

$L_p(1, \chi)$ の下からの評価について

森田康夫 (東北大学 理学部)
(Yasuo Morita)

p を素数とし, χ を Dirichlet character, $L_p(s, \chi)$ を p 進 L 関数とする. このとき $L_p(1, \chi)$ を 下から評価すること を考える. $L_p(1, \chi)$ が 0 でないことは, 円分体における Leopoldt 予想と同値であり, Brumer により p 進体上の超越数の理論 を使って証明されている. 他方では, $L_p(1, \chi)$ の値を 円単数を使って explicit に表現することが, Leopoldt により成されている. そこでここでは $L_p(1, \chi)$ の Leopoldt による表現に対して, Baker, Brumer, Kaufman らの方法を使うことにより, $L_p(1, \chi)$ の値を 下から具体的に評価することを目標とする.

§1. $L_p(1, \chi)$ の explicit formula

p を素数とし, \mathbb{Q}_p を p 進体, \mathbb{C}_p を \mathbb{Q}_p の代数的閉包の完備化とする. 有理数体 \mathbb{Q} の代数的閉包の複素数体 \mathbb{C} と p 進体 \mathbb{C}_p への埋め込みを固定し, 代数的数を \mathbb{C} の元とも \mathbb{C}_p の元とも思う.

f を整数とし, χ を modulo f で定義された 原始 Dirichlet 指標, $L(s, \chi)$ を χ に対する Dirichlet の L 関数とする. この時 $L(s, \chi)$ の非負整数での値は 代数的数となり, それを interpolate することにより p 進 L 関数 $L_p(s, \chi)$ が構成できる. さらに, このようにして構成された p

進 L 関数の $s = 1$ での値 $L_p(1, \chi)$ も Dirichlet の L 関数の $s = 1$ での値 $L(1, \chi)$ と同様の表示を持つことが Leopoldt により示されている。以下このことを詳しく説明する。

$\chi(-1) = -1$ なら $L_p(s, \chi)$ は恒等的に 0 となるから、 $\chi(-1) = 1$ と仮定する。 ζ を $\exp(2\pi i/f)$ (に対する C または C_p の元) とし、

$$\tau(\chi) = \sum \chi(a) \zeta^a \quad (0 < a < f)$$

を χ に対する Gauss の和 とする。 C_p 中での収束べき級数

$$\log_p(z) = \sum (-1)^{n-1} z^n / n \quad (0 < n < \infty)$$

を p 進対数関数 と呼ぶ。この関数は 単位単数群 $\{z; |z-1|_p < 1\}$ 上で定義されているが、これを $\log_p(p) = 0$ と置き、関数等式

$$\log_p(z^n) = n \log_p(z)$$

を使って、 C_p の乗法群 $\{z; z \neq 0\}$ 上に拡張しておく。従って、 η が 1 のべき根なら $\log_p \eta = 0$ となる。この時、p 進 L 関数 $L_p(s, \chi)$ の $s = 1$ での値 $L_p(1, \chi)$ は次のようにして与えられる：

$$L_p(1, \chi) = - (1 - \chi(p)p^{-1}) \tau(\chi) f^{-1} \sum_{a=1}^{f-1} \chi(a) \log_p \left\{ \zeta^{(a-1)/2} \frac{\zeta^{-a}}{(1-\zeta^{-1})} \right\}$$

ここで、上式に出てきた数 $E(a) = \zeta^{(a-1)/2} \frac{\zeta^{-a}}{(1-\zeta^{-1})}$ は、円単数 と呼ばれる円分体 $Q(\zeta)$ の実の単数で、 $1 < a < f/2$, $(a, f) = 1$ なる条件の下で動かす時、乗法的に独立となる。なお Dirichlet の L 関数の $s = 1$ での値 $L(1, \chi)$ に対しても、上式の右辺の第一因子を除いた形での類似の等式が成り立つことが知られている。

§2. 代数的数の対数の linear form の下からの評価. I

m を自然数とし, $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m, \beta_0, \beta_1, \dots, \beta_m$ を代数的数とする. このとき, Gel'fond, Baker, Fel'dman らは, $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$ が乗法的に独立で, $\beta_0, \beta_1, \dots, \beta_m$ の少なくとも一つが 0 でないなら, $\log \alpha_i$ らについての linear form

$$\beta_0 + \beta_1 \log \alpha_1 + \dots + \beta_m \log \alpha_m$$

は 0 とはならないことを示した. さらに彼らは, この linear form がどの程度小さくなり得るかについて, この linear form の下からの評価を得ている.

これに対し, Gel'fond, Sprindzhuk, Kaufman らは これらの結果の p 進体上での類似を考え, 次のような結果を得ている.

定理. $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$ を乗法的に独立な代数的数とし, その height は h を越さぬものとする. また $\beta_0, \beta_1, \dots, \beta_m$ は すべては 0 でない代数的数で, その height は H 以下 ($H > 1$) であるとする. $\alpha_1, \dots, \alpha_m, \beta_0, \dots, \beta_m$ が 有理数体 \mathbb{Q} 上生成する体を K とし, K の \mathbb{Q} 上での次数を n とする. K の p 進体 C_p への埋め込みを固定し, これにより α_i や β_j を p 進体 C_p の元と思う. さらに この時 $\alpha_1, \dots, \alpha_m$ は 単位単数となり, $\log_p \alpha_1, \dots, \log_p \alpha_m$ が 定義されるものとする. この時 n, h, m, p のみによる 計算可能な定数 c があり,

$$|\beta_0 + \beta_1 \log_p \alpha_1 + \dots + \beta_m \log_p \alpha_m|_p > |p|_p^{c \log H}$$

なる形の評価が成り立つ.

(注) これは Kaufman による定理だが、彼は $\alpha_1, \dots, \alpha_m$ が p 進単位単数であるとし仮定していないが、彼の証明をみると、

$$|\alpha_i - 1|_p < |p|_p^{1/(p-1)}$$

であると仮定することが必要であると思う。

(注) 定理の中で、 p 進体での式の評価に 複素数体の中で定義された height が出てくるのは、 p 進体での下からの評価を、積公式 (product formula) を使う事により、複素数体での上からの評価に帰着するからである。

§3. 代数的数の対数の linear form の下からの評価, II

$\alpha_1, \dots, \alpha_m, \beta_0, \dots, \beta_m$ を §2 の定理の通りとし、linear form

$$L(\alpha, \beta) = \beta_0 + \beta_1 \log_p \alpha_1 + \dots + \beta_m \log_p \alpha_m$$

を、 C_p の中で下から評価することを考える。

簡単のため、 $\beta_0 = 0$ とし、我々は Kaufman の方法を多少簡易化したもの を使う。もちろん主な仕事は、彼が 単に ” c は計算可能な定数である ” としか言っていないのを、具体的に はっきり分かる形に 計算してみせることである。

$\alpha_1, \dots, \alpha_m$ が $|\alpha_i - 1|_p < |p|_p^{1/(p-1)}$ を満たすものとし、

$$\exp_p(z) = \sum z^m / m! \quad (C_p \text{ の中での収束べき級数})$$

$$\alpha_i^z = \exp_p\{\log_p(\alpha_i)z\} \quad (1 \leq i \leq m)$$

とおく. $\exp(z)$ は $|z|_p < |p|^{1/(p-1)}$ なる範囲で収束し, α_i は
前頁の条件を満たすから

$$|\log_p(\alpha_i)|_p = |\alpha_i - 1|_p < |p|^{1/(p-1)}$$

を満たし, 従って関数 α_i^z は $|z|_p \leq 1$ なる範囲で定義される.

特に この関数は z が 整数 のときに 定義される.

$\beta_m = 0$ の時は m の代わりに $m-1$ を取れば良いから, β_m は 0 で
ないものとし, $L(\alpha, \beta)$ を $-\beta_m$ で割り, $\beta_i / -\beta_m$ を改めて β_i と置く.

この時

$$L(\alpha, \beta) = \beta_1 \log_p \alpha_1 + \dots + \beta_{m-1} \log_p \alpha_{m-1} - \log_p \alpha_m$$

となる. 従って $L(\alpha, \beta)$ が小さければ

$$\log_p \alpha_m \sim \beta_1 \log_p \alpha_1 + \dots + \beta_{m-1} \log_p \alpha_{m-1}$$

と近似できる.

そこで次のような関数を考える.

$$F(z_1, \dots, z_{m-1})$$

$$= \sum c(l_1, \dots, l_m) \alpha_1^{(l_1 + \beta_1 l_m) z_1} \dots \alpha_{m-1}^{(l_{m-1} + \beta_{m-1} l_m) z_{m-1}} \quad (1 \leq l_i \leq L)$$

ここで $c(l_1, \dots, l_m)$ と l は整数であるものとし, 後で適当に定めるものとする. さて 関数 $F(z_1, \dots, z_{m-1})$ を z_1, \dots, z_{m-1} で $\sigma_1, \dots, \sigma_{m-1}$ 回
微分し, $z_1 = \dots = z_{m-1} = z$ と置き, 更に 共通の因子である

$$(\log_p \alpha_1)^{\sigma_1} \cdots (\log_p \alpha_{m-1})^{\sigma_{m-1}}$$

で割ると,

$$\begin{aligned} f(z) &= f_{\sigma_1 \dots \sigma_{m-1}}(z) \\ &= \sum c(l_1, \dots, l_m) (1 + \beta_1 l_m)^{\sigma_1} \cdots (1 + \beta_{m-1} l_m)^{\sigma_{m-1}} \\ &\quad \times \alpha_1^{(1+\beta_1 l_m)z} \cdots \alpha_{m-1}^{(1+\beta_{m-1} l_m)z} \end{aligned}$$

となる. そこで $L(\alpha, \beta)$ が十分小さいとすると, (関数として) $f(z)$ と

$$\begin{aligned} \Phi(z) &= \Phi_{\sigma_1 \dots \sigma_{m-1}}(z) \\ &= \sum c(l_1, \dots, l_m) (1 + \beta_1 l_m)^{\sigma_1} \cdots (1 + \beta_{m-1} l_m)^{\sigma_{m-1}} \\ &\quad \times \alpha_1^{l_1 z} \cdots \alpha_{m-1}^{l_{m-1} z} \alpha_m^{l_m z} \end{aligned}$$

は近くなる. 特に, z に整数値を代入した時 $f(z)$ と $\Phi(z)$ とは近くなる. この二つはよく似ているが, $\Phi(z)$ の方が α_m^z なる関数を含むのに対し, $f(z)$ の方は含まない点が, 本質的に異なる. なお, $\Phi(z)$ の分母は $\alpha_1, \dots, \alpha_m$ の分母より簡単に計算できる事に注意しておく.

L と整数 S, T を十分大きく取り, Dirichlet の部屋割り論法 (Siegel の補題) を使って,

$$0 \leq \sigma_1 + \dots + \sigma_{m-1} \leq S - 1, \quad 0 \leq z \leq T - 1$$

に対して, 整数の組 $c(l_1, \dots, l_m)$ ($0 \leq l_i \leq L$) を

(a) $c(1_1, \dots, 1_m)$ は複素数体 C の中では 余り大きくなく, かつ

(b) $\Phi_{\sigma_1 \dots \sigma_{m-1}}(z)$ は p 進体 C_p の中で十分小さい

ように取る. この時 $\Phi_{\sigma_1 \dots \sigma_{m-1}}(z)$ は 代数的数だから, その絶対値と

分母に比べて, C_p の中で大きさが十分小さければ 0 となる. したがって

上の仮定のもとでは

(b') $\Phi_{\sigma_1 \dots \sigma_{m-1}}(z) = 0$

となる. ところが, 前に注意した様に, $L(\alpha, \beta)$ が十分小さいという仮定のもとでは, 関数として $f(z)$ と $\Phi(z)$ は 近いから, その値も近く, 結局

(b'') $f_{\sigma_1 \dots \sigma_{m-1}}(z)$ は C_p の中で十分小さい

ことが解る.

さて前に注意したように, $\Phi_{\sigma_1 \dots \sigma_{m-1}}(z)$ に比べて $f_{\sigma_1 \dots \sigma_{m-1}}$

(z) は関数 α_m^z を含まぬ. 従って, $\Phi_{\sigma_1 \dots \sigma_{m-1}}(z)$ を微分したもの

はこの形の関数の一次結合には書けぬのに対し, $f_{\sigma_1 \dots \sigma_{m-1}}(z)$ の方は,

この関数を微分したのも 同じ形の関数の一次結合となる. このため 仮定

(b'') のもとでは, S を少し小さくすることにより, T を大きくしても

$$0 \leq \sigma_1 + \dots + \sigma_{m-1} \leq S - 1, \quad 0 \leq z \leq T - 1$$

なる範囲において,

(b'') $f_{\sigma_1 \dots \sigma_{m-1}}(z)$ は C_p の中で十分小さい

が成り立つ. このため $f(z)$ と $\Phi(z)$ が近いことを 再び使うと

$$(b') \quad \Phi_{\sigma_1 \dots \sigma_{m-1}}(z) = 0$$

が同じ範囲で成り立つ。この事は、 $\Phi(z)$ が本来持ち得るより沢山の零点を持つことを意味し、矛盾となる。従って、 $L(\alpha, \beta)$ が十分小さいと言う仮定は矛盾を導く。

大体以上のような議論をする事により、次のような事が証明できる。

定理. $\alpha_1, \dots, \alpha_m, \beta_1, \dots, \beta_{m-1}$ は代数的数とし、 α_i らは乗法的に独立であるものとする。 α_i, β_j らが有理数体 Q 上で生成する体を K とする。 K の複素数体 C と p 進体 Q_p の代数的閉包の完備化 C_p への埋め込みを固定しておく。 K の Q 上の拡大次数を n とし、 p の K への C_p に対する延長の相対次数と分岐指数をそれぞれ κ と μ で表す。また $\alpha_1, \dots, \alpha_m$ は

$$|\alpha_i - 1|_p < |p|_p^{1/(p-1)}$$

を満たすものと仮定する。 $\alpha_1, \dots, \alpha_m$ の分母の最小公倍数を d_α とし $\beta_1, \dots, \beta_{m-1}$ の分母の最小公倍数を d_β で表す。また、3 以上の実数 h_α と実数 h_β は、複素数体において不等式

$$\max_{i, \tau} |\alpha_i^\tau| \leq h_\alpha, \quad \max_{j, \tau} |\beta_j^\tau| \leq h_\beta$$

を満たすものとする。ここで i は 1 から m まで、 j は 1 から $m-1$ まで動き、 τ はすべての K の C の中への埋め込を動くものとする。このとき、定数

$$\lambda = \max \left\{ (d_\beta h_\beta)^{1/2}, (2\kappa\mu)^m, (9 \cdot 2^{6m^2-3m+1} m n p \log h_\alpha / \log p)^{3m/2} \right\}$$

に対して、評価

$$|\beta_1 \log_p \alpha_1 + \dots + \beta_{m-1} \log_p \alpha_{m-1} - \log_p \alpha|_p \geq |p|_p^{\lambda(2m+3)}$$

が成り立つ。

§4. 円単数の評価と結果

§3 で得た結果を 我々の場合に使うため、円単数の評価が必要となる。
そこで χ を 原始 Dirichlet 指標とし、 f をその導手とする。 ζ を $\exp(2\pi i/f)$ とし、 $1 < a < f$, $(a, f) = 1$ なる整数 f に対し、

$$E(a) = \zeta^{(a-1)/2} \frac{\zeta^{-a} - 1}{(1 - \zeta^{-1})}$$

なる数を考える。この数は 円体 $Q(\zeta)$ の単数となる事が解っている。

τ を 円体 $Q(\zeta)$ の 複素数体 C への 任意の埋め込みとすると、

$$E(a)^\tau = \eta^{(a-1)/2} \frac{\eta^{-a} - 1}{(1 - \eta^{-1})} \quad (\eta = \zeta^\tau)$$

となる。ところが、 η は 1 の原始 f 乗根だから 単位円周上にあり、

$$|1 - \eta^{-a}| \leq 2, \quad |1 - \eta^{-1}| \geq \sin(\pi/f) \geq 2/f \quad (f \geq 2)$$

なる不等式を満たすことが解る。よって問題の $E(a)^\tau$ は

$$E(a)^\tau \leq 2 \{ \sin(\pi/f) \}^{-1} \leq f$$

なる評価を持つ。

さて $E(a)^\tau$ の大きさは解ったが、§3 の定理を使うためには、

$$|\alpha_i - 1|_p < |p^{1/(p-1)}|_p$$

なる条件を満たす必要がある。まず Fermat の小定理より、 ν で $Q(\zeta)$ に

おける p の相対次数とすると、 $Q(\zeta)$ の任意の単数 ε は $(p^\nu - 1)$ 乗すると、
(p に関して) 単位単数となる。

f を素因数分解して、 $f = f_0 p^e$, $(f_0, p) = 1$ と置く。この時、 $Q(\zeta)$ に

おける分岐指数は p^e となる。よって、

$$| \varepsilon^{(p^\nu - 1)} - 1 |_p \leq | p^{1/p^e} |_p$$

を満たすから、 $p \neq 2$ なら、

$$| \varepsilon^{(p^\nu - 1)p^e} - 1 |_p \leq | p |_p < | p^{1/(p-1)} |_p$$

となる。また $p = 2$ の時は、 e の代わりに $e + 1$ を取れば同様になる。

さて、 $E(a)$ ($1 \leq a \leq f, (a, f) = 1$) は乗法的に独立であるから、それらを $(p^\nu - 1)p^e$ 乗した物も乗法的に独立である。従って、 $E(a)$ の $(p^\nu - 1)p^e$ 乗に対して定理が使える。そこでこれらを $\alpha_1, \dots, \alpha_m$ と置く。

$E(a)$ は単数であるから $d_\alpha = 1$ である。また以上に述べたことより、

$$h_\alpha = f^{(p^\nu - 1)p^e}$$

と置ける。 χ が自明な Dirichlet 指標でないとする、 $f \geq 3$ となる。よって、 $h_\alpha > 3$ と成り、 h_α についての定理の仮定も満たされる。他方

$$\beta_j = \chi(j)^{-1} / \chi(m)$$

と置くと、これは 1 のべき根であるから、

$$d_\beta = h_\beta = 1$$

に対して定理の仮定が満たされる。

良くしられている様に、ガウスの和 $\tau(\chi)$ は代数的整数で $|\tau(\chi)| = f^{1/2}$ を満たす。また $\chi(p)$ は 1 のべき根であるか、0 である。さらに円単数 $E(a)^{\tau}$ が実数であることに注意すると、

$$2m \leq f, 2n \leq f^2, 2\kappa\mu \leq 2n \leq f^2, 2\nu \leq f, p^e \leq f$$

なる評価が得られる。これを使うと、 p 進 L 関数の $s = 1$ での値を表す公式の Σ 以下の \log_p の一次式に対しては、§3 の定理における λ は、 $p \neq 2$ なら、

$$\begin{aligned} \lambda &\leq \text{Max} \left\{ f, 2^{\frac{9f^3/8}{f}} \left(\log h_{\alpha} \right)^{\frac{3f/4}{f}} \left(p/\log p \right)^{\frac{3f/4}{f}} \right\} \\ &\leq \left\{ 2^{\frac{9f^3}{f}} \frac{24f}{(\log f)} \frac{6f}{p} \frac{3f^2+6f}{p} \frac{1/8}{p} \right\} \end{aligned}$$

として求められる。これより次の定理が得られる。

定理. p を奇素数とし、 χ を自明でない原始 Dirichlet 指標で、 $\chi(-1) = 1$ なるものとする。 f を χ の導手とする。この時、 χ に対する p 進 L 関数 $L_p(s, \chi)$ の $s = 1$ での値 $L_p(1, \chi)$ について、次の評価が成り立つ。

$$\begin{aligned} |L_p(1, \chi)|_p &\leq p^{-\left\{ 2^{\frac{9f^3}{p}} \frac{3f^2+6f}{p} \frac{24f}{f} \left(\log f \right)^{\frac{6f}{p}} \frac{(f+3)/8}{p} \right\}} \end{aligned}$$

これは 大体 $p^{-p^{f^4}}$ の order である。 $p = 2$ でも 大体同様である。

参考文献

1. A. Baker, Transcendental number theory, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1975.
2. A. Brumer, On the units of algebraic number fields, *Mathematika*, 14(1967), 121-124.
3. N. Fel'dman, An improvement of the estimate of a linear form in the logarithms of algebraic numbers, *Math. sb.*, 77(119), 425-436.
4. A. O. Gel'fond, Transcendental & algebraic numbers, Dover Publ. Inc., New York, 1960 (English translation).
5. K. Iwasawa, Lectures on p-adic L-functions, *Ann. Math. Studies*, 74(1972).
6. Kaufman, An estimate of linear forms in the logarithms of algebraic numbers in the P-adic metric, *Vestnik Moskov. Univ., Matem.*, 26(1971), 57-63 (English translation).
7. T. Kubota, H. W. Leopoldt, Eine p-adische Theorie der Zetawerte, I, *J. Reine Angew. Math.*, 214/215(1964), 328-339.
8. H. W. Leopoldt, Eine p-adische Theorie der Zetawerte, II, *J. Reine Angew. Math.*, 274/275(1975), 224-239.
9. V. G. Sprindzhuk, Estimates of linear forms with p-adic logarithms of algebraic numbers, *Izv. Akad. Nauk BSSR, ser. Fiz.-Matem.*, 4(1968), 5-14. (筆者は、この論文を見ていない。)

(追記) . シムポシウムの時, Waldschmidt 氏より次のような事を聞いた.

(1) . この論文で問題にしているような \log を含む linear form の p 進体での評価を A. J. van der Porten が

A. J. van der Porten, Linear forms in Logarithms in the p -adic case .

In : Transcendental theory : Advances and applications ,

edited by A. Baker and D. W. Masser, 29-57, Academic press,

London-New York San Francisco, 1977.

において調べている. 但し, van der Porten は β が有理数の場合を扱っており, 一般の場合は結果のみを書いている. また彼の論文には, 本質的ではないが多少の誤りを含んでおり, 彼の結果は 多少の修正を必要とするらしい. 従って ここで述べたような事をするには 彼の結果を引用してすませるわけにはいかない.

(2) . 上に述べた van der Porten の結果や, 複素数体上での対応する結果を参考にすると, このような Baker の方法での評価の限界は, 大体

$$O(p^{-f})$$

位であると思われる.

(3) . V. G. Spindzhuk は 超越数についての教科書 (ロシア語) を書いており, その中で \log を含む linear form の p 進体上での評価についてふれているらしい (筆者はまだ見ていない) .