数理解析研究所講究録
599巻 1986年 127-127

2次形式の表現への保型形式の応用

名大理 北岡良之 (Yoshiyuki Kitaoka)

ここでは次の問題を考える。

"$S^{(m)}$, $T^{(n)}$を整数係数の正値対称行列で $m \geq n$ とする時 $S[X] = {}^tXSX = T$ が解 $X \in M_{m,n}(\mathbb{Z})$ を持つための十分条件又は解の数についての良い評価をあたえよ" というのが問題です。

一般的な結果として

定理 $m \geq 2n+3$ ならば S にのみ依る定数 $c(S)$ が存在し $S[X] = T$ がすべての素数 p に対し解 $X_p \in M_{m,n}(\mathbb{Z}_p)$ を持ち $\min_{0 \neq x \in \mathbb{Z}^n} T[x] > c(S)$ ならば $S[X] = T$ は解 $X \in M_{m,n}(\mathbb{Z})$ を持つ。

証明は算術的で、解の個数についての評価は一部の場合しか得られていませんが $m \leq 2n+2$ の時の様子等を推測するには解析的方法が便利で circle method による idea でどの様に行うかの概略を講演では話しました。くわしくは Tata の Lectures on Siegel modular forms and representation by quadratic forms をご覧下さい。