の不变積分の性質(手 [Faraut 2], [Aoki-Kato 1])に帰着せしめることにより、成功する。不变微分作用素の動径部分の性質と照らし合せる事により、I.E.D. の、 ρ_0 の X における近傍での性質を調べられる。

これに反し、 ρ_0 が“semi-regular”でない場合は、現在、この方法は必ずしも成功していない。(手、命題5.5への注意) 特に、 ρ_0 が原点の場合には、 ρ_0 の centralizer から生ずる対称空間が、 X 自身になってしまふから、この方法を直接適用すると、 X の不变積分の ρ_0 のまわりでの運動を、それ自身に帰着せよとする事になり、無効である。何か他の工夫か方法が必要であると思われる。我々が実際に求めたのは、 X から、正則でも semi-regular でもない半單純元に關係した数個の H -orbit を除外した集合 X_0 。(手 §6, §6-1) に対し、 X' 上の I.E.D. が X_0 ($\neq X'$) 上の I.E.D. に拡張可能であるための必要十分条件と、その拡張の具体的な形である。

主として記述を簡潔にするために、以下に於いては、主要結果を $p=4, q=2$ の場合にしか与えないが、系列(★)に属する。他の階数 $\nu = 2$ の場合にも同様の議論が妥当する。[表題の $U(4,2)/(U(2) \times U(2,2))$ では、以下にしばしば現われる。

$\mu = p+q-2\nu$ は、 $\mu = 2$ であるが、他の階数 $\nu = 2$ の場合を考慮して、準備や途中の計算では、 $\mu = 2$ を代入する以前の μ を残した形を書くように努めた。尚、 $U(4,2)/(U(2) \times U(2,2))$ は自己 G-双対である。] 一般に系列(★)に属する ($\nu \geq 3$ の) 半単純対称空間の場合に、本稿に於ける方法は、少なくとも semi-regular な半単純元のまわりでの、 X' 上与えられた I.E.D. の接続状況の研究に対しては有効である。

1.2 主要結果と予想

以下、本稿の主要結果である、 $X = U(4,2)/(U(2) \times U(2,2))$ の場合に於ける、§1.1 の 問題への(部分的)解答と、それに関する予想を述べる。記号は、§1.1で用いられなかつたものについては、適宜、簡略に説明するが、詳しくは §2 以降を参照されたい。

$X = U(4,2)/(U(2) \times U(2,2))$ の Cartan 部分空間、H-共役類の完全代表系を、 J_0 (コンパクト)、 J_1 、 J_2 (スボリット)とする。各 J_ℓ

$(l=0,1,2)$ に對し $J'_l = J_l \cap X'$ と置く。 $X' = \bigcup_{l=0,1,2} H.J'_l$

となる。 適當な変数 τ_1, τ_2 ($\tau_i \geq 0$) により、各 Cartan 部

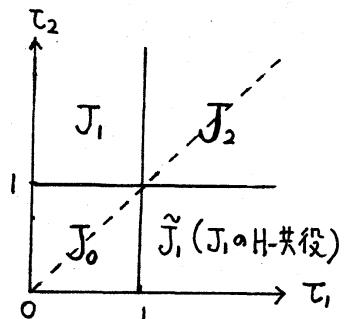


図 1

[点線 ($\tau_1 = \tau_2$) に関する対称性に注意]

分部空間は左図のよう に表わされる。

$$L = 4\tau(\tau-1)\frac{d^2}{d\tau^2} + 4(4\tau-1)\frac{d}{d\tau},$$

$$(L-\lambda)F(\tau, \lambda) = 0, \quad F(1, \lambda) = 1 \quad (\lambda \in \mathbb{C});$$

L_i を L に於いて、 τ を τ_i で置き換えた偏微分作用素、 $\omega(\tau_1, \tau_2) = \tau_1 - \tau_2$

とする。 Ω_1, Ω_2 を $D(X)$ の生成元でその動径部分 $\Omega(\Omega_i)$ が各 Cartan 部分空間上、 $\Omega(\Omega_i) = \omega^{-1}(L_1 + L_2) \omega$,

$\Omega(\Omega_2) = \omega^{-1}L_1L_2\omega$ を満たすものとする。 $\chi_{\lambda_1, \lambda_2}$ ($\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{C}$)

を $\chi_{\lambda_1, \lambda_2}(\Omega_1) = \lambda_1 + \lambda_2$, $\chi_{\lambda_1, \lambda_2}(\Omega_2) = \lambda_1 \lambda_2$ を満たす $D(X)$ の指標とする。 さらに、数的集合 Λ_d, Λ_s を $\rho = \mu + 1$, $\lambda(s) = s^2 - \rho^2$ とする時

$$\Lambda_d = \{\lambda(s) \mid s = \pm(\rho + 2r), r = 0, 1, 2, \dots\} = \{4r(r+3) \mid r = 0, 1, 2, \dots\}$$

$$\Lambda_s = \{\lambda(s) \mid s = \pm(\rho + 2r), r = -1, -2, \dots, -\mu\} = \{4r(r+3) \mid r = -1, -2\} = \{-8\}$$

によつて定義する。

定理 1.1 $\Theta \in \mathcal{D}'_{\chi_{\lambda_1, \lambda_2, H}}(X)$ に對し、 $\pi_l = \Theta|_{J'_l}$,

$u_l = \omega \pi_l$ ($l = 0, 1, 2$) と置く。 この時、以上的記号・

情況のもとで、 infinitesimal character の區別に従かう、以下、事實が成り立つ。

i) $\lambda_1 \neq \lambda_2$ (即ち X_{λ_1, λ_2} が "regular") の場合

適当な定数 $C_1, C_2, C_3, C_4 \in \mathbb{C}$ に付して.

$$(1) \begin{cases} U_0(\tau_1, \tau_2) = C_1 \det(F(\tau_i, \lambda_j))_{i,j=1,2} \\ U_1(\tau_1, \tau_2) = C_2 F(\tau_1, \lambda_1) F(\tau_2, \lambda_2) + C_3 F(\tau_1, \lambda_2) F(\tau_2, \lambda_1) \\ U_2(\tau_1, \tau_2) = C_4 \det(F(\tau_i, \lambda_j))_{i,j=1,2} \end{cases}$$

が成立する。更に (1) の C_1, C_2, C_3, C_4 に付して、次が成立する。

$$(2-1): \lambda_1 \notin \Lambda_d \text{ ならば } C_1 = C_2 = 0$$

$$(2-2): \lambda_2 \notin \Lambda_d \text{ ならば } C_1 = C_3 = 0$$

$$(3-1)^*: \lambda_1 \in \Lambda_s \text{ ならば } C_1 = C_2 = C_3 = C_4 = 0$$

$$(3-2)^*: \lambda_2 \in \Lambda_s \text{ ならば } C_1 = C_2 = C_3 = C_4 = 0$$

ii) $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$ (即ち X_{λ_1, λ_2} が "singular") の場合

$\tilde{F}(\cdot, \lambda)$ を $(L - \lambda)\tilde{F}(\cdot, \lambda) = \tilde{F}(\cdot, \lambda)$ を満たす関数とする。この時、

適当な定数 $C_1, C_2, C_3, C_4 \in \mathbb{C}$ に付して.

$$(1) \begin{cases} U_0(\tau_1, \tau_2) = C_1 \{\tilde{F}(\tau_1, \lambda) \tilde{F}(\tau_2, \lambda) - \tilde{F}(\tau_1, \lambda) F(\tau_2, \lambda)\} \\ U_1(\tau_1, \tau_2) = C_2 F(\tau_1, \lambda) F(\tau_2, \lambda) + C_3 \{F(\tau_1, \lambda) \tilde{F}(\tau_2, \lambda) - \tilde{F}(\tau_1, \lambda) F(\tau_2, \lambda)\} \\ U_2(\tau_1, \tau_2) = C_4 \{F(\tau_1, \lambda) \tilde{F}(\tau_2, \lambda) - \tilde{F}(\tau_1, \lambda) F(\tau_2, \lambda)\} \end{cases}$$

が成立する。更に (1) の C_1, C_2, C_3, C_4 に付して、以下が成立する。

$$(2): \lambda \notin \Lambda_d \text{ ならば } C_1 = C_2 = C_3 = 0$$

$$(3)^*: \lambda \in \Lambda_s \text{ ならば } C_1 = C_2 = C_3 = C_4 = 0$$

註: *) i) (3-2) に於いて、 $\lambda_1 \in \Lambda_S$ 即ち $\lambda_1 = -8$ から直接出る等式は、 $G_1 = -G_3$, $G_2 = G_4$ であるが、 $\lambda_1 \in \Lambda_S$ なら $\Lambda_S \cap \Lambda_d = \emptyset$ より、当然 $\lambda_1 \notin \Lambda_d$ であるから、ii) (2-1) より、 $G_1 = G_2 = 0$ でもあるので、合せせて $G_1 = G_2 = G_3 = G_4 = 0$ となる。同様に、i) (3-2) の $\lambda_2 \in \Lambda_S$ より直接出るのは $G_1 = G_2$, $G_3 = -G_4$ ii) (3) の $\lambda \in \Lambda_S$ より直接出るのは $G_3 = G_4$, $G_2 = 0$ である。(cf. § 6., 系 6.7 系 6.14)

注意 1.2 單に問題に答えるだけではなく、拡張された I.E.D. の形を具体的に示す事も大切である。本稿中で求められた I.E.D. の具体的表示に関する情報は、表 6.1 ①, ② にまとめられていく。

注意 1.3 $\chi_{\lambda_1, \lambda_2}$ が "generic" な場合には、本稿で用いたのとは別種の方法により、split Cartan 部分空間 J_2 に対し、 $(\text{supp } \Theta) \cap J'_2 \neq \emptyset$ となる $\Theta \in \mathcal{D}'_{\chi_{\lambda_1, \lambda_2}, H}(X)$ の存在が知られる。この事と、上の定理[の $\lambda_1, \lambda_2 \notin \Lambda_d \cup \Lambda_S$ の場合]と合せて、定理の逆も示せる。従って。

『 $\chi_{\lambda_1, \lambda_2}$ が "generic" な場合、 $\bigsqcup_{l=0}^2 J'_l$ 上の関数 Π に対して、 $\Theta|_{\bigsqcup_{l=0}^2 J'_l} = \Pi$ となる $\Theta \in \mathcal{D}'_{\chi_{\lambda_1, \lambda_2}, H}(X)$ が存在するための必要十分条件は、 $\Pi|_{J'_1 \cup J'_2} \equiv 0$ かつ $w\Pi|_{J'_0}$ は $\det(F(\tau_i, \lambda_j))_{i,j=1,2}$ のスカラーハ倍となる事である。』

という事になり、この場合、問題に対する解答が得られる。

(この項について教えて下さった大島先生に感謝します。)

注意 1.4 現時点では我々は $\chi_{\lambda_1, \lambda_2}$ が generic の場合はかりではなく、もっと一般に、定理の逆が成り立つ、即ち、定理中に示した条件は、 $\chi_{\lambda_1, \lambda_2}$ の各場合につき、 U_ℓ 達 ($\ell=0, 1, 2$) が定める $\mathcal{D}'_{\chi_{\lambda_1, \lambda_2}, H}(X)$ の元が X 上の I.E.D. I = 拡張可能であるための必要条件であるばかりでなく、十分条件でもあるのではないかと予想している。

本稿末の付録で詳しく述べる事だが、不变積分に関する。

予想： 不变積分の全体 $x\mathcal{R} = \{F_f \mid f \in C_c^\infty(X)\}$ は、

$$\{(1-\tau_1)^\mu (1-\tau_2)^\mu [\varphi_0(\tau_1, \tau_2) + \eta(1-\tau_1)\varphi_1(\tau_1, \tau_2) + \eta(1-\tau_2)\varphi_1(\tau_2, \tau_1) + \eta(1-\tau_1)\eta(1-\tau_2)\varphi_2(\tau_1, \tau_2)]$$

$$\varphi_0, \varphi_1, \varphi_2 \in C_c^\infty([0, \infty) \times [0, \infty)), \varphi_0(\tau_1, \tau_2) = \varphi_0(\tau_2, \tau_1), \varphi_2(\tau_1, \tau_2) = \varphi_2(\tau_2, \tau_1)\}$$

と一致する。ここで $\eta(1-\tau) = I(1-\tau)(1-\tau)^\mu$ である。

が成立するとしよう。この予想は §5 で調べる、semi-regular な半单纯元のまわりでの不变積分の挙動と矛盾しないければならない。特に、nilpotent variety N における H -不变超関数の空間 $\mathcal{D}'_H(X)$ の詳しい研究を可能にする。従って、上の不变積分に関する予想が成立し、さらに付加的な技術上の仮定が成立するとした時、任意の $\chi_{\lambda_1, \lambda_2}$ に対し $\mathcal{D}'_{\chi_{\lambda_1, \lambda_2}, H}(X)$ は決定可能である。(命題 A.5). その系として、定理の逆が示され、I.E.D. の次元については、簡明な公式： $\dim \mathcal{D}'_{\chi_{\lambda_1, \lambda_2}, H}(X) = 2^{\#\{k \mid k=1, 2; \lambda_k \in \Lambda_d\}}$ も示される。

§ 2. 準備

我々はこの節で以下で必要な事実や記号について簡単にまとめておく。 P, q, r を $r \leq P$ を満たす負でない整数とし, $G = U(P, q)$, $H = U(r) \times U(P-r, q)$ とする。序説で触れたようにこの報告では以下 $P=4$, $q=r=2$ と仮定し, $X = G/H = U(4,2)/(U(2) \times U(2,2))$ とおく。また G の Lie 環を \mathfrak{g} とする。

2.1. 一般的事項について。

G の包含的自己同型 σ を

$$\sigma(g) = I_{2,4} g I_{2,4} \quad (g \in G)$$

により定義する。但し, $I_{2,4} = \begin{pmatrix} E_2 & 0 \\ 0 & -E_4 \end{pmatrix}$ とする。すぐに分かるように $H = \{g \in G ; \sigma(g) = g\}$ 。次に σ で安定な極大コンパクト部分群 K をとり, 対応する Cartan involution を θ [e.g. $\theta(g) = {}^t \bar{g}^{-1}$ ($g \in G$)] とする。 σ, θ は \mathfrak{g} の自己同型, あるいは \mathfrak{g} の複素化 \mathfrak{g}_0 の複素線型な自己同型を引き起こすが, これも σ, θ と書き, それらによる \mathfrak{g} の固有分解を $\mathfrak{g} = \mathfrak{g} + \mathfrak{g}^\perp = K + \mathfrak{p}$ とする。 σ と θ は可換であり, \mathfrak{g} , \mathfrak{p} はそれぞれ H, K の Lie 環になる。

\mathfrak{p} を \mathfrak{g} の半単純元達から成る極大可換部分空間とする。

\mathfrak{p} は X の Cartan 部分空間と呼ばれる。容易に分かるように,

Cartan 部分空間の H-共役 class の完全代表系として次の
ようなもの $\{j_0, j_1, j_2\}$ を取ることができる:

$$(2.1) \quad \begin{aligned} j_0 &= \left\{ \begin{smallmatrix} 0 & -\theta_1 & -\theta_2 \\ \theta_1 & 0 & 0 \\ \theta_2 & 0 & 0 \end{smallmatrix} \right\}_2 ; \theta_i \in \mathbb{R} \quad \left(\begin{array}{c|cc|c} \hline & \overset{2}{0} & \overset{2}{-\theta_2} & \overset{2}{0} \\ \hline & \theta_1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)_2 \\ j_1 &= \left\{ \begin{smallmatrix} 0 & 0 & t_2 \\ -\theta_1 & 0 & 0 \\ 0 & \theta_1 & 0 \\ t_2 & 0 & 0 \end{smallmatrix} \right\} ; \theta_1, t_2 \in \mathbb{R} \quad \left(\begin{array}{c|cc|c} \hline & 0 & 0 & t_2 \\ \hline & -\theta_1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & \theta_1 & 0 & 0 \\ \hline t_2 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \\ j_2 &= \left\{ \begin{smallmatrix} 0 & 0 & t_2 \\ 0 & 0 & 0 \\ t_1 & 0 & 0 \end{smallmatrix} \right\} ; t_i \in \mathbb{R} \quad \left(\begin{array}{c|cc|c} \hline & 0 & 0 & t_2 \\ \hline & 0 & 0 & 0 \\ \hline t_1 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \end{aligned}$$

よく知られているように、一般に Cartan 部分空間 j の次元は j に依らず一定であるが、これを X の rank と呼び rank X で表わす。我々の場合 (2.1) から分かるように rank $X = 2$ である。次に $J_\ell = \exp j_\ell H [CX]$ とおこう ($\ell = 0, 1, 2$)。 J_ℓ は群における Cartan 部分群に類似の役割を演ずる。また G の各元 ${}_0 j_{\theta_1, \theta_2}, {}_1 j_{\theta_1, t_2}, {}_2 j_{t_1, t_2}$ をそれぞれ $\exp {}_0 j_{\theta_1, \theta_2}$, $\exp {}_1 j_{\theta_1, t_2}$, $\exp {}_2 j_{t_1, t_2}$ により定義する。そのとき簡単な計算により次のことが成り立つ。(但し、式の中に現われる ± は別に複号同順を意味しない。)

$$(2.2) \quad \left\{ {}_0 j_{\theta_1, \theta_2} H = {}_0 j_{\theta'_1, \theta'_2} H \Leftrightarrow \theta_i \equiv \theta'_i \pmod{\pi} \right.$$

$$\begin{aligned}
 & \left\{ \begin{array}{l} H_0 j_{\theta_1, \theta_2} H = H_0 j_{\theta'_1, \theta'_2} H \Leftrightarrow \begin{cases} (\theta_1 \equiv \pm \theta'_1 \text{ かつ } \theta_2 \equiv \pm \theta'_2) \\ \text{または} \\ (\theta_1 \equiv \pm \theta'_2 \text{ かつ } \theta_2 \equiv \pm \theta'_1) \end{cases} \pmod{\pi} \\ H_1 j_{\theta_1, t_2} H = j_{\theta'_1, t'_2} H \Leftrightarrow \theta_1 \equiv \theta'_1 \pmod{\pi} \text{ かつ } t_2 = t'_2 \\ H_1 j_{\theta_1, t_2} H = j_{\theta'_1, t'_2} H \Leftrightarrow \theta_1 \equiv \pm \theta'_1 \pmod{\pi} \text{ かつ } t_2 = \pm t'_2 \\ j_{t_1, t_2} H = j_{t'_1, t'_2} H \Leftrightarrow t_1 = t'_1, t_2 = t'_2 \end{array} \right. \\
 (2.3) \quad & \left\{ \begin{array}{l} j_{t_1, t_2} H = j_{t'_1, t'_2} H \Leftrightarrow \begin{cases} (t_1 = \pm t'_1 \text{ かつ } t_2 = \pm t'_2) \\ \text{または} \\ (t_1 = \pm t'_2 \text{ かつ } t_2 = \pm t'_1) \end{cases} \end{array} \right. \\
 (2.4) \quad &
 \end{aligned}$$

なお我々は以下いはして Cartan 部分空間

$$(2.5) \quad \tilde{j}_1 = \left\{ \begin{array}{l} \tilde{j}_1 = \left(\begin{array}{c|cc} 0 & -\theta_2 & 0 \\ \hline 0 & 0 & t_1 \\ \hline \theta_2 & 0 & 0 \\ \hline 0 & t_1 & 0 \end{array} \right) ; t_1, \theta_2 \in \mathbb{R} \end{array} \right\}$$

を取り扱う。前と同様, $\tilde{J}_1 = \exp \tilde{j}_1 H$, $j_{t, \theta} = \exp j_{t, \theta} H$ とおけば, $H \tilde{J}_1 = H J_1$, あるいはより詳しく $j_{t, \theta} = h_0 j_{\theta, t} h_0$ が成り立ち, \tilde{j}_1 は j_1 と H -共役であることが分かる。但し,

$$h_0 = \left(\begin{array}{c|c} 1 & \\ \hline & 1 \end{array} \right) \in H$$

とおいた。

j を X の Cartan 部分空間, j_c をその複素化, また j^* を j の双対空間, j_c^* をその複素化とする。 $\lambda \in j_c^*$ に対し,

$$g_c(j, \lambda) = \{x \in g_c; [j, x] = \lambda(j)x \quad (j \in j)\}$$

とおき, さらに $g(j, \lambda) = g_c(j, \lambda) \cap g$, $\Sigma(j) = \{\lambda \in j_c^* - \{0\}; g(j, \lambda) \neq \{0\}\}$ とする。そのとき $\Sigma(j)$ はルート系の公理

を満たすことが知られている。 実際 \mathcal{Y}_c^* の元 α_1, α_2 を

$$(i) \alpha_i(\underline{\lambda}_{\theta_1, \theta_2}) = \theta_i \quad (i=1, 2) \quad (j=j_0 \text{ の場合})$$

$$(ii) \alpha_1(\underline{\lambda}_{\theta_1, t_2}) = \theta_1 \quad (j=j_1 \text{ の場合})$$

$$\alpha_2(\underline{\lambda}_{\theta_1, t_2}) = t_2$$

$$(iii) \alpha_i(\underline{\lambda}_{t_1, t_2}) = t_i \quad (i=1, 2) \quad (j=j_2 \text{ の場合})$$

と定義すると、 $\Sigma(j) = \{\pm \alpha_1, \pm \alpha_2, \pm 2\alpha_1, \pm 2\alpha_2, \pm (\alpha_1 \pm \alpha_2)\}$
が成立することが分かる。特に $\Sigma(j)$ は BC 型 $\Rightarrow \circ$ になる。

ここでルートの分類について復習しておこう。 $\lambda \in \Sigma(j)$ が real [imaginary] とは任意の $\lambda \in j$ に対して $\alpha(j)$ が実数 [純虚数] であるときを云う。また $\lambda \in \Sigma(j)$ が complex であるとは、 α が real でも imaginary でもないことである。
さて (g_c, l_c) の任意のルート λ に対し、 $X_\lambda \in \mathcal{Y}_c(j, \lambda)$ ($X_\lambda \neq 0$) を選んでおき、 $H_\lambda = [X_\lambda, X_{-\lambda}]$ とおく。さらに $l_c = C H_\lambda + g_c(j, \lambda) + g_c(j, -\lambda)$ とおく。そのとき $\lambda \in \Sigma(j)$ を次のように分類する：

(i) real root λ が $\begin{cases} \text{singular} \stackrel{\text{def}}{\iff} l_c \cap (\mathbb{R} \cap g) \neq \{0\} \\ (\text{SR}) \end{cases}$

$\begin{cases} \text{vectorial} \stackrel{\text{def}}{\iff} l_c \cap (\mathbb{R} \cap g) = \{0\} \end{cases}$

(ii) imaginary root λ が $\begin{cases} \text{singular} \stackrel{\text{def}}{\iff} l_c \cap (\mathbb{C} \cap g) \neq \{0\} \\ (\text{SI}) \end{cases}$

$\begin{cases} \text{compact} \stackrel{\text{def}}{\iff} l_c \cap (\mathbb{C} \cap g) = \{0\} \end{cases}$.

("Vectorial" の用語は佐野茂氏による。)

我々の場合では、 $\alpha \in \Sigma(j)$ は各 $j = j_0, j_1, j_2$ に応じて次の表のようになる。

$\Sigma(j)$	$\pm\alpha_1$	$\pm\alpha_2$	$\pm 2\alpha_1$	$\pm 2\alpha_2$	$\pm(\alpha_1 \pm \alpha_2)$
$j = j_0$	SI	SI	SI	SI	compact
$j = j_1$	SI	SR	SI	SR	complex
$j = j_2$	SR	SR	SR	SR	vectorial
重複度	2μ	2μ	1	1	2

表 2.1 $(\mu=2)$

さて X 上の函数 D_i を次の公式によって定義する：

$$\det((t+1) \text{Id}_g - \text{Ad}_G(g\sigma(g)^{-1})) = \sum_{i=0}^{\dim G} D_i(gH) t^i.$$

そして t を $D_i \neq 0$ となる i のうちの最小のものとする。そのとき $gH \in X$ が regular semisimple (または X -regular) とは、 $D_k(gH) \neq 0$ のときをいう。また $gH \in X$ が nilpotent であるとは g の自己同型 $\text{Ad}_G(g\sigma(g)^{-1})$ が unipotent になる時にいう。 X の中の nilpotent 元全体の集合は nilpotent variety と呼ばれ N によって表わす。さらに X の中の regular semisimple 元全体の集合を X' 、 T_e と X' の共通部分を T'_e によって表わす ($e=0, 1, 2$)。容易に分かるように、

$$(2.6) \quad \left\{ \begin{array}{l} (\text{i}) \quad j_{\theta_1, \theta_2} H \in T'_0 \iff \theta_1, \theta_2 \neq 0, \frac{\pi}{2} \pmod{\pi} \text{かつ } \theta_1 \neq \pm \theta_2 \pmod{\pi} \\ (\text{ii}) \quad j_{\theta_1, t_2} H \in T'_1 \iff \theta_1 \neq 0, \frac{\pi}{2} \pmod{\pi} \text{かつ } t_2 = 0 \\ (\text{iii}) \quad j_{t_1, t_2} H \in T'_2 \iff t_1, t_2 \neq 0 \text{かつ } t_1 \neq \pm t_2. \end{array} \right.$$

我々は以下の便宜の為、各 \mathcal{J}_l に対して、 τ_i を

- (1) $\tau_i = \cos^2 \theta_i \quad (i=1, 2) \quad (\mathcal{J}_0 \text{ に対して})$
(2) $\tau_1 = \cos^2 \theta_1, \tau_2 = \cosh^2 t_2 \quad (\mathcal{J}_1 \text{ に対して})$
(3) $\tau_i = \cosh^2 t_i \quad (i=1, 2) \quad (\mathcal{J}_2 \text{ に対して})$
(4) $\tau_1 = \cosh^2 t_1, \tau_2 = \cos^2 \theta_2 \quad (\tilde{\mathcal{J}}_1 \text{ に対して})$

とおいて、(パラメータ θ_i, t_i の代わりに) パラメータ τ_i を用いる

ことが多い。実際、 $F(x)$ を X 上の H -不変関数 [i.e.

$F(Rx) = F(x), (R \in H)$] としよう。そのとき $F(x)$ は (2.2)

~ (2.4) を用いて、 $\bigcup_{l=0}^2 H \mathcal{J}'_l$ 上 (あるいは $H \tilde{\mathcal{J}}'_1$ 上) で、 τ_1, τ_2

による関数 $F(\tau_1, \tau_2)$ とみなすことができる。またこの

関数 $F(\tau_1, \tau_2)$ は (2.2), (2.4) 及び $H \tilde{\mathcal{J}}'_1 H = H \mathcal{J}'_0 H$

から、 $F(\tau_1, \tau_2) = F(\tau_2, \tau_1)$ を満たすことがある。

次に、 \mathcal{J}_l 上の函数 Δ_l を

$$(2.8) \quad \begin{aligned} \Delta_l(\exp j H) &= \prod_{\lambda \in \Sigma^+(j_l)} (e^{\alpha_i(j)} - e^{-\alpha_i(j)})^{m_\lambda} \\ &= \prod_{i=1}^2 (e^{\alpha_i(j)} - e^{-\alpha_i(j)})^{2\mu} (e^{2\alpha_i(j)} - e^{-2\alpha_i(j)}) \\ &\quad \times (e^{(\alpha_1 + \alpha_2)(j)} - e^{-(\alpha_1 + \alpha_2)(j)})^2 (e^{(\alpha_1 - \alpha_2)(j)} - e^{-(\alpha_1 - \alpha_2)(j)}) \\ &\quad (\forall j \in j_l; l=0, 1, 2) \end{aligned}$$

により定義する。但し、 $\Sigma^+(j_l)$ は (j_l, j_l) の正のルート全体、 m_λ は λ の重複度で表 2.1 により与えられる。 Δ_l は後述の Weyl の積分公式 (4.4) に現われる Jacobian である。この Δ_l をパラメータ τ_i で表示すると、簡単な計算

から、

$$(2.9) \quad \Delta_l (\exp \frac{i}{\lambda} H) dt_1 dt_2 = C (1-\tau_1)^{\mu} (1-\tau_2)^{\mu} (\tau_1 - \tau_2)^2 d\tau_1 d\tau_2$$

$(\frac{i}{\lambda} \in \mathbb{R}; l=0,1,2)$

が成り立つことが分かる。但し $\frac{i}{\lambda}$ は $l=0,1,2$ に応じて
それぞれ $\frac{i}{\lambda} = \frac{i}{\lambda} \theta_1, \theta_2$, $\frac{i}{\lambda} = \frac{i}{\lambda} \theta_1, t_2$, $\frac{i}{\lambda} = \frac{i}{\lambda} t_1, t_2$ であるとし、また
 C は $\frac{i}{\lambda} \in \mathbb{R}$ 及び l に依らずの定数、 μ はより一般の半準
純対称空間 $U(P,q) / (U(r) \times U(P-r,q))$ に対し、

$$(2.10) \quad \mu = p+q-2r$$

によって定義された整数で($p=4, q=r=2$ である)今の場合
 $\mu = 2$ である。
[(2.9)をわざわざ μ を用いて表わしたのは、
 $r=2$ の時には (2.9) が一般の p, q の場合にも通用するか
らである。以後 μ を用いた式が出てきた場合、その式は
任意の p, q 及び $r=2$ に対して一般化できる。] $\tau_1 - \tau_2$
は以後しばしば記号:

$$(2.11) \quad \omega = \tau_1 - \tau_2$$

で表わすことが多い。

2.2. $Z_G(A)/Z_H(A)$ について。

この小節で、我々は群の場合の semi regular element に相応
する X の元達〔後述の集合 A^e, A^\pm の元達〕の中心化群、及びそれ
から生じる rank 1 対称空間について述べる。今後我々はしばし

は $X = G/H$ を埋め込み写像：

$$(2.12) \quad G/H \hookrightarrow G : gH \mapsto g\sigma(g)^{-1}$$

により群 G の中に実現して考える。また $g\sigma(g)^{-1}$ は $\widehat{\sigma}(gh)$ あるいは $\widehat{\sigma}(g)$ で表わすことにする。さらに A を X の部分空間としたとき $Z_G(A)$, $Z_H(A)$ により、それぞれ $\widehat{\sigma}(x)$; $x \in A$ の G または H の中における中心化群として, X_A $= Z_G(A)/Z_H(A)$ とおく:

$$Z_G(A) = \{ g \in G ; g\widehat{\sigma}(x) = \widehat{\sigma}(x)g \quad (x \in A) \}$$

$$Z_H(A) = \{ h \in H ; h\widehat{\sigma}(x) = \widehat{\sigma}(x)h \quad (x \in A) \}.$$

また, $A' = \{ gh \in A ; \dim Z_G(\{gh\}) = \dim Z_G(A) \}$ とする。一般に A が σ 安定かつ θ 安定の場合には, X_A は $X_{A'} \subset X$ と考えたとき X の中の閉集合であることが容易に示せる。このことから X_A の位相は X の相対位相になっていることが分かる (cf. 命題 4.2 の証明)。

さて我々はまず $A = A_1 = J_1 \cap J_2$ とおき $X_{A'_1}$ について考察しよう。この場合 $Z_G(A'_1)$, $Z_H(A'_1)$ は定義から容易に計算できるように,

$$(2.13) \quad Z_G(A'_1) = \left\{ \begin{pmatrix} e^{i\varphi} \cosh t & e^{i\varphi} \sinh t \\ e^{i\varphi} \sinh t & e^{i\varphi} \cosh t \end{pmatrix}; U_4 \in U(3,1) \right\}, \quad \varphi, t \in \mathbb{R}$$

$$Z_H(A'_1) = \left\{ \begin{pmatrix} e^{i\varphi} & & \\ & U_4 & \\ & & e^{i\varphi} \end{pmatrix}; U_4 \in U(1) \times U(2,1) \right\}, \quad \varphi \in \mathbb{R}.$$

従って $Z_G(A'_1) \cong U(3,1) \times \mathbb{R} \times \mathbb{T}$, $Z_H(A'_1) \cong U(1) \times U(2,1)$
 $\times \mathbb{T}$, $X_{A'_1} \cong (U(3,1)/(U(1) \times U(2,1))) \times \mathbb{R}$ [\mathbb{T} は1次元ト
ーラス] となって, $X_{A'_1}$ [は rank 1 の半準純対称空間と \mathbb{R} の
直積となる。また $jH \in A'_1$ とするとき, $X_{jH} = X_{A'_1} =$
 X_{A_1} となることも明らかである。同様にして $A_0 = J_0 \wedge J_1$
とおくとき,

$$(2.14) \quad Z_G(A'_0) = Z_G(A_0) = \left\{ \begin{pmatrix} a & e^{i\varphi} \cos \theta & e^{i\varphi} \sin \theta & b \\ c & -e^{i\varphi} \sin \theta & e^{i\varphi} \cos \theta & d \end{pmatrix}; \begin{cases} (a, b) \in U(2,2) \\ a \in \mathbb{C}; b, c \in \mathbb{C}^3 \\ d \in M_3(\mathbb{C}) \\ \varphi, \theta \in \mathbb{R} \end{cases} \right\}$$

$$Z_H(A'_0) = Z_H(A_0) = \left\{ \begin{pmatrix} a & e^{i\varphi} & & \\ & e^{i\varphi} & & \\ & & d & \end{pmatrix}; \begin{cases} a \in U(1), d \in U(1,2); \\ \varphi \in \mathbb{R} \end{cases} \right\}.$$

また $|A = |A_+ = \{ j \frac{\pi}{2}, tH; t \in \mathbb{R} \}$, $|A = |A_- = \{ \theta j \frac{\pi}{2}, \theta H; \theta \in \mathbb{R} \}$
のときにはそれぞれ,

$$(2.15) \quad Z_G(A'_+) = Z_G(A_+) = \left\{ \begin{pmatrix} e^{i\varphi} \cosh t & u_2 & e^{i\varphi} \sinh t & \\ & u_2' & u_2' & \\ e^{i\varphi} \sinh t & & e^{i\varphi} \cosh t & \end{pmatrix}; \begin{cases} u_2 \in U(2) \\ u_2' \in U(1,1) \\ \varphi, t \in \mathbb{R} \end{cases} \right\}$$

$$Z_H(A'_+) = Z_H(A_+) = \left\{ \begin{pmatrix} e^{i\varphi} & u & & \\ u & u' & & \\ & u_2' & & \\ & & e^{i\varphi} & \end{pmatrix}; \begin{cases} u, u' \in U(1) \\ u_2' \in U(1,1) \\ \varphi \in \mathbb{R} \end{cases} \right\}$$

$$(2.16) \quad Z_G(A'_-) = Z_G(A_-) = \left\{ \begin{pmatrix} e^{i\varphi} \cos \theta & u_2 & e^{i\varphi} \sin \theta & \\ -e^{i\varphi} \sin \theta & u_2' & e^{i\varphi} \cos \theta & \\ & & u_2' & \end{pmatrix}; \begin{cases} u_2, u_2' \in U(2) \\ \varphi, \theta \in \mathbb{R} \end{cases} \right\}$$

$$Z_H(A'_-) = Z_H(A_-) = \left\{ \begin{pmatrix} e^{i\varphi} & u & & \\ u & u' & & \\ & u' & e^{i\varphi} & \\ & & & u_2' \end{pmatrix}; \begin{cases} u, u' \in U(1) \\ u_2' \in U(2) \\ \varphi \in \mathbb{R} \end{cases} \right\}$$

と表わせる。 [$\tilde{\sigma}(j\frac{\pi}{2}, t) = j\pi, zt$, $\tilde{\sigma}(0\frac{\pi}{2}, \theta) = 0\pi, z\theta$ などに注意。] $A = A_2 = \{j_2\delta t, tH; t \in \mathbb{R}\}$, $A = A_{-1} = \{j_0\delta \theta, \theta H; \theta \in \mathbb{R}\}$ に対しても同様にして結局次の補題が成り立つことが分かる。

補題 2.1. $A_\ell (-1 \leq \ell \leq 2)$, A_\pm を上記のように定義したとき, 各 $X_{A'}$ は表 2.2 の ① のような rank 1 の半單純対称空間と同型になる。また $X_{A'}$ の Cartan 部分空間の $Z_h(A)$ -共役 class としては, $X_{A'}$ を自然な同一視により X の部分集合と見た時, 表 2.2 の ② に列挙した X の Cartan 部分空間連を取ることができる。

A	$X_{A'}$ と同型な対称空間 ①	②
$A_1 = J_1 \cap J_2$	$X_{A_1}^S \times \mathbb{R}$ [$X_{A_1}^S = U(3,1)/(U(1) \times U(2,1))$]	J_1, J_2
$A_0 = J_0 \cap J_1$	$X_{A_0}^S \times \mathbb{T}$ [$X_{A_0}^S = U(2,2)/(U(1) \times U(1,2))$]	J_0, J_1
$A_+ = \{j\frac{\pi}{2}, tH; t \in \mathbb{R}\}$	$X_{A_+}^S \times \mathbb{R}$ [$X_{A_+}^S = U(2)/(U(1) \times U(1))$]	J_1
$A_- = \{j\frac{\pi}{2}, \theta H; \theta \in \mathbb{R}\}$	$X_{A_-}^S \times \mathbb{T}$ [$X_{A_-}^S = U(2)/(U(1) \times U(1))$]	J_0
$A_2 = \{j_2\delta t, tH; t \in \mathbb{R}\}$	$X_{A_2}^S \times \mathbb{R}$ [$X_{A_2}^S = O(3,1)/O(3)$]	J_2
$A_{-1} = \{j_0\delta \theta, \theta H; \theta \in \mathbb{R}\}$	$X_{A_{-1}}^S \times \mathbb{T}$ [$X_{A_{-1}}^S = O(4)/O(3)$]	J_0

表 2.2

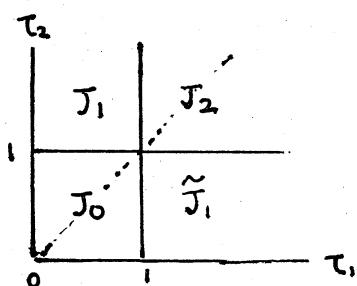


図 2.1

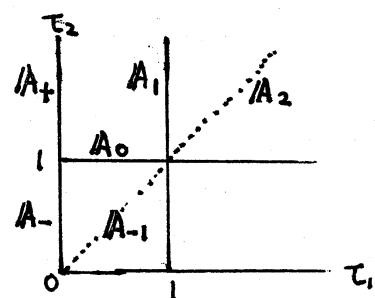


図 2.2

§3. 不変微分作用素とその動径部分

対称空間 $X = G/H$ 上の H -不変微分作用素環を $D(X)$ で表す。

$D \in D(X)$ に對して、 $\Omega^\ell(D)$ を Cartan 部分空間 J_ℓ に対する D の動径部分 (radial component) 即ち、

$$(3.1) \quad \Omega^\ell(D)(f|_{J_\ell}) = (Df)|_{J_\ell}$$

が任意、 $f \in C_c^\infty(H, J_\ell')$ に對して成立するという条件で、一意的に定まる J_ℓ' 上の微分作用素とする。常微分作用素 L を

$$(3.2) \quad L = a(\tau) \frac{d^2}{d\tau^2} + b(\tau) \frac{d}{d\tau}; \quad a(\tau) = 4\tau(\tau-1) \\ b(\tau) = 4\{(m+2)\tau-1\} = 4(4\tau-1)$$

と定める。 L の formal adjoint L^* は、

$$(3.3) \quad L^* = (1-\tau)^\mu L (1-\tau)^{-\mu} = (1-\tau)^2 L (1-\tau)^{-2}$$

が成り立つ。

$$(3.2') \quad L_i = a(\tau_i) \frac{\partial^2}{\partial \tau_i^2} + b(\tau_i) \frac{\partial}{\partial \tau_i}$$

と置く。[Hoogenboom 5; Theorem 5] から、我々の議論の出発点となる次の補題が成立する。

補題 3.1 “ τ -変数”のもとで、(cf. (2.7)) $D(X)$ が $\{S(\omega^1 L_1 \omega, \omega^1 L_2 \omega) \mid S \text{は } 2 \text{変数対称多項式}\}$ の上への同型写像 Ω が存在して。任意、 $D \in D(X)$; $\ell = 0, 1, 2$ に對して。

$$(3.4) \quad \Omega^\ell(D)|_{J_\ell'} = \Omega^\ell(D)$$

が成立する。

定義 3.2

Ω_1, Ω_2 を

$$(3.5) \quad \mathfrak{I}(\Omega_1) = \omega^{-1}(L_1 + L_2)\omega, \quad \mathfrak{I}(\Omega_2) = \omega^{-1}L_1 L_2 \omega$$

を満足する $D(X)$ の元とする。 $D(X)$ は、補題 3.1 より、 Ω_1, Ω_2 を自由生成元とする多項式環となるので、 $D(X)$ の指標 $X: D(X) \rightarrow \mathbb{C}$ と、順序を考えない複素数の対 (λ_1, λ_2) との間に（従って集合 $\{\lambda_1, \lambda_2\}$ との間に）次式によつて定まる全単射がある。

$$(3.6) \quad X(\Omega_1) = \lambda_1 + \lambda_2, \quad X(\Omega_2) = \lambda_1 \lambda_2$$

この全単射により、 (λ_1, λ_2) に対応する $D(X)$ の指標 X を $\chi_{\lambda_1, \lambda_2}$ と書く。定義から $\chi_{\lambda_1, \lambda_2} = \chi_{\lambda_2, \lambda_1}$ である。 $\lambda_1 \neq \lambda_2$ のとき、 $\chi_{\lambda_1, \lambda_2}$ は regular であるといひ、 $\lambda_1 = \lambda_2$ のとき、 $\chi_{\lambda_1, \lambda_2}$ は singular であると言ふことにすこ。

$\Theta \in D'_{\chi_{\lambda_1, \lambda_2}, H}(X)$ に対して、

$$(3.7) \quad \pi_e = \Theta|_{J'_e}, \quad u_e = \omega \pi_e = \omega \Theta|_{J'_e}$$

と置くと、 $u = u_e$ ($e = 0, 1, 2$) は 微分方程式

$$(3.8.1) \quad (L_1 + L_2) u = (\lambda_1 + \lambda_2) u$$

(3.8.2) $L_1 L_2 u = \lambda_1 \lambda_2 u$
を満たす。

補題3.3 $u(\tau_1, \tau_2)$ が " $\{(\tau_1, \tau_2) \mid \tau_1, \tau_2 \geq 0\}$ のある領域で "

微分方程式 (3.8.1) (3.8.2) を満たすと、同じ領域で、 u は、

$$(3.9) \quad (L_i - \lambda_1)(L_i - \lambda_2) u = 0 \quad (i=1, 2)$$

という微分方程式を満足する。

証明 各 $i=1, 2$ に対して

$$\begin{aligned} (L_i - \lambda_1)(L_i - \lambda_2) u &= L_i^2 u - L_i(\lambda_1 + \lambda_2)u + \lambda_1 \lambda_2 u \\ &= L_i^2 u - L_i(L_1 + L_2)u + L_1 L_2 u \\ &= (L_i - L_1)(L_i - L_2)u \\ &= 0 \end{aligned}$$

□

この補題3.3から、ます。

$$(3.9)' \quad (L - \lambda_1)(L - \lambda_2) F = 0$$

の解を調べておく事が有効となる。以下、 $(0, 1)$ 又は $(1, \infty)$ [あるいはそれより部分開区間] に着目して考える。微分方程式 $(L - \lambda) F = 0$ の一次独立な 2 つの解を $F_1(\tau, \lambda), F_2(\tau, \lambda)$ とする。従って、

$$(3.10.1) \quad (L - \lambda) F_i(\tau, \lambda) = 0 \quad (i=1, 2)$$

そして、 $F_3(\tau, \lambda), F_4(\tau, \lambda)$ を。

$$(3.10.2) \quad (L - \lambda) F_{i+2}(\tau, \lambda) = F_i(\tau, \lambda) \quad (i=1, 2)$$

となるようになる。すると、(3.9) の解全体のなす 4 次元空間の基底としては、

- i) $\lambda_1 \neq \lambda_2$ のときは、 $\{F_1(\tau, \lambda_1), F_2(\tau, \lambda_1), F_1(\tau, \lambda_2), F_2(\tau, \lambda_2)\}$
- ii) $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$ のときは、 $\{F_1(\tau, \lambda), F_2(\tau, \lambda), F_3(\tau, \lambda), F_4(\tau, \lambda)\}$
が取れる。

各 Cartan 部分空間 J_ℓ ($\ell=0, 1, 2$) に對し、 $\{(\tau_1, \tau_2) \mid 0 \leq \tau_1 \leq \tau_2\}$ 内に
 $J'_\ell = J_\ell \cap X'$ に對応する領域を取る (cf. (2.7))、以下、本節では、その
上で考える。こう考えた時、各領域は連結である事を注意しておく。

(cf. 図 1.1, (2.7)) $\{F_i(\tau, \lambda) \mid i=1, 2, 3, 4\} \cup \{\tilde{F}_i(\tau, \lambda) \mid i=1, 2, 3, 4\} \Sigma$

$$(3.10') \quad \begin{aligned} (L - \lambda) F_i &= 0 & (L - \lambda) F_{i+2} &= F_i & (i=1, 2) \\ (L - \lambda) \tilde{F}_i &= 0 & (L - \lambda) \tilde{F}_{i+2} &= \tilde{F}_i \end{aligned}$$

を満たす $\{F \mid (L - \lambda)^2 F = 0\}$ の 2 組の基底とする。

補題 3.4 $\{(\tau_1, \tau_2) \mid 0 \leq \tau_1 \leq \tau_2\}$ 内の上記・各領域に於ける連立微分方程式 (3.9) の解空間は 16 次元であり。解は次のようには表せられる。

- i) $\lambda_1 \neq \lambda_2$ のとき。

$$(3.11) \quad u(\tau_1, \tau_2) = \sum_{\substack{i,j=1,2 \\ k_1, k_2=1,2}} C_{ij}^{k_1, k_2} F_i(\tau_1, \lambda_{k_1}) \tilde{F}_j(\tau_2, \lambda_{k_2}) \quad (C_{ij}^{k_1, k_2} \in \mathbb{C})$$

- ii) $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$ のとき。

$$(3.12) \quad u(\tau_1, \tau_2) = \sum_{i,j=1,2,3,4} C_{ij} F_i(\tau_1, \lambda) \tilde{F}_j(\tau_2, \lambda) \quad (C_{ij} \in \mathbb{C})$$

補題 3.5 上記各領域上の連立微分方程式 (3.8.1) (3.8.2)

の解空間は 8 次元であり。解 u は次のようには表わされる。

i) $\lambda_1 \neq \lambda_2$ のとき。

$$(3.13) \quad u(\tau_1, \tau_2) = \sum_{\substack{i,j=1,2 \\ k=1,2}} C_{ij}^k F_i(\tau_1, \lambda_k) \tilde{F}_j(\tau_2, \lambda_k) \quad (C_{ij}^k \in \mathbb{C})$$

但し、

$$(3.14) \quad k' = \begin{cases} 2 & (k=1) \\ 1 & (k=2) \end{cases}.$$

ii) $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$ のとき。

$$(3.12) \quad u(\tau_1, \tau_2) = \sum_{i,j=1,2,3,4} C_{ij} F_i(\tau_1, \lambda) \tilde{F}_j(\tau_2, \lambda) \quad (C_{ij} \in \mathbb{C})$$

但し、 C_{ij} は次式を満たす。

$$(3.15) \quad C_{i+2,j} = -C_{i,j+2}, \quad C_{i+2,j+2} = 0 \quad (i,j=1,2)$$

即ち、 $C_{ij}^1, C_{ij}^2 \in \mathbb{C}$ とするとき。

$$(3.16) \quad u(\tau_1, \tau_2) = \sum_{i,j=1,2} \left[C_{ij}^1 F_i(\tau_1, \lambda) \tilde{F}_j(\tau_2, \lambda) + C_{ij}^2 \left\{ F_i(\tau_1, \lambda) \tilde{F}_{j+2}(\tau_2, \lambda) - F_{i+2}(\tau_1, \lambda) \tilde{F}_j(\tau_2, \lambda) \right\} \right]$$

註：我々が主として関心をもつのは、 $\tilde{F}_i = F_i$ ($i=1,2,3,4$) の場合（しかも、さらには F_i を本節末の指定 1=従、2 取、左場合）である。しかし、上の形で、補題 3.5 を利用する機会もある。

証明 補題 3.3 及び補題 3.4 により、 $u(\tau_1, \tau_2)$ は、i), ii) の場合にそれぞれ、(3.11), (3.12) の形をしていえる。

i) $\lambda_1 \neq \lambda_2$ のとき、(2.11) を (3.8.1) に代入した式より。

$$\sum_{k_1, k_2, i, j=1,2} (\lambda_{k_1} + \lambda_{k_2} - \lambda_1 - \lambda_2) C_{ij}^{k_1, k_2} F_i(\tau_1, \lambda_{k_1}) F_j(\tau_2, \lambda_{k_2}) = 0$$

$\{ F_i(\tau_1, \lambda_{k_1}) F_j(\tau_2, \lambda_{k_2}) \mid \begin{matrix} i, j = 1, 2 \\ k_1, k_2 = 1, 2 \end{matrix} \}$ は一次独立だから。

$$(\lambda_{k_1} + \lambda_{k_2} - \lambda_1 - \lambda_2) C_{ij}^{k_1, k_2} = 0 \quad (i, j, k_1, k_2 = 1, 2)$$

$\lambda_1 \neq \lambda_2$ より $\lambda_{k_1} + \lambda_{k_2} - \lambda_1 - \lambda_2 = 0$ と k_1, k_2 は同値だから。

$k_1 = k_2$ のとき $C_{ij}^{k_1, k_2} = 0 \quad (i, j = 1, 2)$ より $U(\tau_1, \tau_2)$ は $C_{ij}^k = C_{ij}^{k, k}$ とおなじ。 (3.13) の形をした。 遂に (3.13) の形の $U(\tau_1, \tau_2)$ は (3.8.1), (3.8.2) を満たす。

ii) $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$ のとき、 (3.12) の両辺に $(L_1 + L_2 - 2\lambda)$ を作用せよ。

$$\begin{aligned} (L_1 + L_2 - 2\lambda) U(\tau_1, \tau_2) &= \sum_{i, j=1, 2, 3, 4} C_{ij} \{ (L_1 - \lambda) F_i \tilde{F}_j + F_i^* (L_2 - \lambda) \tilde{F}_j \} \\ &= \sum_{i, j=1, 2} [(C_{i+2, j} + C_{i, j+2}) F_i \tilde{F}_j + C_{i+2, j+2} (F_i \tilde{F}_{j+2} + \tilde{F}_{i+2} F_j)] \end{aligned}$$

よって (3.8.1) は $\{ F_i(\tau_1, \lambda) \tilde{F}_j(\tau_2, \lambda) \mid i, j = 1, 2, 3, 4 \}$ の一次独立性より (3.15) と同値である。遂に (3.15) を満たす (3.12) 式即ち 5.

$$(3.17) \quad C_{ij}^1 = C_{ij}, \quad C_{ij}^2 = C_{i, j+2} \quad (i, j = 1, 2)$$

という定数名の置きかえはよい。これが (3.16) 式に対するは明らかに (3.8.2) が成立する。 \square

以下 $(0, 1) \cup (1, \infty)$ 上、 (3.10.1), (3.10.2) を満たす F_1, F_2, F_3, F_4 を一組指定する。次節以下では、特にことわらなければ限り、この F_1, F_2, F_3, F_4 を用いる事とする。[我々の指定は、本節末の表にまとめある。]

常微分方程式 $(L - \lambda)F = 0$ は.

$$(3.18) \quad \alpha + \beta + 1 = 2 + \mu, \quad \alpha\beta = -\frac{\lambda}{4}, \quad \gamma = 1$$

即ち.

$$(3.18') \quad \begin{aligned} \alpha &= \frac{1}{2}(s + \mu + 1) && \text{但し } s = \sqrt{\lambda + (1+\mu)^2} \\ \beta &= \frac{1}{2}(-s + \mu + 1) \\ \gamma &= 1 \end{aligned}$$

に対する超幾何微分方程式

$$(3.19) \quad \tau(1-\tau)\frac{d^2}{d\tau^2}F + \{\gamma - (\alpha + \beta + 1)\tau\}\frac{d}{d\tau}F - \alpha\beta F = 0$$

他ならぬから、周知の事実(たゞ云ばず[大#6]の§13特にp.83参照)より、 $\lim_{\tau \rightarrow 1} F_1(\tau, \lambda) = 1$ となるように F_1 をとると、超幾何関数 $F(\alpha, \beta, \gamma; z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\alpha)_k (\beta)_k}{k! (\gamma)_k} z^k$ (但し

$$(\alpha)_k = \alpha(\alpha+1)\cdots(\alpha+k-1) \quad (k \geq 1), \quad (\alpha)_0 = 1$$

$$(3.20) \quad F_1(\tau, \lambda) = F(\alpha, \beta, \mu+1; 1-\tau)$$

であり。 F_2 は、初項 $((1-\tau))$ に $\frac{1}{2}$, $-\mu = -2$ 次の項の係数は 1, 定数項は 0 となるものを取ると.

$$(3.21) \quad \begin{aligned} F_2(\tau, \lambda) &= \sum_{k=0}^{\mu-1} \frac{(\alpha-\mu)_k (\beta-\mu)_k}{k! (\mu-k)!} (1-\tau)^{k-\mu} \\ &\quad + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{\mu-1} (\alpha-\mu)_{\mu+k} (\beta-\mu)_{\mu+k}}{k! (\mu-1)! (\mu+k)!} \times \sum_{j=0}^{k-1} \left(\frac{1}{\alpha+j} + \frac{1}{\beta+j} \right) \\ &\quad \times \frac{1}{\mu+1-j} - \frac{1}{1+j} \\ &\quad + \frac{(-1)^{\mu-1}}{\mu! (\mu-1)!} \prod_{k=1}^{\mu} (\alpha-k)(\beta-k) \log|1-\tau| \times F(\alpha, \beta, \mu+1; 1-\tau) \end{aligned}$$

となる。ここで、又は β が $1, 2, \dots, \mu$ のいずれかと等しい時、即ち、 $\lambda \in \Lambda_s$ のとき、(3.21) の右辺の第2項、第3項はともに 0 であり、 $F_2(\tau, \lambda) = (1-\tau)^{\mu} F(\alpha-\mu, \beta-\mu, 1-\mu; 1-\tau)$ となる。さらには、

$$(3.22) \quad \begin{aligned} & (L - \lambda) \sum_{i \geq i_0} g_i (1-\tau)^i \\ &= \sum_{i \geq i_0} [4(\mu+i+1) \{ig_i - (i+1)g_{i+1}\} - \lambda g_i] (1-\tau)^i \\ & \quad - 4i_0(i_0+\mu) g_{i_0} (1-\tau)^{i_0-1} \end{aligned}$$

より、 $(L - \lambda)F_3 = F_1$ を満たす。 $F_3(\tau, \lambda) = \sum_{i \geq 1} g_i (1-\tau)^i$, $g_1 = 1$ という展開をもつ実解析関数 F_3 が、唯一つ定まる。 $(\mu \geq 2$ のとき)
 $\lim_{\tau \rightarrow 1^-} (1-\tau)^{\mu-1} F_4(\tau, \lambda) = 1$; $F_4(\tau, \lambda)$ の定数項は 0 という条件により、 $(L - \lambda)F_4 = F_2$ を満たす F_4 を一意に指定する。

最後に、参考の便宜のため、上に述べた F_1, F_2, F_3, F_4 の指定を表にまとめておく。

[註*]: 展開における $\tau \rightarrow 1^-$ の主要項。 [$\mu \geq 2$ の場合]

		$F_1(\tau, \lambda)$	$F_2(\tau, \lambda)$	$F_3(\tau, \lambda)$	$F_4(\tau, \lambda)$
定義	満足する 微分方程式	$(L - \lambda)F_1 = 0$	$(L - \lambda)F_2 = 0$	$(L - \lambda)F_3 = F_1$	$(L - \lambda)F_4 = F_2$
	$(1-\tau)$ に 関 す る 展 開	初項* の形 (定数)	1 (定数)	$(1-\tau)^{-\mu}$	$(1-\tau)^{1-\mu}$
具体的な形		(3.20)	(3.21)	—	—

表 3.1 [以下 特記無し限り。 F_1, F_2, F_3, F_4 はこの表のものをさす]

§4. 不変積分——階数1への reduction

この節では、まず不变積分の定義・基本的性質を述べたあと、 X 上の不变積分を、 A (表2.2を見よ)のcentralizerから生ずる。階数1の半单纯対称空間 X_A^S と自明な一次元対称空間 X_A^T の直積の対称空間 $X_A = X_A^S \times X_A^T$ の上、不变積分を同一視する。
 (命題4.6) これは X のsemi-regularな半单纯元 $j_0 \in A'$ (§2.2を参照)のまわりの、 H -不变超関数、特に、I.E.D.の研究で、高階対称空間 X から、階数1の対称空間 X_A^S へ舞台を移して行なう基礎が出来る。

定義4.1

$f \in C_c(X)$ に付けて、

$$(4.1) \quad xF_f(j) = F_f(j) = \int_{H/Z_H(J_\ell)} f(h \cdot j) d\tilde{h} \quad (\ell = 0, 1, 2)$$

を f の不变積分(invariant integral)と呼ぶ。

ここで、 $H/Z_H(J_\ell)$ ($\ell = 0, 1, 2$) 上の H -不变測度は、

$$(4.2) \quad \int_{H/Z_H(J_\ell)} f(h \cdot j) d\tilde{h} = \int_{H/Z_H(A_k)} \int_{Z_H(A_k)/Z_H(J_{k+1})} f(h \cdot \tilde{z} \cdot j) d\tilde{z} d\tilde{h} \quad (\begin{matrix} k=0, 1 \\ \ell=k, k+1 \end{matrix})$$

によ、2定まるもとのとする。(cf.(2.9)) 但し、 $k=0, 1$ 付けて、

$Z_H(A_k)/Z_H(J_k)$ と $Z_H(A_k)/Z_H(J_{k+1})$ は、階数1の対称空間 $X_{A_k}^S$ (cf.表2.2)上の不变積分の定義にあらわれた coset space と自然に同型であるから、この上での不变測度といへば、 $X_{A_k}^S$ の

不変積分の定義に用いられるものを取る。(cf. [Faranut 2], [Aoki-Kato 1; p.4]) また, $H/Z_{\mathbb{H}}(A_k)$ ($k=0,1$) の不変測度としては, (4.2) 式か¹, $\ell=1; k=0,1$ に対して, 矛盾なく成立するものを取る。

xF_f は, $\bigsqcup_{\ell=0}^2 J'_\ell \subset X$ 上の関数であるか, Weyl 群不变である (cf. (2.2)~(2.4)) ことより, $\bigsqcup_{\ell=0}^2 J'_\ell$ を (2.7) 1=よ, 2. $\{(\tau_1, \tau_2) \mid 0 \leq \tau_1 \leq \tau_2\}$ 内に移して考え, (τ_1, τ_2) -変数の関数と見る事が出来る。さらに, τ_1, τ_2 に関する対称性を要請する事により, 定義域を拡大して, $\{(\tau_1, \tau_2) \mid 0 < \tau_1, \tau_2; \tau_1 \neq 1, \tau_2 \neq 1, \tau_1 \neq \tau_2\}$ 上の関数と見る事もある。

任意の $D \in \mathcal{D}(X)$, $f \in C_c^\infty(X)$ 1=に対して, 良く知られてるようだ。

$$(4.3) \quad xF_{Df} = {}^0(D) F_f$$

$$(4.4) \quad \int_X f(x) dx = \sum_{\ell=0}^2 w_\ell^{-1} \int_{J'_\ell} F_f(j) \Delta_\ell(j) dj$$

が成り立つ。(4.4) は Weyl の積分公式と呼ばれる。(cf. [Sano 10]) 右辺に於ける w_ℓ は, Cartan 部分空間 J_ℓ の Weyl 群の位数を表す。

以後, 上にも述べたように, $\bigsqcup_{\ell=0}^2 J_\ell$ の (Weyl 群不变な) 部分集合と (2.7) によると $\{(\tau_1, \tau_2) \mid 0 \leq \tau_1 \leq \tau_2\}$ 内の像とを, 適宜.

同一視する。 $\{j \in \bigcup_{l=0}^2 J'_l \mid F_f(j) \neq 0\}$ の $\bigcup_{l=0}^2 J'_l$ の開包を、不变積分 F_f の台と呼ぶ。 $\text{supp } F_f$ と書く。 $\bigcup_{l=0}^2 J_l$ の部分集合 Ω に對して。

$$(4.5) \quad x\tilde{\mathcal{H}}(\Omega) = \tilde{\mathcal{H}}(\Omega) = \{xF_f \mid f \in C_c^\infty(X), \text{supp}_X F_f \subset \Omega\}$$

と置く。 Ω を $\bigcup_{A \in J_k} J_k$ の部分集合とする時、(4.5) と同様に (7) $x\tilde{\mathcal{H}}(\Omega)$ を定義する。 $\Omega = \bigcup_{l=0}^2 J_l$ のとき (4.5) の單に $x\tilde{\mathcal{H}} = \tilde{\mathcal{H}}$ と記す。便宜上、 F_f の代りに以後。

$$(4.6) \quad M_f(\tau_1, \tau_2) = \omega(\tau_1)^{\mu} (\tau_2)^{\mu} F_f(\tau_1, \tau_2)$$

を考える事も多々。 $x\tilde{\mathcal{H}}(\Omega)$ に對応する M_f の全体を

$$x\tilde{\mathcal{H}}(\Omega) = \mathcal{H}(\Omega) = \{M_f \mid f \in C_c^\infty(X), \text{supp } M_f (= \text{supp } F_f) \subset \Omega\}$$

と置く。 F_f の性質から (4.6) は f が Ω に對応する M_f の性質が容易に導びかれる。例えは、(3.3), (3.5), (4.3), (4.6) から。

$$(4.7) \quad M_{\Omega, f} = (L_1^* + L_2^*) M_f ; \quad M_{\Omega_2, f} = L_1^* L_2^* M_f .$$

$x\tilde{\mathcal{H}}(\Omega)$ の双対空間 $x\tilde{\mathcal{H}}'(\Omega) = \tilde{\mathcal{H}}'(\Omega)$ を

$$(4.8) \quad x\tilde{\mathcal{H}}'(\Omega) = \left\{ \theta : x\tilde{\mathcal{H}}(\Omega) \rightarrow \mathbb{C} \mid \begin{array}{l} \theta \text{ は } \mathbb{C}-\text{線形} \\ f \mapsto \langle \theta, F_f \rangle \text{ は } X-\text{H. } \overline{\left(\bigcup_{l=0}^2 J'_l - \Omega \right)} \\ \text{上の Schwartz 超関数} \end{array} \right\}$$

と定める。 f が Ω に對して f の不变積分を對応させた線形写像 $F : C_c^\infty(X) \rightarrow \tilde{\mathcal{H}}$ の双対写像を $F' : \tilde{\mathcal{H}}' \rightarrow \mathcal{D}'(X)$ と書くと、
容易に $\theta \in \tilde{\mathcal{H}}'$ が $\theta(f) = \langle \theta, Ff \rangle$ は H -不变 Schwartz 超関数の空間

$\mathcal{D}'_H(X)$ の元である事がわかる。同様の事が、 $\tilde{\mathcal{H}}(\sigma)$, $\mathcal{H}(\sigma)$ に対しても成立する。

以下、我々は、群の場合([Hirai 3])と類似の議論を、半單純対称空間の場合に拡張して行なう。そのためには、まず、群上の不変積分の研究で重要な、た、いわゆる Theorem of compactness を、半單純対称空間の場合に拡張する。

命題 4.2 (A Theorem of compactness for symmetric spaces)

$X = G/H$ を半單純対称空間、 j_0 を X の半單純元、 J を、 j_0 を含む X の Cartan 部分空間とする。この時、以下の性質をみたす j_0 の J に於ける近傍 $O(j_0) = O_J(j_0)$ が存在する。

: 任意の X のコンパクト集合 W に対し、 $H_{Z_H(j_0)}$ のコンパクト

集合 $L = L(W) = L(W, \theta_J(j_0))$ が存在し、 $O(j_0), W, L$ に対して、

$$(4.9) \quad \left. \begin{array}{l} j \in O(j_0) \\ h \cdot j \in W \end{array} \right\} \Rightarrow \bar{h} = h \cdot Z_H(j_0) \in L$$

が成立する。

我々は、この命題を、次の、良く知られた、群の場合の対応する定理を用いて、証明する。

補題 4.3 ([Warner 12; vol. II p. 75 Theorem 8.1.4.1])

γ_0 を 半單純リ-群 G の 半單純元, \tilde{J} を γ_0 を含む G の Cartan 部分群, $Z_G(\gamma_0) = \{g \in G \mid g\gamma_0g^{-1} = \gamma_0\}$ とする。 $x \in G$ に対し, $x \in G/Z_G(\gamma_0)$ は \tilde{J} の 属する coset とする。この時, 以下の性質を満たす γ_0 の \tilde{J} に於ける 開近傍 $\tilde{\Omega}(\gamma_0)$ が 存在する。

: G の 任意の コンパクト集合 \tilde{w} に対し, $G/Z_G(\gamma_0)$ の コンパクト集合 $\tilde{\Omega} = \tilde{\Omega}(\tilde{w}, \tilde{\Omega}(\gamma_0))$ が 存在して.

$$(4.10) \quad x\gamma x^{-1} \in \tilde{w} \quad (\gamma \in \tilde{\Omega}(j_0)) \Rightarrow x \in \tilde{\Omega}$$

証明 (命題 4.2 の) $X = G/H$ から G への 連続写像 $\tilde{\sigma}$ で, $\tilde{\sigma}(gh) = g\sigma(g)^{-1}$ によ, $\tilde{\sigma}$ 定義する。(cf. §2. (2.12)).

ここに, σ は, 対称対 (G, H) に対応する G の 包含的自己同型写像である。すると, 任意の $j \in J$ に対し, $\tilde{\sigma}(j)$ は, G の 半單純元であり, $\tilde{\sigma}(J)$ を含む G の Cartan 部分群 \tilde{J} を一つとする。 $\tilde{\sigma}(j_0)$, \tilde{J} は 補題 4.3 を適用して求まる, $\tilde{\sigma}(j_0)$ の \tilde{J} に於ける 開近傍 $\tilde{\Omega}_{\tilde{J}}(\tilde{\sigma}(j_0))$ に対する。

$$\Omega_{J(j_0)} = (\tilde{\sigma}|_{\tilde{J}})^{-1}(\tilde{\Omega}_{\tilde{J}}(\tilde{\sigma}(j_0)))$$

とおく。 $\Omega_{J(j_0)}$ は 明らかに, j_0 の J に於ける 開近傍であるか。これが求めるものである事を以下示す。

X の 任意の コンパクト集合 w に対し, $\tilde{w} = \tilde{\sigma}(w)$ は G

のコンパクト集合であるから、補題4.3から求まる $G/Z_G(\tilde{\sigma}_{j_0})$ のコンパクト集合 $\tilde{Q} = \tilde{Q}(\tilde{\sigma}(\omega), \tilde{\theta}_J(\tilde{\sigma}_{j_0}))$ がある。 $H/Z_H(\tilde{\sigma}_{j_0})$ を自然な同一視によつて、 $G/Z_G(\tilde{\sigma}_{j_0})$ の部分集合と考えるたとえ、閉集合とは、つける事に注意する。 $G/Z_G(\tilde{\sigma}_{j_0})$ の部分空間としての $H/Z_H(\tilde{\sigma}_{j_0})$ は、局所コンパクト Hausdorff 空間の閉部分空間として、それが自身局所コンパクト Hausdorff であり。それに、可算基を有する局所コンパクト群 H が「推移的に」作用してつくるという情況であるから、 $H/Z_H(\tilde{\sigma}_{j_0}) = H/Z_H(j_0)$ の剩余空間として固有の位相は、 $G/Z_G(\tilde{\sigma}_{j_0})$ からの相対位相と一致する。(cf. [松島 8; IV章 §5 定理1 (p.167)]; 尚、§2 の定義より、 $Z_H(j_0) = Z_H(\tilde{\sigma}_{j_0}) = Z_G(\tilde{\sigma}_{j_0}) \cap H$ である事に注意せよ。) 従つて、 $Q = \tilde{Q} \cap H/Z_H(j_0)$ は $H/Z_H(j_0)$ のコンパクト部分集合である。この $\theta_J(j_0)$, ω , Q に対して、(4.9) が成立する事は、それらの作り方より、次に見るように明らかである。 $j \in O_J(j_0)$, $h \in H$, $h \cdot j \in \omega$ を仮定する。すると。
 $\tilde{\sigma}(h \cdot j) = h \tilde{\sigma}(j) \sigma(h)^{-1} = h \tilde{\sigma}(j) h^{-1} \in \tilde{\sigma}(\omega) = \tilde{\omega}$, $\tilde{\sigma}(j) \in \tilde{\theta}_J(\tilde{\sigma}_{j_0})$
従つて、補題4.3 (4.10) より、 $h \cdot j \in h \cdot Z_G(\tilde{\sigma}_{j_0}) \subset \tilde{Q}$ である。
 $\tilde{h} = h \cdot Z_H(j_0) \in \tilde{Q} \cap H/Z_H(j_0)$ 。

補題4.4

A を表2.2 の左列にある集合の一つとし、
 $j_0 \in A'$ (cf. §2.2) をすま。 $A \subset J_e$ なる各 Cartan 部分空間 J_e

(表2.2の右側を参照せよ) に対し、 J_e に於ける j_0 の開近傍 $\Omega_{J_e}(j_0)$ と。以下、性質をみたすものが存在する。

$\Omega_{J_e}(j_0) = \Omega_{J_e}(j_0) \cap X'$, $\Omega(j_0) = \bigsqcup_{A \in J_e} \Omega_{J_e}(j_0)$ と置く時、任意の $f \in C_c^\infty(X)$ に対し \exists .

$$(4.11) \quad {}_X F_f|_{\Omega(j_0)} = {}_{X_A} F_{g_f}|_{\Omega(j_0)}, \quad \text{supp } g_f \subseteq (H \cdot \text{supp } f) \cap X_A$$

となる $g_f \in C_c^\infty(X_A)$ が存在する。

証明 $A \subseteq J_e$ なる各 J_e に対し、命題4.2により定まる $j_0 \in J_e$ に於ける近傍を $\Omega_{J_e}(j_0)$ とする。以下この $\Omega_{J_e}(j_0)$ に対し \exists $g_f \in C_c^\infty(X_A)$ が存在することを示す。

$j \in \Omega(j_0)$ とする時、任意の $f \in C_c^\infty(X)$ に対し \exists .

$$(4.12) \quad \begin{aligned} {}_X F_f(j) &= \int_{H/Z_H(J_e)} f(h, j) d\tilde{h} \quad (\text{但し } J_e \ni j) \\ &= \int_{H/Z_H(A)} \left(\int_{Z_H(A)/Z_H(J_e)} f(\bar{h}, \tilde{s}, j) d\tilde{s} \right) d\bar{h} \end{aligned}$$

となる。 (cf. (4.2)) ここで $\bar{h} = h \cdot z$, $([Hirai 3: p.22] \text{ による}, z \in H)$ h \in 属する $Z_H(A)$ coset を \bar{h} , $\tilde{s} \in Z_H(A)$ \in 属する, ある $l \in J_e$ に対す \bar{h} \in $Z_H(J_e)$ coset を \tilde{s} と書き $\bar{h} = \tilde{s} \cdot l$ とする。命題4.2の記号のもと \exists .

$$\Omega_f = \bigcup_{A \in J_e} \Omega(\text{supp } f, \Omega_{J_e}(j_0))$$

と置く。 Ω_f は $H/Z_H(A)$ のユニバーサル集合であり、 $h \in H$, $j \in \Omega(j_0)$ に対し、 $f(h, j) \neq 0$ とすると、 $hj \in \text{supp } f$ なり。 $\bar{h} \in \Omega(\text{supp } f, \Omega_{J_e}(j_0)) \subseteq \Omega_f$ となる。(但し $J_e \ni j$ とする。)

この事に注意すると、任意の $\bar{h} \in S_f$ なる $h \in H$ に対する α .

$$\int_{Z_H(A)} \alpha(h, \xi) d\xi \equiv 1$$

が成立する $\alpha = \alpha_{S_f} \in C_c^\infty(H)$ を用いて、 $g_f = g_{f, \alpha} \in C_c^\infty(X_A)$ を。

$$(4.13) \quad g_f(\eta) = \int_H \alpha(h) f(h, \eta) dh$$

により定義したとき、明らかに $\text{supp } g_f \subseteq H \cdot \text{supp } f \cap X_A$ が成立し、更に、(4.12), α のとり方より、 $j \in O_{j_0}^{\prime \prime} \subseteq O_{j_0}'$ は成り立つ。

$$\begin{aligned} xF_f(j) &= \int_H \alpha(h) \left(\int_{Z_H(A)/Z_H(J_\theta)} f(h, \xi, j) d\xi \right) dh \\ &= \int_{Z_H(A)/Z_H(J_\theta)} \left(\int_H \alpha(h) f(h, \xi, j) dh \right) d\xi \\ &= \int_{Z_H(A)/Z_H(J_\theta)} g_f(\xi, j) d\xi \end{aligned}$$

が成立する。 \square

補題 4.5 前の補題と同一の記号を用いる。

$j_0 \in A'$ は成り立つ。 j_0 の $X_A = Z_G(A)/Z_H(A)$ に於ける適当な開近傍 U を取る。すると、任意の $g \in C_c^\infty(U)$ は成り立つ。次の性質を持つす $f \in C_c^\infty(X)$ が存在する。

$$(4.14) \quad xF_f \Big|_{\bigsqcup_{A \subset J_\theta'} A} = x_A F_g \quad ; \quad \text{supp } f \subseteq H \cdot \text{supp } g$$

略証 (cf. [Hirai 3; Appendix I])

$S \in H/Z_H(A)$ の原像 $Z_H(A)$ を通る C^∞ -局所切斷 U が、 j_0 と

$X_A = Z_H(A)/Z_H(A)$ に \bar{h} を 3 は適當な(十分小さく) 開近傍とす
る。 $s \in S$ は對して $sZ_H(A) = \bar{h} \in H/Z_H(A)$ の時。
 $s = s(\bar{h})$ と書く事にする。 $\Psi \in C_c^\infty(S)$, $g \in C_c^\infty(U)$ とする。
但し $\int_{H/Z_H(A)} \Psi(s(\bar{h})) d\bar{h} = 1$ とする。

$$(4.15) \quad f(s.u) = \Psi(s) g(u)$$

と置く。 $U_S = \{s.u \mid s \in S, u \in U\}$ は $X = G/H$ の開集合
となる事。 U_S の元の $s.u$ の形の分解は一意である事より、補
集合では 0 と置いて、(4.15) により、 $f \in C_c^\infty(X)$ が矛盾なく
定義できる。作り方より明らかに $\text{supp } f \subseteq H \cdot \text{supp } g$
である。この f は對して $j \in J'_e \subseteq \bigsqcup_{A \subset J_e} J'_e$ のとき、

$$\begin{aligned} {}_X F_f(j) &= \int_{H/Z_H(J_e)} f(h \cdot j) d\bar{h} = \int_{H/Z_H(A)} \int_{Z_H(A)/Z_H(J_e)} f(h \cdot \bar{s} \cdot j) d\bar{s} d\bar{h} \\ &= \int_{H/Z_H(A)} \int_{Z_H(A)/Z_H(J_e)} f(s(\bar{h}) \bar{s} \cdot j) d\bar{s} d\bar{h} \\ &= \int_{H/Z_H(A)} \int_{Z_H(A)/Z_H(J_e)} \Psi(s(\bar{h})) g(\bar{s} \cdot j) d\bar{s} d\bar{h} \\ &= \int_{H/Z_H(A)} \Psi(s(\bar{h})) d\bar{h} \cdot \int_{Z_H(A)/Z_H(J_e)} g(\bar{s} \cdot j) d\bar{s} \\ &= {}_X F_g(j) \end{aligned}$$

□

semi-regular な半單純元 $j_0 \in A'$ に対して、自然な同一視のもとで、

$$(4.16) j_0 \in O(j_0) \subseteq \bigcup_{A \subset J_e} J_e \subset X_A = Z_G(A) / Z_H(A) \subset X = G/H$$

である。必要なら、 $O(j_0)$ をさらに小さく取り直すことにより、補題 4.4 補題 4.5 より次の命題を得る。

命題 4.6 A を表 2.2 の左列にある集合の一つとする。

このとき、任意の $j_0 \in A'$ に対して、 j_0 の $\bigcup_{A \subset J_e} J_e$ に於ける開近傍 $O(j_0)$ が存在して、(4.5) の記号のもとで

$$x^{\tilde{H}}(O(j_0)) = X_A^{\tilde{H}}(O(j_0))$$

が成立する。

X_A は、 X_A^\dagger と自明な一次元の対称空間 X_A^\dagger の直積であるから、階数 1 の半單純対称空間 X_A^\dagger 上の不變積分の全体 $X_A^{\tilde{H}}$ の構造を援用する事により、(cf [Faraut 2], [Aoki-Kato 1]) 容易に。
 $X_A^{\tilde{H}} \cong X_A^{\tilde{H}} \otimes_{X_A^\dagger} \tilde{H}$ の構造はわかる。従って上の命題 4.6 により、 $X_A^{\tilde{H}}(O(j_0))$ の構造がわかる。この事から、双対空間に移る事により、 $X_A^{\tilde{H}}(O(j_0))$ 従、それと F' を媒介として同一視できる。 j_0 のまわりで、 H -不變 Schwartz 超関数の全体がわかる。

§ 5. singular I. D.

本節では、semi-regularな半單純元 ρ_0 と表2.2に列挙した各 A 内に取、た時、前節の応用として得られる事柄のいくつかを述べ、次節への準備をする。事情は ρ_0 の属する A が

I. 複数の Cartan 部分空間 J_ℓ ($\ell=0,1,2$) に含まれる場合 … A_1, A_0

II. 唯一の Cartan 部分空間 J_ℓ ($\ell=0,1,2$) に含まれる場合 … A_+, A_-, A_2, A_1 のいずれかによつて、多少違ひ、くる。が、 ρ_0 のまわりでます。不变積分の形を前節の結果を適用して、各 A の場合を求める。それによつて、 J'_ℓ ($J_\ell \supset A$) 上で 0 となる $\tilde{\omega}'$ の元に対応する H-不变超関数即ち、singular な(台を持つ) 不变超関数を確定し、さうに、 $(L_1 + L_2 - \lambda_1 - \lambda_2) F_f$ 又は $(L_1^* + L_2^* - \lambda_1 - \lambda_2) M_f$ 等を計算する事により、不变微分作用素の、singular な台をもつ不变超関数への作用のし方を調べると、いう方針は同一である。この singular な不变超関数についてには、 $S_{L_1 - \lambda_1 - \lambda_2}$ の作用が、"次数" をあげる(付. (5.9) (5.10)) という事実が基本的である。

表2.2を見てみよう。IIに属する A の場合は、 X_A^ρ は、コンパクト対称空間又はリーマン対称空間となつてゐる。従つて、不变積分はコンパクト部分群上の積分という形で定義される事になり、 ρ_0 のまわりでは、不变積分 F_f は C^∞ 関数に拡張され、全体は、所定の対称性をみたす $J_\ell(\rho_0)$ 上の C^∞ 関数の全体を

一致する。 I に属する A の場合は、不变積分の \int_0^∞ のまわりの形は、もう少し複雑である。以下、上記の方針による singular な台をもつ不变超関数の研究を、よりこみい、て II 3 I の場合について、やや詳しく記述し、II に属する場合については、I の場合とほぼ同様の方法により。① I.E.D. の研究に際し、singular な台をもつ不变超関数の寄与を考慮する必要は無い。(特に、singular な台をもつ I.E.D. は (\int_0^∞ のまわりでは) 存在しない。) ② J'_0 上の関数 $u_\ell = w \otimes_{J'_0} (\otimes_{\lambda_1, \lambda_2, \dots}^{\phi}(x))$ は \int_0^∞ のまわりでは、解析的に接続される。という事実が、結論される事を述べる(=とくめえ)。(A=A₊, A₋ は II では cf. [Aoki-Kato 1; Appendix])

5.1. $A = A_1$ の場合

$A = A_1$ の場合には、 $X_{A_1} = X_{A_1}^s \times X_{A_1}^T = U(3,1) / (U(1) \times U(2,1)) \times \mathbb{R}$ である(表 2.2)。 $+X_{A_1}^T = \{t | t > 0\} \cong \{\tau | \tau > 1\}$ ($\tau = ch^{-2}t$)、 $+X_{A_1} = X_{A_1}^s \times +X_{A_1}^T$ である。 $+X_{A_1}^T$ は直積の概念は τ に対応して II 3。 $+X_{A_1}^s \tilde{\otimes} +X_{A_1}^T \cong U(3,1) / (U(1) \times U(2,1))$ であるから、階数 1 の場合の結果(cf. [Faraut 2; P.380], [Aoki-Kato 1])から、この場合、Y(x) を Heaviside 関数とすれば、

$$(5.1) \quad +X_{A_1}^s \tilde{\otimes} +X_{A_1}^T = \left\{ (1-\tau)^{-\mu} \varphi_0(\tau) + Y(1-\tau) \varphi_1(\tau) \mid \varphi_0, \varphi_1 \in C_c^\infty([0, \infty)) \right\}$$

となる事と、 $C_c^\infty((1, \infty)) = \left\{ (1-\tau)^{-\mu} \phi(\tau) \mid \phi \in C_c^\infty((1, \infty)) \right\}$ から。

$$(5.2) \quad +X_{A_1}^s \tilde{\otimes} +X_{A_1}^T = \tilde{\mathcal{J}}_0(X_{A_1}) = \left\{ (1-\tau_1)^{-\mu} (1-\tau_2)^{-\mu} \phi_0(\tau_1, \tau_2) + Y(1-\tau_1) \phi_1(\tau_1, \tau_2) \mid \begin{array}{l} \phi_i \in \\ C_c^\infty([0, \infty) \times (1, \infty)) \end{array} \right\}$$

$$= \left\{ (1-\tau_1)^{\mu} \phi_0(\tau_1, \tau_2) + Y(1-\tau_1) \phi_1(\tau_1, \tau_2) \mid \phi_i \in C_c^\infty([0, \infty) \times (1, \infty)) \right\}$$

が成立する。従って、2. § 4 ((4.11), 命題4.6) より $\int_{A_1} \cdots \int_{A_n} \cdots$ のまわりで、次の漸近展開が成立する。

$$(5.3.) \omega F_f(\tau_1, \tau_2) \sim \sum_{m=0}^{\infty} A_m(f, \tau_2) (1-\tau_1)^{m-\mu} + Y(1-\tau_1) \sum_{m=0}^{\infty} B_m(f, \tau_2) (1-\tau_1)^m$$

ここで $A_m(f, \cdot)$, $B_m(f, \cdot)$ は ($f \in C_c^\infty(X)$ の台に応じて) 適当な台を持つ C^∞ -級関数である。

$X_{A_1}^{\tilde{\mathcal{H}}'}$ の元 A_m, B_m は

$$(5.4) \quad \begin{aligned} A_m(\phi) &= \frac{\phi^{(m)}_0(1)}{m!} & \phi(\tau) = (1-\tau)^{\mu} \phi_0(\tau) + Y(1-\tau) \phi_1(\tau) \in X_{A_1}^{\tilde{\mathcal{H}}} \\ B_m(\phi) &= \frac{\phi^{(m)}_1(1)}{m!} \end{aligned}$$

によつて定める。直積分解 $X_{A_1} = X_{A_1}^S \times X_{A_1}^T$ に従つて、 $\alpha, \beta \in \mathcal{D}'((1, \infty))$ は

$$(5.5) \quad \begin{aligned} \langle A_m \otimes \alpha, \phi \rangle &= \langle \alpha_m, \frac{1}{m!} \frac{\partial^m \omega \phi_0}{\partial \tau_1^m}(1, \cdot) \rangle & \phi(\tau_1, \tau_2) = (1-\tau_1)^{-\mu} \phi_0(\tau_1, \tau_2) + Y(1-\tau_1) \phi_1(\tau_1, \tau_2) \\ \langle B_m \otimes \beta, \phi \rangle &= \langle \beta_m, \frac{1}{m!} \frac{\partial^m \omega \phi_1}{\partial \tau_1^m}(1, \cdot) \rangle & \in X_{A_1}^{\tilde{\mathcal{H}}} \end{aligned}$$

により、 $X_{A_1}^{\tilde{\mathcal{H}}'}$ の元 $A_m \otimes \alpha, B_m \otimes \beta$ を定める。 $A_m \otimes \alpha, B_m \otimes \beta$ は $X_{A_1}^{\tilde{\mathcal{H}}'}$ の対応する元と同一視するばかりでなく、命題4.6によつて、局所的に $X_{A_1}^{\tilde{\mathcal{H}}}$ 又は $X_{A_1}^{\tilde{\mathcal{H}}'}$ の対応する元と同一視し、さらには $\mathcal{D}'_H(X)$ の対応する元と局所的に同一視する事にする。

このように $A_m \otimes \alpha, B_m \otimes \beta$ は局所的に $\mathcal{D}'_H(X)$ の元と同一視すると、 $f \in C_c^\infty(X)$ を台が適当な集合に入るものとするとき

$$(5.6) \quad \langle A_m \otimes \alpha, f \rangle = \langle \alpha, A_m(f, \cdot) \rangle ; \quad \langle B_m \otimes \beta, f \rangle = \langle \beta, B_m(f, \cdot) \rangle$$

が、成立する事は T_3 。（ cf. (5.3) ）。

$$A = A_0 \text{ の場合も} . X_{A_0} = X_{A_0}^S \times X_{A_0}^T = U(2,2) / (U(1) \times U(1,2)) \times \overline{T}$$

であり、右辺の直積の第一項は変数 τ_1 に対応して \exists 。
 $X_{A_0}^{S\tilde{\mathcal{H}}} \otimes C_c(\overline{T})$ である。
 $X_{A_0}^{S\tilde{\mathcal{H}}} \cong X_{A_1}^{S\tilde{\mathcal{H}}}$ であるから。
 $A = A_1$ の場合も同様である。
 $+X_{A_0} = X_{A_0}^S \times \{\tau_1 | 1 > \tau_1 \geq 0\} \cong X_{A_0}^S \times \{\theta | \frac{\pi}{2} \geq \theta > 0\} \subset X_{A_0}$ である。
 $(5.2)' +X_{A_0}^{\tilde{\mathcal{H}}} = \left\{ (1-\tau_1)^{\mu} (1-\tau_2)^{\mu} \phi_0(\tau_1, \tau_2) + Y(1-\tau_2) \phi_1(\tau_1, \tau_2) \mid \begin{array}{l} \phi_i \in \\ C_c^\infty([0,1] \times [0, \infty)) \end{array} \right\}$
 $= \left\{ (1-\tau_2)^{\mu} \phi_0(\tau_1, \tau_2) + Y(1-\tau_2) \phi_1(\tau_1, \tau_2) \mid \begin{array}{l} \phi_i \in \\ C_c^\infty([0,1] \times [0, \infty)) \end{array} \right\}$

である。従って $j_0 \in A_0$ のまわりで。

$$(5.3)' wF_f(\tau_1, \tau_2) \sim \sum_{m=0}^{\infty} E_m(f, \tau_1) (1-\tau_2)^{m-\mu} + Y(1-\tau_2) \sum_{m=0}^{\infty} F_m(f, \tau_1) (1-\tau_2)^m$$

といふ漸近展開が成立する。 $A = A_1$ の場合も同様である。

$$(5.6)' \langle E_m \otimes Y, f \rangle = \langle Y, E_m(f, \cdot) \rangle ; \quad \langle F_m \otimes \delta, f \rangle = \langle \delta, F_m(f, \cdot) \rangle$$

が成立するようである。任意の $\gamma, \delta \in \mathcal{D}'([0,1])$ に対して γ 。
 $E_m \otimes \delta$ を定め、これは局所的に適宜、 $D'_H(X)$, $X^{\tilde{\mathcal{H}}}', X^{\mathcal{H}}'$,
 $X_{A_0}^{\tilde{\mathcal{H}}}', X_{A_0}^{\mathcal{H}}'$ の元とみなすことにする。 $A = A_0$ の場合は $A = A_1$ の場合と本質的な差異はないので、以下 $A = A_1$ の場合のみについて述べる事にする。

我々は超関数としては Schwartz 超関数を考えていく。従って相対コンパクトな開集合への制限は order が有限となる T_3 。

補題 5.1 任意の $j_0 \in A_1$ に対して $\exists a J_1 \cup J_2$ 使得する適当な開近傍 $O(j_0)$ を取ると $X^{\tilde{\mathcal{H}}}'$ の元 γ 。 $\gamma_i = 1$ に値を持つものは $O(j_0)$ 上、 $A_m \otimes \alpha_m$, $B_m \otimes \beta_m$ ($\alpha_m, \beta_m \in \mathcal{D}'([1, \infty))$) の有限

和に限る。

我々は補題 5.1. に現われた超関数、よしに、 $X - X'$ 内に台を持つ X (の開集合)上の H -不变な Schwartz 超関数を singular T_δ (台を持つ) 不变超関数(singular I.D. と略す) と呼ぶ。

$A_m, B_m \in X_{A_1}^s \tilde{\mathcal{H}}'$ が \mathbb{C} 上一次独立である事から、次が成立する。

補題 5.2.

$$\sum_{m=0}^{\infty} (A_m \otimes \alpha_m + B_m \otimes \beta_m) \equiv 0 \quad T_\delta \text{ で } \alpha_m \equiv \beta_m \equiv 0$$

$\alpha_m \in \mathcal{D}'((1, \infty))$ が A_m の係数、 $\beta_m \in \mathcal{D}'((1, \infty))$ が B_m の係数と呼ぶ。

次に、不变微分作用素(の動径部分)が singular I.D. $A_m \otimes \alpha_m, B_m \otimes \beta_m$ にどう作用するかを調べる。§5.1 はじめに述べたように、不变微分作用素・動径部分の不变積分 F_f の作用を計算する事によつて、調べれば“良い”が、 $A = A_1$ の場合には、階数 1 の半單純対称空間 $X_{A_1}^s$ に於いて、その方針で既に求めた結果(cf [Aoki-Kato 1; Lemma 2.3])が利用可能である。 $\exists \in \mathbb{Z}$ 階数 1 の場合の結果を引用しよう。次の $l_m, \tilde{l}_m (m \in \mathbb{Z})$ に対し、

$$(5.7) \quad l_m = 4(m+1)(m-\mu)$$

$$\tilde{l}_m = -4(m+1)(m+1-\mu)$$

$$(5.8) \quad \begin{aligned} L A_m &= l_m A_m + \tilde{l}_m A_{m+1} \\ L B_m &= l_{m+\mu} B_m + \tilde{l}_{m+\mu} B_{m+1} \end{aligned}$$

が成立する。 $\vdash \vdash \vdash$ (5.7) はおのずから $m \geq 0$ の $\tilde{l}_m = 0$ とつけてあるが、 $m = \mu - 1$ の時に限る事に注意する。(5.8) より

$$\begin{aligned}
 (L_1 + L_2) A_m \otimes \alpha_m &= L_1 A_m \otimes \alpha_m + A_m \otimes L_2 \alpha_m \\
 &= A_m \otimes (L_2 + l_m) \alpha_m + \tilde{l}_m A_{m+1} \otimes \alpha_m \\
 (5.9) \quad (L_1 + L_2) B_m \otimes \beta_m &= L_1 B_m \otimes \beta_m + B_m \otimes L_2 \beta_m \\
 &= B_m \otimes (L_2 + l_{m+\mu}) \beta_m + \tilde{l}_{m+\mu} B_{m+1} \otimes \beta_m
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (L_1 L_2) A_m \otimes \alpha_m &= L_1 A_m \otimes L_2 \alpha_m \\
 &= l_m A_m \otimes L_2 \alpha_m + \tilde{l}_m A_{m+1} \otimes L_2 \alpha_m \\
 (5.10) \quad (L_1 L_2) B_m \otimes \beta_m &= l_{m+\mu} B_m \otimes L_2 \beta_m + \tilde{l}_{m+\mu} B_{m+1} \otimes L_2 \beta_m
 \end{aligned}$$

従って簡単な計算により、次の命題を得る。

命題 5.3 $\alpha_{-1} \equiv \beta_{-1} \equiv 0$ とおく。

$$\begin{aligned}
 (L_1 + L_2 - \lambda_1 - \lambda_2) \sum_{m \geq 0} (A_m \otimes \alpha_m + B_m \otimes \beta_m) \\
 &= \sum_{m \geq 0} [A_m \otimes \{(L_2 + l_m) \alpha_m + \tilde{l}_{m-1} \alpha_{m-1}\} + B_m \otimes \{(L_2 + l_{m+\mu}) \beta_m + \tilde{l}_{m+\mu-1} \beta_{m-1}\}] \\
 &= \sum_{m \geq 0} [A_m \otimes \{L_2 + 4(m+1)(m-\mu) \alpha_m - 4m(m-\mu) \alpha_{m-1}\} \\
 &\quad + B_m \otimes \{L_2 + 4(\mu+m+1)m \beta_m - 4m(m+\mu) \beta_{m-1}\}]
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 L_1 L_2 \cdot \sum_{m \geq 0} (A_m \otimes \alpha_m + B_m \otimes \beta_m) \\
 &= \sum_{m \geq 0} [A_m \otimes \{l_m L_2 \alpha_m + \tilde{l}_{m-1} L_2 \alpha_{m-1}\} + B_m \otimes \{l_{m+\mu} L_2 \beta_m + \tilde{l}_{m+\mu-1} L_2 \beta_{m-1}\}] \\
 &= \sum_{m \geq 0} [A_m \otimes \{4(m+1)(m-\mu) L_2 \alpha_m - 4m(m-\mu) L_2 \alpha_{m-1}\} \\
 &\quad + B_m \otimes \{4(\mu+m+1)m L_2 \beta_m - 4(\mu+m)m L_2 \beta_{m-1}\}]
 \end{aligned}$$

注意：我々の実際の計算(§6)で必要となる $A_m \otimes \alpha_m, B_m \otimes \beta_m$ については、 α_m, β_m はすべて実解析的関数となる。ついで、
(§6 の (6.11), 補題 6.5, 補題 6.12 を参照せよ。)

(5.9) 式, 又は命題 5.3 の系として得られる次の補題は。

§6 に於いて用いられる。(§6.1 (6.11) の付近を参照せよ。)

補題 5.4.

$$(5.11) (L_1 + L_2 - \lambda_1 - \lambda_2) \cdot \sum_{m \geq 0} (A_m \otimes \alpha_m + B_m \otimes \beta_m) = B_0 \otimes b + \sum_{0 \leq m \leq \mu} A_m \otimes \alpha_m$$

と、この等式を満足する $\alpha_m, \beta_m, b, \alpha_m \in \mathcal{O}'((1, \infty))$ に対して。

次の (5.12) が成立する。

$$(5.12) \quad \begin{aligned} b &\equiv 0, \quad \alpha_{\mu} \equiv 0 \\ \alpha_m &\equiv 0 \quad (m \geq \mu) ; \quad \beta_m \equiv 0 \quad (\forall m \geq 0) \end{aligned}$$

証明 $j_0 = j_{0, t_2} = j_{0, t_2} \in A'_1$ とする。 j_0 の $J \cup J_2$ に於いて十分小さな近傍 $O(j_0)$ を取る。これに對応する $t_2 = ch^2 t_2$ (cf.(2.7)) の近傍 I を適当に取り。

$$m_A = \max(\{m \in \{0, 1, 2, \dots\} \mid \alpha_{m+1} \neq 0\} \cup \{-1\})$$

$$m_B = \max(\{m \in \{0, 1, 2, \dots\} \mid \beta_{m+1} \neq 0\} \cup \{-1\})$$

と置く。すると、補題 5.1 により、 $m_A < \infty, m_B < \infty$ である。

命題 5.3 より、

$$(5.13) \quad \begin{aligned} &(L_1 + L_2 - \lambda_1 - \lambda_2) \left(\sum_{m \leq m_A} A_m \otimes \alpha_m + \sum_{m \leq m_B} B_m \otimes \beta_m \right) \\ &= -4(m_A + 1)(m_A + 1 - \mu) A_{m_A+1} \otimes \alpha_{m_A} - 4(\mu + m_B + 1)(m_B + 1) B_{m_B+1} \otimes \beta_{m_B} \\ &\quad + \sum_{m \leq m_A} A_m \otimes \tilde{\alpha}_m + \sum_{m \leq m_B} B_m \otimes \tilde{\beta}_m \end{aligned}$$

という等式が適當な $\tilde{\alpha}_m, \tilde{\beta}_m \in \mathcal{D}'((1, \infty))$ に対して成立する。

これが $O(j_0)$ 上、 $B_0 \otimes b + \sum_{m \leq \mu} A_m \otimes a_m$ と等しいのだから、

補題5.2 より、 A_m, B_m の対応する係数は、 $\tau_2 = ch^2 t_2$ の近傍 I 上で等しい。従って、 $m_A \geq \mu$ と仮定すると、 A_{m_A+1} の係数を比較する事により、 τ_2 の近傍 I 上で $4(m_A+1)(m_A+1-\mu)\alpha_{m_A} \equiv 0$ が成立する事になるが、これは明らかに矛盾である。従って、 $m_A < \mu$ 。同様に $m_B \geq 0$ と仮定すると、 B_{m_B+1} の係数を比較する事により I 上で $4(\mu+m_B+1)(m_B+1)\beta_{m_B} \equiv 0$ となり矛盾する。よって $m_B = -1$ 、即ち任意の $m \geq 0$ に対して、

I 上 $\beta_m \equiv 0$ である。従って B_0 の係数を比較して、 I 上 $b \equiv 0$ 。 (5.13) 式の左辺では、 A_μ の係数は、 $m_A \leq \mu-2$ なら明らかに 0 であり、 $m_A = \mu-1$ なら、 $4(m_A+1)(m_A+1-\mu) = 0$ より 0 となるから、 A_μ の係数を比較して、 $a_\mu \equiv 0$ が I 上成立する。以上により、 (5.12) が I 上成立する事が示された。 $j_0 = j_{0, t_2} = j_{0, \tau_2}$ が A'_1 を動くとき、 $\tau_2 = ch^2 t_2$ は $(1, \infty)$ 全体を動き、従って τ_2 の近傍 I の和集合は $(1, \infty)$ と一致するから、結局、 (5.12) が $(1, \infty)$ 全体で成立する事になる。□

5.2 各 Cantan 部分空間内での条件

$$u_\ell(\tau_1, \tau_2) = u_\ell(\tau_1, \tau_2; \lambda_1, \lambda_2) \in (\mathbb{I}(\Omega_1) - \lambda_1, -\lambda_2) \bar{w}^\dagger u_\ell = 0, (\mathbb{I}(\Omega_2) - \lambda_1, \lambda_2) \bar{w} u_\ell = 0$$

を満たす J'_ℓ 上の Weyl 群不变な関数とする。 $(\ell=0, 1, 2)$ すと。

補題 3.5. より。

i) $\chi_{\lambda_1, \lambda_2}$ が regular のとき。

$$(5.14) \quad {}_\ell u(\tau_1, \tau_2) = \sum_{\substack{i,j=1,2 \\ k=1,2}} {}_\ell C_{ij}^k F_i(\tau_1, \lambda_k) F_j(\tau_2, \lambda_k) \quad ({}_\ell C_{ij}^k \in \mathbb{C})$$

ii) $\chi_{\lambda_1, \lambda_2}$ が singular のとき。 $\lambda = \lambda_1 = \lambda_2$ と置く。

$$(5.15) \quad {}_\ell u(\tau_1, \tau_2) = \sum_{i,j=1,2,3,4} {}_\ell C_{ij} F_i(\tau_1, \lambda) F_j(\tau_2, \lambda) \quad ({}_\ell C_{ij} \in \mathbb{C})$$

但し。

$$(5.16) \quad {}_\ell C_{i+2,j} = - {}_\ell C_{i,j+2}, \quad {}_\ell C_{i+2,j+2} = 0 \quad (\begin{matrix} \ell=0,1,2 \\ i,j=1,2 \end{matrix})$$

が成立立つ。

u_ℓ を自然に H, J'_ℓ 上の H -不变超関数とみなしたものの \oplus'_{u_ℓ} すと。

$$(5.17) \quad \langle \oplus'_{u_\ell}, f \rangle = w'_\ell \int_{J'_\ell} u_\ell(\tau_1, \tau_2) M_f(\tau_1, \tau_2) d\tau_1 d\tau_2$$

(但し, $f \in C_c^\infty(H, J'_\ell)$, $w'_0 = w'_2 = \frac{1}{2}$, $w'_1 = 1$)

が成立する。 \oplus'_{u_ℓ} は $\bigsqcup_{k \neq \ell} H, J'_k$ で 0 とする事により、自然に。

$X' = \bigsqcup_{\ell=0,1,2} H, J'_\ell$ 上の I.E.D. を考える事が出来る。

以下、P. 5-2 で述べた事実 (①, ②特に②) にもとづく。

\oplus'_{u_ℓ} が $\overline{(H, J'_\ell)}$ 上の I.E.D. に拡張出来たための条件を述べる。

これは、いわば u_ℓ が X 上の I.E.D. の構成要素となるための、各 Cartan 部分空間 J_ℓ 内での条件である。

$$(5.18): \quad a_0(\lambda, \mu) = \frac{\Gamma(\mu)}{\Gamma(\lambda) \Gamma(\beta)}$$

$b_0(\lambda, \mu)$ は $a_0(\lambda, \mu) = 0 \Rightarrow b_0(\lambda, \mu) \neq 0$ となる λ, μ の互いに

とする。また、

$$(5.19) \quad O_\ell = (\overline{H \cdot J'_\ell})^\circ \quad (\ell = 1, 2); \quad O_0 = (\overline{H \cdot J'_0})^\circ - H \delta_{\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}} H$$

と置く。すると、以上の条件と記号のもとで、次の命題が成立する。

命題 5.5 各 $\ell = 0, 1, 2$ に対して、 $\mathbb{H}^{\prime \ell}$ が O_ℓ 上の I.E.

D. に拡張可能であるための必要十分条件は、 $\mathbb{H}^{\prime \ell}$ の infinitesimal character X_{λ_1, λ_2} が regular か singular かに応じて。

以下の条件 ℓ が成立する事である。拡張可能な場合には、拡張は一意で、それは、任意の $f \in C_c^\infty(O_\ell)$ に対して、上の (5.17) 式の右辺を対応させた Schwartz 超関数である。

i) X_{λ_1, λ_2} が regular な場合

$$0) \begin{cases} {}_0 C_{ij}^{k'} \times a_0(\lambda_k, \mu) = {}_0 C_{2j}^k \times b_0(\lambda_k, \mu) & (k=1, 2) \\ {}_0 C_{ij}^k + {}_0 C_{ji}^{k'} = 0 & (i, j=1, 2) \end{cases}$$

$$1) {}_1 C_{ij}^k \times a_0(\lambda_k, \mu) = {}_1 C_{2j}^k \times b_0(\lambda_k, \mu) \quad (k=1, 2)$$

$$2) {}_2 C_{ij}^k + {}_2 C_{ji}^{k'} = 0 \quad (i, j=1, 2)$$

ii) X_{λ_1, λ_2} が singular な場合

$$0) \begin{cases} {}_0 C_{1+m, j} \times a_0(\lambda, \mu) = {}_0 C_{2+m, j} \times b_0(\lambda, \mu) & (m=0, 2) \\ ({}_0 C_{ij})_{i, j=1, \dots, 4} \text{ は } \ell=0 \text{ に対する直対称行列} \end{cases}$$

$$1) \quad {}_1C_{1+m,j} \times a_0(\lambda, \mu) = {}_1C_{2+m,j} \times b_0(\lambda, \mu) \quad (\begin{matrix} j=1,2 \\ m=0,2 \end{matrix}) ; \quad \{{}_1C_{ij}\}_{i,j=1,..4} \text{ は (5.16) を満たす}$$

$$2) \quad \{{}_2C_{ij}\}_{i,j=1,..4} \text{ は } \lambda=2 \text{ に対する (5.16) を満たす歪対称行列}$$

注意: ① $a_0(\lambda, \mu) = 0$ と $\lambda \in \Lambda_d$ は同値である。

$$② \quad i) \quad 0), 2) の \quad {}^T {}_0C_{ij}^k + {}_0C_{ji}^{k'} = 0 \quad (\begin{matrix} i,j=1,2 \\ k=1,2 \end{matrix}) \text{ という条件や}$$

$$ii) \quad 0), 2) の \quad \{{}_0C_{ij}\}_{i,j=1,..4} \text{ は (5.16) を満たす歪対称行列}, \text{ という条件}$$

は、 U_ℓ が $\tau_1 = \tau_2$ で実解析的であり、 $\tau_1, \tau_2 | = \tau$ で対称である事実の反映である。

$$③ \quad i) \quad 0), 1) の \quad {}^T {}_0C_{ij}^k \times a_0(\lambda_k, \mu) = {}_0C_{2j}^k \times b_0(\lambda_k, \mu) \quad (\begin{matrix} k=1,2 \\ j=1,2 \end{matrix}),$$

$$ii) \quad 0), 1) の \quad {}^T {}_0C_{1+m,j} \times a_0(\lambda, \mu) = {}_0C_{2+m,j} \times b_0(\lambda, \mu) \quad (\begin{matrix} j=1,2 \\ m=0,2 \end{matrix}),$$

は、 U_ℓ が $\tau_1 = 0$ で実解析的である事実に対応する。

$\bar{F}_i(\tau, \lambda) \in (L-\lambda) F_i = 0$ の $(0, 1)$ に於ける解空間の基底で

$\bar{F}_i(0, \lambda) = 1$ となるものとする。この時、

$$(\bar{F}_1(\cdot, \lambda), \bar{F}_2(\cdot, \lambda)) = (F_1(\cdot, \lambda), F_2(\cdot, \lambda)) \begin{bmatrix} b_0(\lambda, \mu) & b_1(\lambda, \mu) \\ a_0(\lambda, \mu) & a_1(\lambda, \mu) \end{bmatrix}$$

が成り立つ事に注意。 $(b_1(\lambda, \mu), a_1(\lambda, \mu) \in \mathbb{C})$

④ 現在の $\tau = 3$. 正確に証明できとはいひないが、上の

O_0 のかわりに $O_0 = \overline{(HJ'_0)}$ としても上の命題は

成立するものと思われる。(cf. P.5-12; 付録)

最後に、注意④に関連して、本稿では除外卓とし下3卓。

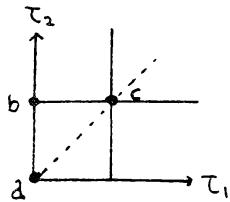


図 5.1

$$\mathfrak{j}_{\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}} H \text{ (左図a)}, \mathfrak{j}_{\frac{\pi}{2}, 0} H = \mathfrak{j}_{\frac{\pi}{2}, 0} H \text{ (左図b)}$$

$$(原卓) = eH = \mathfrak{j}_{0,0} H = \mathfrak{j}_{0,b} H = \mathfrak{j}_{0,0} H \text{ (左図c)}$$

はつじうでコマントす。 (cf. §1, p.1-3; §6, p.6-1)

便宜上、この3卓をa, b, c.と書く事にする。

$$Z_{G(2)}/Z_{H(2)} \cong U(4)/(U(2) \times U(2)); \quad Z_{G(b)}/Z_{H(b)} \cong U(1,1)/(U(1) \times U(1)) \times U(2)/(U(1) \times U(1))$$

$Z_{G(c)}/Z_{H(c)} = G/H = X$ となる。ともに 階数2の半単純対称

空間である。この点に、階数1の半単純対称空間と自明な対称空間、直積とな、た semi-regular の場合 (cf. 表 2.2) との相違がある。

しかし、a, bの場合には、Xより真に次元が大きくなる。

対称空間になつており、しかも、cの場合、ユークラッド対称空間である。

一方、不变積分の研究、出発点とな、た A Theorem of compactness (命題 4.2) は一般、半単純元に対し確立されていて、a, b

に適用可能である。従、2. 以下 a を例に略述する様に、我々

の方針 (§4.1) 内で a, b を取扱えるとの期待が持てて。そうだとすると、格別に難いのは c (従、原卓と nilpotent variety N) といふ事になる。

$a = \mathfrak{j}_{\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}} H$ を取扱う方針 (cf. 注意④)

: $\mathfrak{j}_0 = a$ に対して、命題 4.6 (類似) を示し、それによつて、ユークラッド対称空間 $U(4)/(U(2) \times U(2))$

に帰着させ、a のまわりでは $\{F_\delta + \epsilon C(X)\}$ は所定の対称性をもつて函数全体と一致する事を見る。

不变微分作用素の動径部分はわかつてからそれを singular I.P., u_2 の

正則化 (e.g. 有限部分) は作用せ計算結果をつを合せせる。

§ 6. 定理 1.1 の証明

この節で我々は前節までの結果を用いて定理 1.1 を証明する。以下、簡単のため、 $f \in C_c^\infty(X)$ に対し、

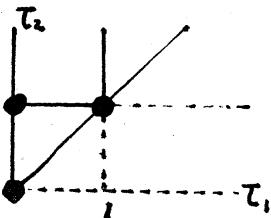
$$(6.1) \quad M_f(\tau_1, \tau_2) = \omega(1-\tau_1)^M(1-\tau_2)^M F_f(\tau_1, \tau_2) \quad (M=2)$$

とおく。また $X_0 = \{x \in X; \tilde{\sigma}(x) \text{ の固有値に } \pm 1 \text{ と異なるものが存在}\}$ とおき、以下 $C_c^\infty(X)$ の代わりに専ら、

$$C_c^\infty(X_0) = \{f \in C_c^\infty(X); \text{supp } f \subset X_0\}$$

の方を考える。これは M_f の $(\tau_1, \tau_2) = (1, 1), (0, 1), (0, 0)$ における挙動を著者達はまだ良く理解をしていないためである (cf. 付録 P. A-1)。

はじめに我々は $f \in C_c^\infty(X_0)$ に対して、積分：



$X \setminus X_0$ に対応する部分
(●で示したところ)

図 6.1

$$(6.2) \quad \begin{aligned} & \int_{\mathcal{T}_0} U_\ell(\tau_1, \tau_2) F_f(\tau_1, \tau_2) \omega(1-\tau_1)^M(1-\tau_2)^M d\tau_1 d\tau_2 \\ &= \int_{\mathcal{T}_0} U_\ell(\tau_1, \tau_2) M_f(\tau_1, \tau_2) d\tau_1 d\tau_2 \end{aligned}$$

を考える。この積分自身は U_ℓ の表示式 (補題 3.5) 及び M_f の $(\tau_1, \tau_2) = (1, \tau_2)$ あるいは $(\tau_1, 1)$ のまわりの漸近挙動 ((5.3) 及び (5.3)') から分かるように一般には収束しない。実際 $f \in C_c^\infty(X_0)$ とする時、 \mathcal{T}_ℓ ($\ell=0, 1, 2$) 上の積分はそれぞれ、 $0 < \delta_1, \delta_2 < 1$ に対して、

$$\begin{aligned} (i) \quad & \int_0^{1-\delta_1} d\tau_1 \int_0^{1-\delta_2} d\tau_2 U_0(\tau_1, \tau_2) M_f(\tau_1, \tau_2) \\ &= \zeta_0(\delta_2) \frac{1}{\delta_1} + \zeta'_0(\delta_2) \log \delta_1 + \zeta_0(\delta_1) \frac{1}{\delta_2} + \zeta'_0(\delta_1) \log \delta_2 + G_0(\delta_1, \delta_2) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{(ii)} & \int_0^{1-\delta_1} d\tau_1 \int_{1+\delta_2}^{\infty} d\tau_2 U_1(\tau_1, \tau_2) Mf(\tau_1, \tau_2) \\
 &= \xi_1(\delta_2) \frac{1}{\delta_1} + \xi'_1(\delta_2) \log \delta_1 + \xi_1(\delta_1) \frac{1}{\delta_2} + \xi'_1(\delta_1) \log \delta_2 + G_1(\delta_1, \delta_2) \\
 \text{(iii)} & \int_{1+\delta_1}^{\infty} d\tau_1 \int_{1+\delta_2}^{\infty} d\tau_2 U_2(\tau_1, \tau_2) Mf(\tau_1, \tau_2) \\
 &= \xi_2(\delta_2) \frac{1}{\delta_1} + \xi'_2(\delta_2) \log \delta_1 + \xi_2(\delta_1) \frac{1}{\delta_2} + \xi'_2(\delta_1) \log \delta_2 + G_2(\delta_1, \delta_2)
 \end{aligned}$$

と表わせる。ここで、 ξ_i, ξ'_i はそれぞれ $\lim_{\delta_2 \rightarrow +0} \xi_i(\delta_2), \lim_{\delta_2 \rightarrow +0} \xi'_i(\delta_2)$ が存在するような δ_2 の函数、 ξ_i, ξ'_i は $\lim_{\delta_1 \rightarrow +0} \xi_i(\delta_1), \lim_{\delta_1 \rightarrow +0} \xi'_i(\delta_1)$ が存在するような δ_1 の函数、また $G_i(\delta_1, \delta_2)$ (は、 $G_i(0, 0) = \lim_{\delta_1 \rightarrow +0} \lim_{\delta_2 \rightarrow +0} G_i(\delta_1, \delta_2)$) が存在するような δ_1, δ_2 の二变数函数である。我々はこの事實をみながら、積分 (6.2) の finite part を $\ell=0, 1, 2$ に応じてそれぞれ次のように定義する：

$$\begin{aligned}
 \text{(6.3)} \quad \text{P.f.} \int_{T_0} U_0(\tau_1, \tau_2) Mf(\tau_1, \tau_2) d\tau_1 d\tau_2 &= G_0(0, 0) \\
 \text{P.f.} \int_{T_1} U_1(\tau_1, \tau_2) Mf(\tau_1, \tau_2) d\tau_1 d\tau_2 &= G_1(0, 0) \\
 \text{P.f.} \int_{T_2} U_2(\tau_1, \tau_2) Mf(\tau_1, \tau_2) d\tau_1 d\tau_2 &= G_2(0, 0).
 \end{aligned}$$

④を $\mathcal{D}'_{X_1, X_2, H}(X)$ の元としよう。我々は積分 (6.2) の finite part を利用して ④ $U_\ell \in \mathcal{D}'_H(X_0)$ を次のように定義する ($\mathcal{D}'_H(X_0)$ は X_0 上の H -不変超函数の全体)。④の T'_ℓ への制限を π_ℓ 、そして $U_\ell = w \pi_\ell$ とおく。そのとき、

$$\text{(6.4)} \quad \langle \text{④} U_\ell, f \rangle = w'_\ell \text{ P.f.} \int_{T'_\ell} U_\ell(\tau_1, \tau_2) Mf(\tau_1, \tau_2) d\tau_1 d\tau_2 \quad (f \in C_c^\infty(X_0), \ell=0, 1, 2).$$

但し、 w'_ℓ は $w'_0 = w'_2 = \frac{1}{2}, w'_1 = 1$ により定義する。この ④ U_ℓ と §5 で定義された $A_m \otimes \alpha_m, B_m \otimes \beta_m, E_m \otimes \gamma_m, F_m \otimes \delta_m$

を用いて、 \mathbb{H} の $C_c^\infty(X_0)$ への制限 $\mathbb{H}|_{C_c^\infty(X_0)}$ は、

$$(6.5) \quad \mathbb{H}|_{C_c^\infty(X_0)} = \sum_{\ell=0}^2 \mathbb{H} u_\ell + \sum_{m=0}^\infty A_m \otimes \alpha_m + \sum_{m=0}^\infty B_m \otimes \beta_m \\ + \sum_{m=0}^\infty E_m \otimes \gamma_m + \sum_{m=0}^\infty F_m \otimes \delta_m$$

$\left. \begin{array}{l} \alpha_m, \beta_m \text{ は } \mathcal{D}'((1, \infty)), \gamma_m, \delta_m \text{ は } \mathcal{D}'((1, \infty)) \text{ のある元。} \\ \text{なお, } A_m \otimes \alpha_m, B_m \otimes \beta_m, E_m \otimes \gamma_m, F_m \otimes \delta_m \text{ はそれぞれ} \\ \mathcal{D}'_H(X) \cong \mathcal{M}' (\text{§4. §5}) \text{ により), } \mathcal{D}'_H(X) \text{ の元と同一視したことに} \\ \text{注意せよ。} \end{array} \right\}$

と分解することができる。何故ならば、 \mathbb{H} は命題 5.5 などから $X_0 \cap \bigcup_{\ell=0,1,2} \overline{(\mathcal{D} \mathcal{T}_\ell')}$ 上正則函数 u_ℓ で表わせるし、一方補題 5.1 などから $\tau_1 = 1$ [resp. $\tau_2 = 1$] 上に値を持つ不变超函数は、 $A_m \otimes \alpha_m$, $B_m \otimes \beta_m$ [resp. $E_m \otimes \gamma_m$, $F_m \otimes \delta_m$] の一次結合で表わせるからである。(なお付録(A.9)を参照。)

$f \in C_c^\infty(X_0)$ としよう。そのときすぐ分かるように、

$$\langle (\Omega_i - \chi_{\lambda_1, \lambda_2}(\Omega_i)) \mathbb{H} u_\ell, f \rangle$$

$$= w \cdot P.f. \int_{\mathcal{T}_\ell} u_\ell(\tau_1, \tau_2) F_{(\Omega_i - \chi_{\lambda_1, \lambda_2}(\Omega_i))f}(\tau_1, \tau_2) \omega(1-\tau_1)^M (1-\tau_2)^N d\tau_1 d\tau_2$$

が従う。次の補題は後で τ_1 と τ_2 の間の接続公式を求める際基本的である。

補題 6.1. $\mathbb{H} \in \mathcal{D}_{\lambda_1, \lambda_2, H}(X)$, ϕ を条件:

$$(6.6) \quad \text{supp } Mf \cap \{(\tau_1, \tau_2); \tau_1 \leq \frac{1}{2} \text{ または } \tau_1, \tau_2 \leq 1\} = \emptyset$$

をみたす $C_c^\infty(X)$ の函数とする(図 6.2 参照)。

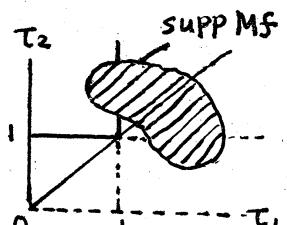


図 6.2

そのとき、充分小さい $\delta_1, \delta_2 > 0$ に対して次の式が成立する。

$$(i) \quad \int_{\mathcal{T}_1(\delta_1)} u_1(\tau_1, \tau_2) F_{(\Omega_i - \chi_{\lambda_1, \lambda_2}(\Omega_i))f}(\tau_1, \tau_2) \omega(1-\tau_1)^M (1-\tau_2)^N d\tau_1 d\tau_2 \\ = \int_1^\infty \left[a(\tau_1) \left\{ \frac{\partial Mf}{\partial \tau_1} u_1 - Mf \frac{\partial u_1}{\partial \tau_1} \right\}(\tau_1, \tau_2) + (a' - b)(\tau_1) (Mf u_1)(\tau_1, \tau_2) \right]_{\tau_1=1-\delta_1} d\tau_2$$

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \int_{\mathcal{T}_2(\delta_2)} U_2(\tau_1, \tau_2) F_{(L_2 - \chi_{\lambda_1, \lambda_2}(L_2))f}(\tau_1, \tau_2) \omega(1-\tau_1)^M (1-\tau_2)^M d\tau_1 d\tau_2 \\ &= - \int_1^\infty \left[a(\tau_1) \left\{ \frac{\partial Mf}{\partial \tau_1} U_2 - Mf \frac{\partial U_2}{\partial \tau_1} \right\}(\tau_1, \tau_2) + (a' - b)(\tau_1) (Mf \cdot U_2)(\tau_1, \tau_2) \right]_{\tau_1=1+\delta_2} d\tau_2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & (\text{ii}) \int_{\mathcal{T}_1(\delta_1)} U_1(\tau_1, \tau_2) F_{(L_2 - \chi_{\lambda_1, \lambda_2}(L_2))f}(\tau_1, \tau_2) \omega(1-\tau_1)^M (1-\tau_2)^M d\tau_1 d\tau_2 \\ &= \int_1^\infty \left[a(\tau_1) \left\{ \frac{\partial Mf}{\partial \tau_1} L_2 U_1 - Mf \frac{\partial L_2 U_1}{\partial \tau_1} \right\}(\tau_1, \tau_2) + (a' - b)(\tau_1) \{ Mf \cdot L_2 U_1 \}(\tau_1, \tau_2) \right]_{\tau_1=1-\delta_1} d\tau_2 \\ & \frac{1}{2} \int_{\mathcal{T}_2(\delta_2)} U_2(\tau_1, \tau_2) F_{(L_2 - \chi_{\lambda_1, \lambda_2}(L_2))f}(\tau_1, \tau_2) \omega(1-\tau_1)^M (1-\tau_2)^M d\tau_1 d\tau_2 \\ &= - \int_1^\infty \left[a(\tau_1) \left\{ \frac{\partial Mf}{\partial \tau_1} L_2 U_2 - Mf \frac{\partial L_2 U_2}{\partial \tau_1} \right\}(\tau_1, \tau_2) + (a' - b)(\tau_1) \{ Mf \cdot L_2 U_2 \}(\tau_1, \tau_2) \right]_{\tau_1=1+\delta_2} d\tau_2 \end{aligned}$$

ここで、 $a(\tau_1) = 4\tau_1(\tau_1 - 1)$, $b(\tau_1) = 4\{(M+2)\tau_1 - 1\} = 4(4\tau_1 - 1)$

[cf. (3.2)], また, $\mathcal{T}_1(\delta_1)$, $\mathcal{T}_2(\delta_2)$ はそれぞれ次のようにおいた。

$$\begin{cases} \mathcal{T}_1(\delta_1) = \mathcal{T}_1 \cap \{ \tau_1 \leq 1 - \delta_1 \} \\ \mathcal{T}_2(\delta_2) = \mathcal{T}_2 \cap \{ \tau_1 \geq 1 + \delta_2 \} \cap \{ \tau_2 \geq 1 + \delta_2 \}, \end{cases}$$

(証明) (ii)についてもほとんど同様だから (i) を証明する。

$\Omega^*(L_2) = \omega^{-1}(L_1 + L_2) \omega$ に注意する [cf. (3.5)],

$$\begin{aligned} & \int_{\mathcal{T}_1(\delta_1)} U_1(\tau_1, \tau_2) F_{(L_2 - \chi_{\lambda_1, \lambda_2}(L_2))f}(\tau_1, \tau_2) \omega(1-\tau_1)^M (1-\tau_2)^M d\tau_1 d\tau_2 \\ &= \int_{\mathcal{T}_1(\delta_1)} U_1(\tau_1, \tau_2) \{ \Omega^*(L_2) - (\lambda_1 + \lambda_2) \} F_f(\tau_1, \tau_2) \omega(1-\tau_1)^M (1-\tau_2)^M d\tau_1 d\tau_2 \\ &= \int_{\mathcal{T}_1(\delta_1)} U_1(\tau_1, \tau_2) \{ (L_1 + L_2) - (\lambda_1 + \lambda_2) \} (\omega F_f)(\tau_1, \tau_2) (1-\tau_1)^M (1-\tau_2)^M d\tau_1 d\tau_2 \\ &= \int_{\mathcal{T}_1(\delta_1)} U_1(\tau_1, \tau_2) \{ (L_1^* + L_2^*) - (\lambda_1 + \lambda_2) \} (\omega(1-\tau_1)^M (1-\tau_2)^M F_f)(\tau_1, \tau_2) d\tau_1 d\tau_2. \end{aligned}$$

ここで、 $L_i^* = (1-\tau_1)^M L_i (1-\tau_1)^{-M}$ [cf. (3.3)]. 容易に分かるよ

うに, $L_i^* = \frac{d^2}{d\tau_1^2} a(\tau_1) - \frac{d}{d\tau_1} b(\tau_1)$. 従って上の仮定 (6.6) を部分積分から,

$$\begin{aligned}
 \text{左式} &= \int_{\mathcal{T}_1(\delta_1)} u_1(\tau_1, \tau_2) \{(L_1^* + L_2^*) - (\lambda_1 + \lambda_2)\} (M_f)(\tau_1, \tau_2) d\tau_1 d\tau_2 \\
 &= \int_1^\infty \left\{ a(\tau_1) \left\{ \frac{\partial M_f}{\partial \tau_1} u_1 - M_f \frac{\partial u_1}{\partial \tau_1} \right\}(\tau_1, \tau_2) + (a' - b)(\tau_1) (M_f u_1)(\tau_1, \tau_2) \right\}_{\tau_1=1-\delta_1} d\tau_2 \\
 &\quad + \int_{\mathcal{T}_1(\delta_1)} \{(L_1 + L_2) - (\lambda_1 + \lambda_2)\} u_1(\tau_1, \tau_2) M_f(\tau_1, \tau_2) d\tau_1 d\tau_2.
 \end{aligned}$$

$(L_1 + L_2) u_1 = (\lambda_1 + \lambda_2) u_1$ だから、第2項 = 0。 $\mathcal{T}_2(\delta_2)$ 上の積分に

ついても同様の考察をして我々は (i) を得る。 Q.E.D.

以下、 $\chi_\lambda = \chi_{\lambda_1, \lambda_2}$ が regular の場合と、 singular の場合に分けて議論を進めよう。

6.1. $\chi_{\lambda_1, \lambda_2}$ が regular の場合 ($\lambda_1 \neq \lambda_2$)。

この場合に U_ℓ ($\ell = 0, 1, 2$) は次の形に表現できた (cf. 補題 3.5, 命題 5.5):

$$\begin{aligned}
 (6.7) \quad U_\ell(\tau_1, \tau_2) &= \sum_{i,j,k,k'=1}^2 e^{C_{ij}^k F_i(\tau_1, \lambda_k) F_j(\tau_2, \lambda_{k'})} \quad (\ell=0,1,2) \\
 e^{C_{ij}^k} + e^{C_{ji}^{k'}} &= 0 \quad (i,j,k,k'=1,2; k \neq k') \quad (\ell=0,2).
 \end{aligned}$$

一方、不变種分 M_f については (5.3) から、 $(\tau_1, \tau_2) = (1, \tau_2)$ のまわりで次のような漸近展開を持っていた:

$$(6.8) \quad M_f(\tau_1, \tau_2) \sim \sum_{m=0}^{\infty} A_m(f, \tau_2) (1-\tau_1)^m + Y(1-\tau_1) \sum_{m=0}^{\infty} B_m(f, \tau_2) (1-\tau_1)^{m+1}$$

但し、 $\tau_2 > 1$ とする。 同様に、 $(\tau_1, \tau_2) = (\tau_1, 1)$ のまわりでも、

$$(6.9) \quad M_f(\tau_1, \tau_2) \sim \sum_{m=0}^{\infty} E_m(f, \tau_1) (1-\tau_2)^m + Y(1-\tau_2) \sum_{m=0}^{\infty} F_m(f, \tau_1) (1-\tau_2)^{m+1}$$

という漸近展開が成り立つ ($0 < \tau_1 < 1$)。

我々はまず \mathcal{T}_1 と \mathcal{T}_2 の間の接続公式を見る。そのために $f \in C_c^\infty(X_0)$ としては 条件 (6.6) を満たすものは“かりを考え、その全体を $C_c^\infty(X_1)$ とおこう：

$$(6.10) \quad C_c^\infty(X_1) = \left\{ f \in C_c^\infty(X); \text{supp } Mf \cap \{(\tau_1, \tau_2); \tau_1 \leq \frac{1}{2} \text{ または } \tau_1, \tau_2 \leq 1\} = \emptyset \right\}$$

そのとき、補題 6.1 を用い、 $\langle (\Omega_i - \chi_{\lambda_1, \lambda_2}(\Omega_i)) \oplus u_e, f \rangle$ を計算すれば 次の補題が成り立つ (cf. [1. Lemma 3.6 Case 4])。

補題 6.2. $\oplus \in \mathcal{D}'_{X_1, \lambda_1, \lambda_2, H}(X)$, その \mathcal{T}_e' への制限を $\frac{u_e}{\omega}$ とするとき、ある $\alpha_m^{(i)}, \beta_m^{(i)} \in \mathcal{D}'((1, \infty))$ が存在して、

$$\left\{ (\Omega_i - \chi_{\lambda_1, \lambda_2}(\Omega_i)) (\oplus u_0 + \oplus u_1) - \left(\sum_{m=0}^M A_m \otimes \alpha_m^{(i)} + B_0 \otimes \beta_0^{(i)} \right) \right\}_{|C_c^\infty(X_1)} = 0$$

この補題と補題 5.4 を組み合わせると、

$$(6.11) \quad \alpha_m = 0 \quad (m \geq M \equiv 2), \quad \beta_m = 0 \quad (m \geq 0)$$

が成立する。この事実と補題 6.1 を用いて次のことを証明しよう。

補題 6.3. \oplus を $\mathcal{D}'_{X_1, \lambda_1, \lambda_2, H}(X)$ の元、 ${}_2 C_{ij}^k$ を (6.5), (6.7) により定まる数とするとき、

$${}_2 C_{2j}^k = {}_1 C_{2j}^k = 0 \quad (j, k = 1, 2)$$

$${}_2 C_{i2}^k = 0 \quad (i, k = 1, 2).$$

(証明) f を $C_c^\infty(X_1)$ の中の函数とし、補題 6.2, (6.11) に注意して、

$$(6.12) \quad \langle (\Omega_i - \chi_{\lambda_1, \lambda_2}(\Omega_i)) \oplus, f \rangle = \sum_{m=0}^M \langle A_m \otimes \alpha_m^{(i)}, f \rangle + \langle B_0 \otimes \beta_0^{(i)}, f \rangle \\ = 0$$

とおこう。そのとき補題6.1, (6.8) より $\{A_m, B_m\}_{m \geq 0}$ の
一次独立性を用いて $\alpha_{\mu}^{(i)}$ を計算することにより。

$$\sum_{j,k=1}^2 ({}_1C_2^k - {}_2C_2^k) 4\mu \hat{f}_0(\lambda_k) F_j(\tau_2, \lambda_k) = 0.$$

ここで $\hat{f}_0(\lambda)$ は (3.21) の $F_2(\tau, \lambda)$ における $(1-\tau)^{-\mu}$ の係
数で, $\hat{f}_0(\lambda) \neq 0$ である。故に $\{F_j(\tau_2, \lambda_k)\}_{j,k}$ の一次独立性から,

$${}_1C_2^k - {}_2C_2^k = 0 \quad (j, k = 1, 2).$$

一方, $\beta_0^{(i)}$ を計算すれば,

$$4\mu {}_1C_2^k \hat{f}_0(\lambda_k) F_j(\tau_2, \lambda_k) = 0 \quad (j, k = 1, 2).$$

再び $\{F_j(\tau_1, \lambda_k)\}_{j,k}$ の一次独立性から,

$${}_1C_2^k = 0$$

が導かれる。また, ${}_2C_{i2}^k = 0$ は, (6.7) より ${}_2C_{i2}^k = 0$
から明らかである。

Q.E.D.

(注意) 同様にして, \mathcal{D}_0 と \mathcal{D}_1 の間の接続公式を求める過程
から, ${}_1C_{i2}^k = 0$ ($i, k = 1, 2$), 従って, $l = 1, 2$ に対して

$$(6.13) \quad {}_l C_{i,j}^k = 0 \quad (i, j, k = 1, 2; (i, j) \neq (1, 1))$$

が成り立つ。即ち, U_1, U_2 は超幾何幾数の積と和で表わ
せる。

補題6.3 から補題6.2 は次のように精密化される。

補題6.4. $\textcircled{H} \in \mathcal{D}'_{X_{\lambda_1, \lambda_2, H}}(X)$, ${}_l C_{i,j}^k$ を (6.5), (6.7) から定ま

る数とするとき，次の式が成立する。

$$(i) \quad \left\{ (\Omega_1 - \chi_{\lambda_1, \lambda_2}(\Omega_1)) (\oplus u_1 + \oplus u_2) \right.$$

$$(6.14) \quad \left. - A_0 \otimes \sum_{\substack{j, k=1 \\ k \neq k'}}^2 ({}_2 C_{1j}^k - {}_1 C_{1j}^k) 4\mu F_j(\tau_2, \lambda_{k'}) \right\} |_{C_c^\infty(X_1)} = 0$$

$$(ii) \quad \left\{ (\Omega_2 - \chi_{\lambda_1, \lambda_2}(\Omega_2)) (\oplus u_1 + \oplus u_2) \right.$$

$$(6.15) \quad \left. - A_0 \otimes \sum_{\substack{j, k=1 \\ k \neq k'}}^2 ({}_2 C_{1j}^k - {}_1 C_{1j}^k) 4\mu \lambda_{k'} F_j(\tau_2, \lambda_{k'}) \right\} |_{C_c^\infty(X_1)} = 0.$$

次に我々は ${}_2 C_{1j}^k$, d_m ($j, k, l = 1, 2; m = 0, 1$) の間の関係を調べよう。まず d_m については一般に次のことが成立する。

補題 6.5. $\oplus \in \mathcal{D}'_{\lambda_1, \lambda_2, H}(X)$ に対し，(6.5) により定まる d_m をとったとき，

$$(6.16) \quad d_m = \sum_{j, k=1}^2 d_{m, j}^k F_j(\tau_2, \lambda_{k'}) \quad (m=0, 1)$$

がある $d_{m, j}^k \in \mathbb{C}$ に対して成り立つ。特に d_m は $(1, \infty)$ 上の解析函数として表わされる。

(証明) 補題 6.4 と命題 5.3 を用い，

$$\left\{ (\Omega_i - \chi_{\lambda_1, \lambda_2}(\Omega_i)) \oplus - \sum_{m=0}^{M-1} A_m \otimes d_m^{(i)} \right\} |_{C_c^\infty(X_i)} = 0$$

と表わしたときの $d_m^{(i)}$ を計算し $d_0^{(i)} = 0$ とおくと，

$$(6.17) \quad \sum_{\substack{j, k=1 \\ k \neq k'}}^2 ({}_2 C_{1j}^k - {}_1 C_{1j}^k) 4\mu F_j(\tau_2, \lambda_{k'}) - (4\mu + \lambda_1 + \lambda_2) d_0 + L_2 d_0 = 0$$

$$(6.18) \quad \sum_{\substack{j, k=1 \\ k \neq k'}}^2 ({}_2 C_{1j}^k - {}_1 C_{1j}^k) 4\mu \lambda_{k'} F_j(\tau_2, \lambda_{k'}) - 4\mu L_2 d_0 - \lambda_1 \lambda_2 d_0 = 0$$

また, $d_1^{(i)}$ の計算も同様に行なうと,

$$(6.19) \quad 4(\mu-1)d_0 + \{8(1-\mu) - (\lambda_1 + \lambda_2)\} d_1 + L_2 d_1 = 0$$

$$(6.20) \quad 4(\mu-1)L_2 d_0 + 8(1-\mu)L_2 d_1 - \lambda_1 \lambda_2 d_1 = 0.$$

故に $L_2(6.17) - (6.18)$ から

$$L_2^2 d_0 - (\lambda_1 + \lambda_2) L_2 d_0 + \lambda_1 \lambda_2 d_0 = (L_2 - \lambda_1)(L_2 - \lambda_2) d_0 = 0.$$

このことから (6.16) が $m=0$ について成り立つ。 $m=1$ については $L_2(6.19) - (6.20)$ を計算すればよい。 Q.E.D.

補題 6.5 を用いながら再び (6.17), (6.19) をみると、

$$\sum_{\substack{j, k=1 \\ k \neq k'}}^2 \left\{ ({}_2 C_{1j}^k - {}_1 C_{1j}^k) 4\mu - (4\mu + \lambda_{k'}) d_{0,j}^k \right\} F_j(\tau_2, \lambda_{k'}) = 0$$

$$\sum_{\substack{j, k=1 \\ k \neq k'}}^2 [4(\mu-1) d_{0,j}^k + \{8(1-\mu) - \lambda_{k'}\} d_{1,j}^k] F_j(\tau_2, \lambda_{k'}) = 0.$$

このことから直ちに、

$$(6.21) \quad 4\mu ({}_2 C_{1j}^k - {}_1 C_{1j}^k) = (4\mu + \lambda_{k'}) d_{0,j}^k$$

$$(6.22) \quad 4(\mu-1) d_{0,j}^k = \{8(\mu-1) + \lambda_{k'}\} d_{1,j}^k.$$

同様に、(6.18), (6.20) からは、

$$(6.23) \quad 4\mu \lambda_{k'} ({}_2 C_{1j}^k - {}_1 C_{1j}^k) = (4\mu + \lambda_{k'}) \lambda_{k'} d_{0,j}^k$$

$$(6.24) \quad 4(\mu-1) \lambda_{k'} d_{0,j}^k = \{8(\mu-1) + \lambda_{k'}\} \lambda_{k'} d_{1,j}^k.$$

即ち、条件式 (6.23), (6.24) は (6.21), (6.22) から自動的に導かれる。以上をまとめて、 τ_1 と τ_2 との間の接続公式に関する次の命題を得る。

命題 6.6. $\chi_{\lambda_1, \lambda_2}$ は regular ($\lambda_1 \neq \lambda_2$) とする。そのとき、 $\text{④}'_{\chi_{\lambda_1, \lambda_2, H}}(X)$ に対して以下の事実が成り立つ。

$$(i) U_\ell(\tau_1, \tau_2) = \sum_{\substack{j, k=1 \\ k \neq k'}}^2 {}_k C_{1j}^k F_j(\tau_1, \lambda_k) F_j(\tau_2, \lambda_{k'})$$

と表わせる。さらに、

$${}_2 C_{12}^k = 0 \quad \text{かつ} \quad {}_2 C_{11}^k + {}_2 C_{11}^{k'} = 0$$

$$(ii) d_m = \sum_{\substack{j, k=1 \\ k \neq k'}}^2 {}_k d_{m,j}^k F_j(\tau_2, \lambda_{k'}) \quad (m=0, 1)$$

$$d_m = 0 \quad (m \geq M), \quad \beta_m = 0 \quad (m \geq 0)$$

と表わせる。

$$(iii) \quad 4M({}_2 C_{1j}^k - {}_1 C_{1j}^k) = (4M + \lambda_k) {}_0 d_{0,j}^k$$

$$4(M-1) {}_0 d_{0,j}^k = \{8(M-1) + \lambda_k\} {}_1 d_{1,j}^k \quad (j=1, 2).$$

但し、 $M=2$.

系 6.7. 命題 6.6 と同じ仮定の下に。

$$\lambda_k = -8 \Rightarrow {}_2 C_{1j}^k = {}_1 C_{1j}^k \quad \text{かつ} \quad {}_0 d_{0,j}^k = 0 \quad (j=1, 2)$$

がそれぞれ $k=1, 2$ に対して成立する。

全く同様にして τ_1 と τ_2 との間の接続公式を求めることがで
きる。特に、補題 6.3 に類似した関係式：

$$(6.25) \quad {}_0 C_{12}^k = {}_1 C_{12}^k = 0 \quad (i, k=1, 2)$$

$$(6.26) \quad {}_0 C_{2j}^k = 0 \quad (j, k=1, 2)$$

が成立し、このことと補題6.3及び(6.7)をあわせると、

$$(6.27) \quad U_\ell(\tau_1, \tau_2) = \sum_{\substack{k=1 \\ k=k'}}^2 \ell C_{11}^{k'} F_1(\tau_1, \lambda_k) F_1(\tau_2, \lambda_{k'}) \quad (\ell=0, 1, 2)$$

$$(6.28) \quad \ell C_{11}^k + \ell C_{11}^{k'} = 0 \quad (k, k' = 1, 2; k \neq k') \quad (\ell=0, 2).$$

従って命題5.5より次の事実が云える。

補題6.8. $\Lambda_d = \{4r(r+3); r=0, 1, 2, \dots\}$ とする。そのとき、 $\Theta \in D'_{X_{\lambda_1, \lambda_2, H}}(X)$ に対して、 $\lambda_k \notin \Lambda_d$ ならば、

$$\ell C_{11}^k = 0 \quad (\ell=0, 1)$$

が、それぞれ $k=1, 2$ に対して成立する。

実際、(6.27)及び命題5.5 i) o) 1)から $\ell C_{11}^k a_0(\lambda_k, \mu) = 0$ が示されるが、 $\lambda_k \notin \Lambda_d$ の場合、 $a_0(\lambda_k, \mu) \neq 0$ となるからである。

以上をすべてまとめて次の定理が証明できた。

定理6.9. X_{λ_1, λ_2} は regular ($\lambda_1 \neq \lambda_2$) とする。そのとき、任意の $\Theta \in D'_{X_{\lambda_1, \lambda_2, H}}(X)$ は表6.1の①の形に表わすことができる。特に序説の定理1.1のi)が成立する。

6.2. X_{λ_1, λ_2} が singular の場合 ($\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$)。

次に X_{λ_1, λ_2} が singular を考慮する。方法は X_{λ_1, λ_2} が regular のときとほぼ同様なので概略を述べるのに留める。また、 $\lambda = \lambda_1 = \lambda_2$ とおくことにする。さて今の場合、 $U_\ell(\tau_1, \tau_2)$ は次の形をしていたことを思い出しておく(補題3.5, 命題5.5):

$$(6.29) \quad \left\{ \begin{array}{l} u_\ell(\tau_1, \tau_2) = \sum_{i,j=1}^2 e C_{ij}^{\ell} F_i(\tau_1, \lambda) F_j(\tau_2, \lambda) \\ \quad + \sum_{i,j=1}^2 e C_{ij}^{\ell} \{ F_i(\tau_1, \lambda) F_{j+2}(\tau_2, \lambda) - F_{i+2}(\tau_2, \lambda) F_j(\tau_2, \lambda) \} \\ \quad (\ell=0,1,2) \\ e C_{11}^1 = e C_{22}^1 = 0, \quad e C_{12}^1 + e C_{21}^1 = 0, \quad e C_{12}^2 = e C_{21}^2 \\ \quad (\ell=0,2). \end{array} \right.$$

$\chi_{\lambda_1, \lambda_2}$ が regular のときと同様、 τ_1 と τ_2 の間の接続公式からはじめよう。今度も補題 6.2, (6.11) 及び次の補題が前と全く同じ論法により成立することが分かる。

補題 6.10. $\oplus \in \mathcal{D}'_{\chi_{\lambda_1, \lambda_2}, H}(X)$ に対し、 $e C_{ij}^k$ を (6.5), (6.29) により定まる数とするとき、

$$\begin{aligned} {}_2 C_{2j}^k &= {}_1 C_{2j}^k = 0 & (j, k = 1, 2) \\ {}_2 C_{i2}^k &= 0 & (i, k = 1, 2). \end{aligned}$$

従って補題 6.4 に相当するものとして次のことが云える。

補題 6.11. $\oplus \in \mathcal{D}'_{\chi_{\lambda_1, \lambda_2}, H}(X)$ に対し、 $e C_{ij}^k$ を (6.5), (6.29) により定まる数とするとき、

$$(6.30) \quad (i) \left\{ (\Omega_1 - \chi_{\lambda_1, \lambda}(\Omega_1)) (\oplus u_1 + \oplus u_2) \right. \\ \left. - A_0 \oplus \sum_{j,k=1}^2 ({}_2 C_{1j}^k - {}_1 C_{1j}^k) 4\mu F_{j+2(k-1)}(\tau_2, \lambda) \right\} \Big|_{C_c^\infty(X_1)} = 0$$

$$(6.31) \quad (ii) \left\{ (\Omega_2 - \chi_{\lambda_1, \lambda}(\Omega_2)) (\oplus u_1 + \oplus u_2) \right. \\ \left. - A_0 \oplus \sum_{j,k=1}^2 ({}_2 C_{1j}^k - {}_1 C_{1j}^k) 4\mu L_2 F_{j+2(k-1)}(\tau_2, \lambda) \right\} \Big|_{C_c^\infty(X_1)} = 0.$$

ここで、 $L_2 F_{j+2}(\tau_2, \lambda) = \lambda F_{j+2}(\tau_2, \lambda) + F_j(\tau_2, \lambda)$ であったことに注意。

補題 6.12. $\Theta \in \mathcal{D}'_{\lambda, \lambda_1, \lambda_2}(X)$ に対して、(6.5) から定まる d_m をとったとき、

$$(6.32) \quad d_m = \sum_{j,k=1}^2 d_{m,j,k} F_{j+2(k-1)}(T_2, \lambda)$$

がある $d_{m,j,k} \in \mathbb{C}$ に対して成立する。特に d_m は $(1, \infty)$ 上の解析函数として表わせる。

(略証) 補題 6.11 と命題 5.3 を使ひ、

$$\left\{ (-L_i - \chi_{\lambda_1, \lambda_2}(L_i)) \Theta - \sum_{m=0}^{M-1} A_m \otimes d_m^{(i)} \right\} |_{C_c^\infty(X_i)} = 0$$

と表わしたときの $d_0^{(i)}$, $d_1^{(i)}$ を計算することにより、

$$(6.33) \quad \left\{ \sum_{j,k=1}^2 ({}_2 C_{1j}^k - {}_1 C_{1j}^k) 4\mu F_{j+2(k-1)}(T_2, \lambda) - (4\mu + 2\lambda) d_0 + L_2 d_0 = 0 \right.$$

$$(6.34) \quad \left\{ \sum_{j,k=1}^2 ({}_2 C_{1j}^k - {}_1 C_{1j}^k) 4\mu L_2 F_{j+2(k-1)}(T_2, \lambda) - 4\mu L_2 d_0 - \lambda^2 d_0 = 0 \right.$$

$$(6.35) \quad \left\{ 4(\mu-1)d_0 + \{ 8(1-\mu) - 2\lambda \} d_1 + L_2 d_1 = 0 \right.$$

$$(6.36) \quad \left\{ 4(\mu-1)L_2 d_0 + 8(1-\mu)L_2 d_1 - \lambda^2 d_1 = 0. \right.$$

従って、 $L_2(6.33) - (6.34)$ より $(L_2 - \lambda)^2 d_0 = 0$ 、また $L_2(6.35) - (6.36)$ から $(L_2 - \lambda)^2 d_1 = 0$ が得られ。 (6.32) が導かれる。

G.E.D.

$(6.33), (6.35)$ を補題 6.12 を用ひて整理すると、

$$(6.37) \quad \begin{aligned} & \sum_{j,k=1}^2 \left\{ ({}_2 C_{1j}^k - {}_1 C_{1j}^k) 4\mu - (4\mu + \lambda) d_{0,j,k} \right\} F_{j+2(k-1)}(T_2, \lambda) \\ & + \sum_{j=1}^2 d_{0,j,2} F_j'(T_2, \lambda) = 0 \end{aligned}$$

$$(6.38) \quad \sum_{j,k=1}^2 [4(\mu-1)d_{0,j,k} + \{8(1-\mu)-\lambda\}d_{1,j,k}] F_{j+2(k-1)}(\tau_2, \lambda) \\ + \sum_{j=1}^2 d_{1,j,2} F_j(\tau_2, \lambda) = 0.$$

故に、

$$(6.39) \quad \begin{cases} 4\mu ({}_2C_{1j}^1 - {}_1C_{1j}^1) = (4\mu+\lambda) d_{0,j,1} - d_{0,j,2} \\ 4\mu ({}_2C_{1j}^2 - {}_1C_{1j}^2) = (4\mu+\lambda) d_{0,j,2} \end{cases}$$

$$(6.40) \quad \begin{cases} 4(\mu-1)d_{0,j,1} = \{8(\mu-1)+\lambda\}d_{1,j,1} - d_{1,j,2} \\ 4(\mu-1)d_{0,j,2} = \{8(\mu-1)+\lambda\}d_{1,j,2} \end{cases}$$

が得られる。同様に (6.34), (6.36) からは。

$$(6.41) \quad \begin{cases} 4\mu \lambda ({}_2C_{1j}^1 - {}_1C_{1j}^1) = (4\mu+\lambda) \lambda d_{0,j,1} - 4\mu ({}_2C_{1j}^2 - {}_1C_{1j}^2) + 4\mu d_{0,j,2} \\ 4\mu \lambda ({}_2C_{1j}^2 - {}_1C_{1j}^2) = (4\mu+\lambda) \lambda d_{0,j,2} \end{cases}$$

$$(6.42) \quad \begin{cases} 4(\mu-1)\lambda d_{0,j,1} = \{8(\mu-1)+\lambda\}\lambda d_{1,j,1} - 4(\mu-1)d_{0,j,2} + 8(\mu-1)d_{1,j,2} \\ 4(\mu-1)\lambda d_{0,j,2} = \{8(\mu-1)+\lambda\}\lambda d_{1,j,2} \end{cases}$$

が従うが、これは明らかに (6.39), (6.40) から自動的に導かれる。

以上をまとめて、 τ_1 と τ_2 の間の接続公式が次のような形で得られる。

命題 6.13. $X_{\lambda, \mu}$ は singular とする。そのとき、 $\mathbb{H} \in$
 $\mathcal{D}'_{X_{\lambda, \mu}, H}(X)$ に対して以下の事実が成立する。

$$(i) U_\ell(\tau_1, \tau_2) = \sum_{j=1}^2 \ell C_{1j}^1 F_i(\tau_1, \lambda) F_j(\tau_2, \lambda) \\ + \sum_{j=1}^2 \ell C_{1j}^2 \{ F_i(\tau_1, \lambda) F_{j+2}(\tau_2, \lambda) - F_3(\tau_1, \lambda) F_j(\tau_2, \lambda) \}$$

と表わせる。さらに、

$${}_2C_{1j}^1 = 0 \quad \text{かつ} \quad {}_2C_{1j}^2 = 0 \quad (j=1, 2).$$

$$(ii) d_m = \sum_{j,k=1}^2 d_{m,j,k} F_{j+2(k-1)}(\tau_2, \lambda) \quad (m=0,1)$$

$$d_m = 0 \quad (m \geq M), \quad \beta_m = 0 \quad (m \geq 0)$$

と表わせる。

$$(iii) 4\mu ({}_2C_{1j}^1 - {}_1C_{1j}^1) = (4\mu + \lambda) d_{0,j,1} - d_{0,j,2}$$

$$4\mu ({}_2C_{1j}^2 - {}_1C_{1j}^2) = (4\mu + \lambda) d_{0,j,2}$$

$$4(\mu - 1) d_{0,j,1} = \{8(\mu - 1) + \lambda\} d_{1,j,1} - d_{1,j,2}$$

$$4(\mu - 1) d_{0,j,2} = \{8(\mu - 1) + \lambda\} d_{1,j,2}$$

$$(j=1,2).$$

ここで $\mu = 2$.

系 6.14. 命題 6.13 と同じ仮定の下で、

$$\lambda = -8 \Rightarrow {}_2C_{1j}^k = {}_1C_{1j}^k \text{ かつ } d_{0,j,2} = 0$$

が $j, k = 1, 2$ に対して成立する。

τ_0 と τ_1 の間の接続公式も同様に導かれ、結局 U_ℓ は、

$$(6.43) \quad \left\{ U_\ell(\tau_1, \tau_2) = {}_\ell C_{11}^2 \{ F_1(\tau_1, \lambda) F_3(\tau_2, \lambda) - F_3(\tau_1, \lambda) F_1(\tau_2, \lambda) \} \right\}$$

$$(6.44) \quad \left\{ \begin{aligned} U_1(\tau_1, \tau_2) &= {}_1C_{11}^1 F_1(\tau_1, \lambda) F_1(\tau_2, \lambda) \\ &\quad + {}_1C_{11}^2 \{ F_1(\tau_1, \lambda) F_3(\tau_2, \lambda) - F_3(\tau_1, \lambda) F_1(\tau_2, \lambda) \} \end{aligned} \quad (\ell=0,2) \right.$$

という形で書けることが分かる。また、補題 6.8 と同様

$$(6.45) \quad \lambda \neq \lambda_d \Rightarrow {}_0C_{11}^k = 0 \quad (\ell=0,1)$$

が、 $k=1, 2$ に対して従う。これらをすべてまとめて次の定理の成立することが分かった。

定理 6.15. $\chi_{\lambda_1, \lambda_2}$ は singular とする ($\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$)。そのとき、任意の $\Theta \in D'_{\chi_{\lambda, \lambda}, H}(X)$ は表 6.1 の ② の形に表わすことができる。特に序説の定理 1.1 の ii) が成立する。

① (λ_1, λ_2) が regular の場合 ($\lambda_1 \neq \lambda_2$)

一般的に 云えること	④ $\mathbb{H} C_c^\infty(X_0) = \sum_{k=0}^2 \mathbb{H} U_k + \sum_{m=0}^1 A_m \otimes d_m + \sum_{m=0}^1 E_m \otimes r_m$ (cf. (6.5))
	⑤ $U_0(\tau_1, \tau_2) = C_1 \{ F(\tau_1, \lambda_1) F(\tau_2, \lambda_2) - F(\tau_1, \lambda_2) F(\tau_2, \lambda_1) \}$ $U_1(\tau_1, \tau_2) = C_2 F(\tau_1, \lambda_1) F(\tau_2, \lambda_2) + C_3 F(\tau_1, \lambda_2) F(\tau_2, \lambda_1)$ $U_2(\tau_1, \tau_2) = C_4 \{ F(\tau_1, \lambda_1) F(\tau_2, \lambda_2) - F(\tau_1, \lambda_2) F(\tau_2, \lambda_1) \}$
	⑥ $d_m = \sum_{i,k=1}^2 d_{m,i}^k F_i(\tau_2, \lambda_{k'})$ $r_m = \sum_{i,k=1}^2 e_{m,i}^k F_i(\tau_1, \lambda_{k'})$ } と表わせる $\begin{cases} m=0,1 \\ k'=1,2 \text{ & } k \neq k' \end{cases}$
	⑦ $C_1 = C_2 = C_3 = 0$
$\lambda_1 \notin \Lambda_d \cup \Lambda_S$ $\lambda_2 \notin \Lambda_d \cup \Lambda_S$ の場合	⑧ $d_m = \sum_{k=1}^2 d_{m,1}^k F(\tau_2, \lambda_{k'})$ $r_m = 0$ } と表わせる $\begin{cases} m=0,1 \\ k'=1,2 \text{ & } k \neq k' \end{cases}$
	⑨ $d_{0,1}^1 = 8C_4/(8+\lambda_1)$ $d_{0,1}^2 = -8C_4/(8+\lambda_2)$
	⑩ $d_{1,1}^1 = 4d_{0,1}^1/(8+\lambda_1)$ $d_{1,1}^2 = 4d_{0,1}^2/(8+\lambda_2)$
	⑪ $e_{0,1}^1 = 8C_3/(8+\lambda_1)$ $e_{0,1}^2 = 8C_3/(8+\lambda_2)$
$\lambda_1 \notin \Lambda_d \cup \Lambda_S$ $\lambda_2 \in \Lambda_d$ の場合	⑫ $C_1 = C_2 = 0$
	⑬ $d_m = \sum_{k=1}^2 d_{m,1}^k F(\tau_2, \lambda_{k'})$ $r_m = e_{m,1}^1 F(\tau_1, \lambda_2)$ } と表わせる $\begin{cases} m=0,1 \\ k'=1,2 \text{ & } k \neq k' \end{cases}$
	⑭ $d_{0,1}^1 = 8C_4/(8+\lambda_1)$ $d_{0,1}^2 = 8(-C_4-C_3)/(8+\lambda_2)$
	⑮ $d_{1,1}^1 = 4d_{0,1}^1/(8+\lambda_1)$ $d_{1,1}^2 = 4d_{0,1}^2/(8+\lambda_2)$
$\lambda_1 \in \Lambda_d$ $\lambda_2 \in \Lambda_d$ の場合	⑯ $d_m = \sum_{k=1}^2 d_{m,1}^k F(\tau_2, \lambda_{k'})$ $r_m = \sum_{k=1}^2 e_{m,1}^k F(\tau_1, \lambda_{k'})$ } と表わせる $\begin{cases} m=0,1 \\ k'=1,2 \text{ & } k \neq k' \end{cases}$
	⑰ $d_{0,1}^1 = 8(C_4-C_2)/(8+\lambda_1)$ $d_{0,1}^2 = 8(-C_4-C_3)/(8+\lambda_2)$
	⑱ $e_{0,1}^1 = 8(C_3+C_1)/(8+\lambda_1)$ $e_{0,1}^2 = 8(C_2-C_1)/(8+\lambda_2)$
	⑲ $d_{1,1}^1 = 4d_{0,1}^1/(8+\lambda_1)$ $d_{1,1}^2 = 4d_{0,1}^2/(8+\lambda_2)$
$\lambda_1 \notin \Lambda_S$ $\lambda_2 \in \Lambda_S$ の場合	⑳ $C_1 = C_2 = C_3 = C_4 = 0$
	㉑ $d_0 = 0$ $r_0 = 0$ } と表わせる
	㉒ $d_1 = \sum_{i=1}^2 d_{1,i}^2 F_i(\tau_2, \lambda_1)$ $r_1 = \sum_{i=1}^2 e_{1,i}^2 F_i(\tau_1, \lambda_1)$
	㉓ $d_{1,1}^1 = 4d_{0,1}^1/(8+\lambda_1)$ $d_{1,1}^2 = 4d_{0,1}^2/(8+\lambda_2)$

表 6.1 ①

(2) (λ_1, λ_2) が singular の場合 ($\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$)

一般的に 云えること	④ $\mathbb{C}_c^\infty(x_0) = \sum_{k=0}^2 \mathbb{C}_k + \sum_{m=0}^1 A_m \otimes d_m + \sum_{m=0}^1 E_m \otimes r_m$ (cf. (6.5))
	⑤ $U_0(\tau_1, \tau_2) = C_1 \{ F(\tau_1, \lambda) \tilde{F}(\tau_2, \lambda) - \tilde{F}(\tau_1, \lambda) F(\tau_2, \lambda) \}$
	$U_1(\tau_1, \tau_2) = C_2 \{ F(\tau_1, \lambda) F(\tau_2, \lambda) + C_3 \{ F(\tau_1, \lambda) \tilde{F}(\tau_2, \lambda) - \tilde{F}(\tau_1, \lambda) F(\tau_2, \lambda) \}$
	$U_2(\tau_1, \tau_2) = C_4 \{ F(\tau_1, \lambda) \tilde{F}(\tau_2, \lambda) - \tilde{F}(\tau_1, \lambda) F(\tau_2, \lambda) \}$
$\lambda \notin \Lambda_d \cup \Lambda_s$ の場合	○ $d_m = \sum_{i,k=1}^2 d_{m,i,k} F_{i+2(k-1)}(\tau_2, \lambda)$
	$r_m = \sum_{i,k=1}^2 e_{m,i,k} F_{i+2(k-1)}(\tau_2, \lambda)$
	○ $C_1 = C_2 = C_3 = 0$
	○ $d_m = d_{m,1,1} F(\tau_2, \lambda) + d_{m,1,2} \tilde{F}(\tau_2, \lambda)$
$\lambda \in \Lambda_d$ の場合	$r_m = 0$
	○ $d_{0,1,2} = 8C_4/(8+\lambda) \quad d_{1,1,2} = 4d_{0,1,2}/(8+\lambda)$
	○ $d_{0,1,1} = 8d_{0,1,2}/(8+\lambda) \quad d_{1,1,1} = \{4d_{0,1,1} + d_{1,1,2}\}/(8+\lambda)$
	○ $d_m = d_{m,1,1} F(\tau_2, \lambda) + d_{m,1,2} \tilde{F}(\tau_2, \lambda)$
$\lambda \in \Lambda_s$ の場合	$r_m = e_{m,1,1} F(\tau_2, \lambda) + e_{m,1,2} \tilde{F}(\tau_2, \lambda)$
	○ $d_{0,1,2} = 8(C_4 - C_3)/(8+\lambda) \quad d_{1,1,2} = 4d_{0,1,2}/(8+\lambda)$
	○ $d_{0,1,1} = \{-8C_2 + d_{0,1,2}\}/(8+\lambda) \quad d_{1,1,1} = \{4d_{0,1,1} + d_{1,1,2}\}/(8+\lambda)$
	○ $e_{0,1,2} = 8(-C_3 + C_1)/(8+\lambda) \quad e_{1,1,2} = 4e_{0,1,2}/(8+\lambda)$
	$e_{0,1,1} = \{8C_2 + e_{0,1,2}\}/(8+\lambda) \quad e_{1,1,1} = \{4e_{0,1,1} + e_{1,1,2}\}/(8+\lambda)$
	○ $C_1 = C_2 = C_3 = C_4 = 0$
	○ $d_0 = \sum_{i=1}^2 d_{0,i,1} F_i(\tau_2, \lambda) \quad d_1 = \sum_{i,k=1}^2 d_{1,i,k} F_{i+2(k-1)}(\tau_2, \lambda)$
	$r_0 = \sum_{i=1}^2 e_{0,i,1} F_i(\tau_2, \lambda) \quad r_1 = \sum_{i,k=1}^2 e_{1,i,k} F_{i+2(k-1)}(\tau_2, \lambda)$
	○ $d_{1,1,2} = -4d_{0,1,1} \quad d_{1,2,2} = -4d_{0,2,1}$
	○ $e_{1,1,2} = -4e_{0,1,1} \quad e_{1,2,2} = -4e_{0,2,1}$

表 6.1 (2)

注 1° $\cdot (\lambda_1, \lambda_2)$ が regular のとき, 表中の C_i と本文中の ${}_0C_{ij}^k$ との関係:

$$C_1 = {}_0C_{11}^1 = -{}_0C_{11}^2, \quad C_2 = {}_1C_{11}^1, \quad C_3 = {}_1C_{11}^2, \quad C_4 = {}_2C_{11}^1 = -{}_2C_{11}^2.$$

• (λ_1, λ_2) が singular のとき, 表中の C_i と本文中の ${}_0C_{ij}^k$ との関係:

$$C_1 = {}_0C_{11}^2, \quad C_2 = {}_1C_{11}^1, \quad C_3 = {}_1C_{11}^2, \quad C_4 = {}_2C_{11}^2.$$

注 2° $F(\tau, \lambda) = F_1(\tau, \lambda), \quad \tilde{F}(\tau, \lambda) = F_3(\tau, \lambda), \quad F_i(\tau, \lambda) = (L-\lambda) F_{i+2}(\tau, \lambda) \quad [i=1, 2]$.注 3° $\Lambda_d = \{4k(k+3); k=0, 1, 2, \dots\}, \quad \Lambda_s = \{-8\}$.

付録

この付録で我々は序説で述べた予想:

$$\mathcal{H} = \{ Mf(\tau_1, \tau_2) ; f \in C_c^\infty(X) \}$$

$$(A.1) \quad = \left\{ \omega \left[\varphi_0(\tau_1, \tau_2) + \gamma(1-\tau_1)\varphi_1(\tau_1, \tau_2) + \gamma(1-\tau_2)\varphi_1(\tau_2, \tau_1) + \gamma(1-\tau_1)\gamma(1-\tau_2)\varphi_2(\tau_1, \tau_2) \right] \right. \\ \left. \varphi_k(\tau_1, \tau_2) = \varphi_k(\tau_2, \tau_1) \quad (k=0, 1, 2), \varphi_0, \varphi_1, \varphi_2 \in C_c^\infty([0, \infty) \times [0, \infty)) \right\}$$

の下で後述の予想定理 A.6 が示せることにつき、その概略を述べる。その際、§6 まで述べてきた結果は自由に用いることにする。また、予想 (A.1)とともに我々は $\mathcal{D}'_H(X) \cong \mathcal{H}'$ であることを仮定して話を進めることにする。 $(X \setminus X_0)$ 上での $\mathcal{D}'_H(X)$ の構造を我々はまだ良く理解していない。)

A.1. I.E.D. ④ の $\mathcal{D}'_H(X)$ における分解について。

④ を $\mathcal{D}'_{X_1, X_2; H}(X)$ の元としよう。§6 では Mf の $(\tau_1, \tau_2) = (1, 1), (0, 1), (0, 0)$ での挙動が分からぬ為、 $C_c^\infty(X_0)$ の元子に対して議論をしなければならなかつたが、条件 (A.1) の下では一般の $f \in C_c^\infty(X)$ を自由に取り扱うことができる。まず最初に我々は $f \in C_c^\infty(X)$ に対して

$$(A.2) \quad \int_{T_\ell} u_\ell(\tau_1, \tau_2) Mf(\tau_1, \tau_2) d\tau_1 d\tau_2$$

の finite part を $\ell=2$ に対して以下のように定義する。 $\delta_1, \delta_2 > 0$ に対し、

$$\begin{aligned}
 & \int_{1+\delta_1}^{\infty} d\tau_1 \int_{1+\delta_2}^{\infty} d\tau_2 U_2(\tau_1, \tau_2) Mf(\tau_1, \tau_2) \\
 (A.3) \quad &= V_{11} \frac{1}{\delta_1 \delta_2} + V_{12} \frac{1}{\delta_1} \log \delta_2 + \frac{1}{\delta_1} \zeta_1(\delta_2) + V_{21} \log \delta_1 \frac{1}{\delta_2} + V_{22} \log \delta_1 \log \delta_2 \\
 &+ \log \delta_1 \zeta_2(\delta_2) + \xi_1(\delta_1) \frac{1}{\delta_2} + \xi_2(\delta_1) \log \delta_2 + G'(d_1, d_2)
 \end{aligned}$$

が成り立つことに注意して

$$\text{P.f. } \int_{T_2} U_2(\tau_1, \tau_2) Mf(\tau_1, \tau_2) d\tau_1 d\tau_2 = G'(0, 0).$$

但し、(A.3)で $V_{ij} \in \mathbb{C}$, ζ_i は $\lim_{\delta_2 \rightarrow +0} \zeta_i(\delta_2)$ が存在するような δ_2 の函数, ξ_i は $\lim_{\delta_1 \rightarrow +0} \xi_i(\delta_1)$ が存在するような δ_1 の函数, また G' は $G'(0, 0) \equiv \lim_{\substack{\delta_1 \rightarrow +0 \\ \delta_2 \rightarrow +0}} G'(0, 0)$ が存在するような δ_1, δ_2 の二变数函数である。明らかに $f \in C_c^\infty(X_0)$ に対しては、ここで定義された finite part の定義は、§6 (6.3) における finite part の定義と一致する。こうして、任意の $f \in C_c^\infty(X)$ に対して (6.4) により $\langle \mathcal{H}U_2, f \rangle$ を定義すると、この $\mathcal{H}U_2$ は §6 で定義された $\mathcal{H}U_2$ の $C_c^\infty(X)$ 上への拡張となり $\mathcal{H}U_2 \in \mathcal{D}'_H(X)$ が得られる。 $\ell = 0, 1$ に対しても同様の手続をすることにより、 $\mathcal{H}U_0, \mathcal{H}U_1$ が定義できる。

次に、我々は各 $\mathcal{H} \in \mathcal{D}'_{X_{\lambda_1, \lambda_2, H}}(X)$ に対し (6.5) で定められた $A_m \otimes \alpha_m, E_m \otimes Y_m$ をそれぞれ $\mathcal{D}'_H(X)$ の元に拡張しよう。すでに我々は α_m, Y_m が満たすべき条件をいくつか求めてきた (cf. 表 6.1) ことに注意する。まず " $A_m \otimes \alpha_m$ をみる為、" 我々は予想 (A.1) から従う $\tau_1 = 1$ のまわりの漸近展開：

$$(A.4) \quad M_f(\tau_1, \tau_2) \sim \sum_{m=0}^{\infty} A_m(f, \tau_2) (1-\tau_1)^m + \gamma (1-\tau_1) \sum_{m=0}^{\infty} B_m(f, \tau_2) (1-\tau_1)^m \quad (\tau_2 > 1),$$

及び、 $A_m(f, \tau_2)$ の $\tau_2 = 1$ のまわりの漸近展開：

$$(A.5) \quad A_m(f, \tau_2) \sim \sum_{n=0}^{\infty} \xi_{m,n}(f) (1-\tau_2)^n \quad (\tau_2 > 1)$$

を $f \in C_c^\infty(X)$ に対して行なう。一方 $\delta_m(\tau_2)$ は表6.1の中の形で表わされていたから、 $\delta > 0$ に対して

$$(A.6) \quad \int_{\delta}^{\infty} \delta_m(\tau_2) A_m(f, \tau_2) d\tau_2 = V_1 \frac{1}{\delta} + V_2 \log \delta + G''(\delta)$$

が成立する。但し $V_i \in \mathbb{C}$, $G''(\delta)$ は $G''(0) = \lim_{\delta \rightarrow 0} G''(\delta)$ が

存在するような δ の函数。そこで我々は、

$$(A.7) \quad P.f. \int_0^{\infty} \delta_m(\tau_2) A_m(f, \tau_2) d\tau_2 = G''(0)$$

とおき、

$$(A.8) \quad \langle A_m \otimes \delta_m, f \rangle = P.f. \int_0^{\infty} \delta_m(\tau_2) \alpha_m(\tau_2) d\tau_2 \quad (f \in C_c^\infty(X))$$

により $A_m \otimes \delta_m$ を定義すると、 $A_m \otimes \delta_m \in \mathcal{D}'_H(X)$ であり、しかも明らかにこの $A_m \otimes \delta_m$ は §5 で定義されたものの拡張になっている。同様な議論を $E_m \otimes \gamma_m$ にも適用すれば、 $E_m \otimes \gamma_m$ の $\mathcal{D}'_H(X)$ の元への拡張も得られる。

$$(A.9) \quad \Theta = \sum_{\ell=0}^{\infty} \Theta_{\ell} + \sum_{m=0}^{\infty} A_m \otimes \delta_m + \sum_{m=0}^{\infty} E_m \otimes \gamma_m + \Theta_M + \Theta_N$$

といふ $\mathcal{D}'_H(X)$ の中の分解が得られる。 $(\delta_m = 0 \ (m \geq \mu), \beta_m = 0 \ (\forall m \geq 0)$ などを用いてることに注意。) なお、ここで Θ_M は $M = X \setminus (X_0 \cup N)$ 上に台を持つ $\mathcal{D}'_H(X)$ の元、 Θ_N

は中電軌道 N に台を持つ \mathcal{D}'_H の元である。

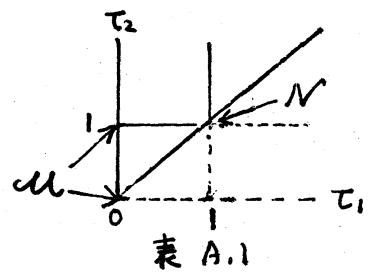
この r_m , Θu については、予想 (A.1)

及び仮定 $\mathcal{D}'_H(x) \cong \mathcal{N}'$ を用いて [1, Appendix]

と同様の議論をすることにより次の補題が成立する。

補題 A.1. (i) $(0,1)$ 上の解析函数 $r_m(\tau_2)$ は $\tau_2 = 0$ で解析的に接続される。

(ii) $\Theta u = 0$.



A.2. N 上の I.D. について。

次に我々は Θ_N の考察に移ろう。予想 (A.1) からすぐに分かるように M_f の $(\tau_1, \tau_2) = (1, 1)$ における漸近挙動は、

$$(A.10) \quad M_f(\tau_1, \tau_2) \sim \sum_{m,n=0}^{\infty} \Lambda_{m,n}(f) (1-\tau_1)^m (1-\tau_2)^n + \gamma(1-\tau_1) \sum_{m,n=0}^{\infty} \Lambda'_{m,n}(f) (1-\tau_1)^m (1-\tau_2)^n - \gamma(1-\tau_2) \sum_{m,n=0}^{\infty} \Lambda'_{n,m}(f) (1-\tau_1)^m (1-\tau_2)^n + \gamma(1-\tau_1) \gamma(1-\tau_2) \sum_{m,n=0}^{\infty} \Lambda''_{m,n}(f) (1-\tau_1)^m (1-\tau_2)^n (\Lambda_{m,n}(f), \Lambda'_{m,n}(f), \Lambda''_{m,n}(f) \in \mathbb{C}).$$

但し、 $\omega \varphi_k(\tau_1, \tau_2)$ の条件などから $\Lambda_{m,n}(f), \Lambda'_{m,n}(f), \Lambda''_{m,n}(f)$ はそれぞれ、

$$(A.11) \quad \begin{cases} \Lambda_{m,n}(f) = -\Lambda_{n,m}(f), \quad \Lambda''_{m,n}(f) = -\Lambda''_{n,m}(f) & (\forall m, n) \\ \sum_{m+n=\ell} \Lambda'_{m,n}(f) = 0 & (\ell = 0, 1, 2, \dots) \end{cases}$$

を満たす。特に $\Lambda_{m,m}(f) = \Lambda''_{m,m}(f) = 0$ ($m=0, 1, 2, \dots$) である。

今、各 m, n に対して、 $\Lambda_{m,n}, \Lambda'_{m,n}, \Lambda''_{m,n}$ を、

$\Lambda_{m,n}$ [resp. $\Lambda'_{m,n}, \Lambda''_{m,n}$] : $C_c^\infty(X) \rightarrow \mathbb{C}$: $f \mapsto \Lambda_{m,n}(f)$ [resp. $\Lambda'_{m,n}(f), \Lambda''_{m,n}(f)$]
 で定義すると, $\Lambda_{m,n}, \Lambda'_{m,n}, \Lambda''_{m,n} \in \mathcal{D}'_H(X)$, かつ上の事実と仮定
 $\mathcal{D}'_H(X) \cong M'$ から N に台を持つ $\mathcal{D}'_H(X)$ の元 Θ' は $\{\Lambda_{m,n},$
 $\Lambda''_{m,n}\}_{\substack{m,n=1,2,\dots \\ m>n}}$ 及び $\{\Lambda'_{m,n}\}_{\substack{m=1,2,\dots \\ n=0,1,2,\dots}}$ の一次結合 しかも有限和として
 一意的に表わすことができる:

$$(A.12) \quad \Theta' = \sum_{1 \leq n < m < \infty} (v_{m,n} \Lambda_{m,n} + v''_{m,n} \Lambda''_{m,n}) + \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} v'_{m,n} \Lambda'_{m,n} \quad (v_{m,n}, v'_{m,n}, v''_{m,n} \in \mathbb{C}).$$

次の命題は $(\Omega_i - \chi_{\lambda_1, \lambda_2}(\Omega_i)) \Theta' = 0$ を (A.12) などを使って
 計算することから得られる。

命題 A.2. N に台を持つ $\mathcal{D}'_{X_{\lambda_1, \lambda_2}, H}(X)$ の元が存在する為
 の必要充分条件は $(\lambda_1, \lambda_2) = (4(i-M)(i+1), 4(j-M)(j+1))$
 $(0 \leq i, j \leq M-1)$ 即ち $(\lambda_1, \lambda_2) = (-8, -8)$ となることである。
 またこのとき Θ' は $\Theta' = v \Lambda_{1,0}$ と表わせる。

A.3. 予想定理とその証明のoutline.

我々は, A.2 で $\Theta u_e, A_m \otimes d_m, E_m \otimes Y_m$ などの定義を,
 為直したが, それらに $\Omega_i - \chi_{\lambda_1, \lambda_2}(\Omega_i)$ を作用させてみよう。
 そのとき, Θu_e に関しては部分積分, $A_m \otimes d_m, E_m \otimes Y_m$ に関しては容易に分かる関係式:

$$\begin{aligned} \langle \Omega_1(A_m \otimes d_m), f \rangle &= p.f. \int_1^\infty d_m(T_2) (L_1 A_m)(f, T_2) + d_m(T_2) (L_2^* A_m)(f, T_2) \} dT_2 \\ \langle \Omega_2(A_m \otimes d_m), f \rangle &= p.f. \int_1^\infty d_m(T_2) (L_2^* L_1 A_m)(f, T_2) dT_2 \end{aligned}$$

なぜ、それに表6.1の結果を用いると、次の主張が成り立つことが分かる。

補題 A.3. $\Theta \in \mathcal{D}'_{X_{\lambda_1, \lambda_2, H}}(X)$, $\Theta_0 = \sum_{\ell=0}^2 \Theta_{\ell} u_{\ell} + \sum_{m=0}^1 A_m \otimes \alpha_m + \sum_{m=0}^1 E_m \otimes \gamma_m$ [$u_{\ell}, \alpha_m, \gamma_m$ は (A.9) で現われるもの] とするとき,

$$(A.13) \quad \begin{aligned} & \langle (\mathcal{R}_1 - \chi_{\lambda_1, \lambda_2}(\mathcal{R}_1)) \Theta_0, f \rangle \\ &= \sum_{m=0}^1 P.f. \int_1^\infty \{ \alpha_m(\tau_2) (L_2^* A_m)(f, \tau_2) - (L_2 \alpha_m)(\tau_2) A_m(f, \tau_2) \} d\tau_2 \\ &+ \sum_{m=0}^1 P.f. \int_0^1 \{ \gamma_m(\tau_1) (L_1^* E_m)(f, \tau_1) - (L_1 \gamma_m)(\tau_1) E_m(f, \tau_1) \} d\tau_1 \end{aligned}$$

$$(A.14) \quad \begin{aligned} & \langle (\mathcal{R}_2 - \chi_{\lambda_1, \lambda_2}(\mathcal{R}_2)) \Theta_0, f \rangle \\ &= \sum_{m=0}^1 P.f. \int_1^\infty \{ \alpha_m(\tau_2) L_2^*(L_1 A_m)(f, \tau_2) - (L_2 \alpha_m)(\tau_2) (L_1 A_m)(f, \tau_2) \} d\tau_2 \\ &+ \sum_{m=0}^1 P.f. \int_0^1 \{ \gamma_m(\tau_1) L_1^*(L_2 E_m)(f, \tau_1) - (L_1 \gamma_m)(\tau_1) (L_2 E_m)(f, \tau_1) \} d\tau_1 \end{aligned}$$

が各 $f \in C_c^\infty(X)$ について成り立つ。但し, $A_m(f, \tau_2)$ は (A.4), $E_m \otimes \gamma_m$ は $\tau_2 = 1$ のまわりの漸近展開:

$$(A.15) \quad Mf(\tau_1, \tau_2) \sim \sum_{m=0}^\infty E_m(f, \tau_1) (1-\tau_2)^m + \gamma(1-\tau_2) \sum_{m=0}^\infty F_m(f, \tau_1) (1-\tau_2)^m \quad (\tau_1 < 1)$$

により定められたもの。

さて、上の $E_m(f, \tau_1)$ の $\tau_1 = 1$ のまわりの漸近挙動を、

$$(A.16) \quad E_m(f, \tau_1) \sim \sum_{n=0}^\infty \xi'_{m,n}(f) (1-\tau_1)^n \quad (\tau_1 < 1; f \in C_c^\infty(X))$$

としよう。 $\xi_{m,n}(f)$ を (A.5) で定義したものとすれば、これらと $\Lambda_{m,n}(f)$, $\Lambda'_{m,n}(f)$ との間の関係は、

$$(A.17) \quad \xi_{m,n}(f) = \Lambda_{m,n}(f)$$

$$(A.18) \quad \xi'_{m,n}(f) = \begin{cases} \Lambda_{n,m}(f) & (0 \leq n < m) \\ \Lambda_{n,m}(f) + \Lambda'_{n-m,m}(f) & (m \leq n < \infty) \end{cases}$$

であることが容易に分かる。この事実と、(A.13), (A.14)の右辺の部分積分の計算、及び(A.11)などから、

$$(A.19) \quad (\Omega_i - \chi_{\lambda_1, \lambda_2}(\Omega_i)) \Theta_0 = \sum_{0 \leq n < m \leq \mu} v_{mn}^{(i)} \Lambda_{mn} + v'_{10}^{(i)} \Lambda'_{10}$$

がある $v_{mn}^{(i)}, v'_{mn}^{(i)} \in \mathbb{C}$ について成立することが確かめられる。従って、 $(\Omega_i - \chi_{\lambda_1, \lambda_2}(\Omega_i)) \Theta_N$ の計算を行ない、 $(-\Omega_i - \chi_{\lambda_1, \lambda_2}(\Omega_i)) \Theta = 0$ $\{\Theta = \Theta_0 + \Theta_N\text{に注意}\}$ とおけば、(補題5.4と同様な論法により) 次の補題が従う。

補題 A.4. $\Theta \in \mathcal{D}'_{\chi_{\lambda_1, \lambda_2}, H}(X)$ に対して、 Θ_N を (A.9) により定まるものとするとき、ある $v \in \mathbb{C}$ に対して

$$(A.2) \quad \Theta_N = v \Lambda_{10}$$

が成り立つ。

以上から、§6の議論と同様に、 $(\Omega_i - \chi_{\lambda_1, \lambda_2}(\Omega_i)) \Theta = 0$ の左辺を $\Lambda_{m,n}, \Lambda'_{m,n}$ で展開し、かつそれらの係数を 0 とおくことにより次の命題が得られる。

命題 A.5. Θ を $\mathcal{D}'_{\chi_{\lambda_1, \lambda_2}, H}(X)$ の元。その (A.9) における分解を

$$(A.21) \quad \Theta = \sum_{k=0}^2 \Theta_{U_k} + \sum_{m=0}^1 (A_m \otimes \Lambda_m + E_m \otimes Y_m) + \Theta_M + \Theta_N$$

とする。また、 Λ_d, Λ_s 及び $d_{m,i}^k, e_{m,i}^k, d_{m,i,k}, e_{m,i,k}$ は表 6.1 であげたもの、そして $\Theta_N = v \Lambda_{10}$ とする。(cf. 補題 A.4)。そのとき、 $\Theta_M = 0$ となり、かつ $d_{m,i}^k, e_{m,i}^k, d_{m,i,k}, e_{m,i,k}$ については表 6.1 における条件に加えて、次の各条

条件式が成立する。

(i) (λ_1, λ_2) が regular ($\lambda_1 \neq \lambda_2$), かつ $\lambda_1, \lambda_2 \notin \Lambda_S$ のとき,

$$4\mu(d_{1,1}^{1,1} + d_{1,1}^{2,2} + e_{1,1}^{1,1} + e_{1,1}^{2,2}) = \nu \{ 4(3\mu-2) + \lambda_1 + \lambda_2 \}.$$

(ii) (λ_1, λ_2) が regular, かつ $\lambda_k \notin \Lambda_S$, $\lambda_k \in \Lambda_S$ ($\begin{smallmatrix} k, k' = 1, 2 \\ k \neq k' \end{smallmatrix}$) のとき,

$$d_{1,2}^{k'} = 0, \quad e_{1,2}^{k'} = 0$$

$$4\mu(d_{1,1}^{k'} + e_{1,1}^{k'}) = \nu \{ 4(3\mu-2) + \lambda_1 + \lambda_2 \}$$

$\{\lambda_k \notin \Lambda_S$ の場合はさらに次式も成立:

$$\left\{ \begin{array}{l} e_{1,1}^{k'} = 0. \end{array} \right.$$

(iii) (λ_1, λ_2) が singular ($\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$), かつ $\lambda \notin \Lambda_S$ のとき,

$$4\mu(d_{1,1,1} + e_{1,1,1}) = \nu \{ 4(3\mu-2) + 2\lambda \}.$$

(iv) (λ_1, λ_2) が singular ($\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$), かつ $\lambda \in \Lambda_S$ 即ち $\lambda = -8$ のとき,

$$d_{m,i,k} = 0, \quad e_{m,i,k} = 0 \quad (\text{すべての } m, i, k \text{ に対して})$$

[ν の条件式はなし]。

逆に, u_e, d_m, r_m 及び $\Theta_N = \nu \Lambda_{10}$ を表 6.1 及び上の(i) ~ (iv) の条件を満たすように選べ;

$$\Theta = \sum_{e=0}^2 \Theta u_e + \sum_{m=0}^1 A_m \otimes d_m + \sum_{m=0}^1 E_m \otimes r_m + \Theta_N$$

とおくとき, $\Theta \in \mathcal{D}'_{X_{\lambda_1, \lambda_2, H}}(X)$ である。

命題 A.5 からすぐに定理 1.1 の逆が云えることが分かり, 従って次の定理が予想 (A.1) の下で示せたことになる。

予想定理 A.6. Θ' を X' 上の I.E.D. [i.e. $\Theta' \in \mathcal{D}'_{X_{\lambda_1, \lambda_2, H}}(X')$]

とし、その J'_e 上への各制限を $\frac{u_e}{w}$ とする ($l=0,1,2$)。

そのとき、 Θ' が X 上の I.E.D. Θ [i.e. $\Theta \in \mathcal{D}'_{X, \lambda_1, \lambda_2, H}(X)$] に拡張される為の必要充分条件は、 u_e が定理 1.1 の条件 i) あるいは ii) のすべての条件を満たすことである。

λ_1, λ_2 のうちの少なくとも一方が Λ_s に入っているとき [即ち -8 のとき]、 $\mathcal{D}'_{X, \lambda_1, \lambda_2, H}(X)$ の元はすべて $X \setminus X'$ 上に台を持っていることに注意しておく。次の命題は命題 A.5 からすぐに行き得られる。

命題 A.7. $m = \#\{\ell \in \{1, 2\} ; \lambda_\ell \in \Lambda_d\}$ とおくとき、
 $\mathcal{D}'_{X, \lambda_1, \lambda_2, H}(X)$ の次元は

$$\dim \mathcal{D}'_{X, \lambda_1, \lambda_2, H}(X) = 2^m$$

によって与えられる。但し、 $\#\{\cdot\}$ は集合 $\{\cdot\}$ の元の個数、 $\Lambda_d = \{4k(k+3) ; k=0, 1, 2, \dots\}$ とする。

References

- [1] Aoki, S. and Kato, S.: Connection formulas for invariant eigendistributions on certain semisimple symmetric spaces, 数理研講究録 570 (1985), 111-132.
- [2] Faraut, J.: Distributions sphérique sur les espaces hyperboliques, J. Math. Pures Appl., 58 (1979), 369-444.
- [3] Hirai, T.: Invariant eigendistributions of Lapace operators on real simple Lie groups, I. Case of $SU(p,q)$, Japan. J. Math., 39 (1970), 1-68.
- [4] Hirai, T.: Invariant eigendistributions of Lapace operators on real simple Lie groups, II, Japan. J. Math. New series, 2 (1976), 27-89.
- [5] Hoogenboom, B.: Spherical functions and differential operators on complex Grassmann manifolds, Ark. Math. 20 (1982), 69-85.
- [6] 大井鉄郎: 特殊函数, 岩波全書 252, 岩波書店.
- [7] Kengmana, T.: Characters of discrete series for pseudo-riemannian symmetric spaces, Proc. of the Univ. of Utah Conference 1982, Birkhäuser (1983), 177-183.
- [8] 松島与三: 多様体入門, 燐華房 (1966).
- [9] Osima, T. and Matsuki, T.: Orbits on affine symmetric spaces under the action of the isotropy subgroups, J. Math. Soc. Japan, 32, No. 2 (1980), 399-414.
- [10] Sano, S.: Invariant spherical distributions and the Fourier inversion formula on $GL(n, \mathbb{C})/GL(n, \mathbb{R})$, J. Math. Soc. Japan, 36, No. 2 (1984), 191-219.
- [11] Schwartz, L.: Théorie des distributions, Hermann, Paris (1973).
- [12] Warner, G.: Harmonic Analysis on semi-simple Lie groups I, II, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York (1972).