数理解析研究所講究録
600 巻 1986 年 188-203

Monge-Ampère方程式のCauchy問題

岩崎敦久　京大数理研

§序、最近の偏微分方程式の結果を使ってMonge-Ampère方程式の局所解（C^∞解）の存在を考えてみる。最近といってもこの20年間くらいという意味である。楕円型，狭あるいは対称双曲型といった．よく知られた型に次ぐものがいくつか見うけられる。その中では条件のわかりやすいものをMonge-Ampère方程式にあてはめてみる。主に双曲型方程式のCauchy問題を考えることにする。中村前田氏の話しと合せると3つ程取り扱うことになる。

古くはMonge-Ampère方程式とは$\mathbb{R}^2$上で

$$\Phi = u_{xx}u_{yy} - u_{xy}^2 - f(x,y) = 0$$

のことを呼ぶようである。これの線型化方程式は

$$D\Phi\varphi = (u_{yy}\partial_x^2 - 2u_{xy}\partial_x\partial_y + u_{xx}\partial_y^2)\varphi = g$$

となる。この線型化方程式$D\Phi$の微分方程式としての型でもってΦの解uにおける型を定める。(1) $f>0$なら、$\Phi=0$の解uに対しては $\det\begin{pmatrix} u_{yy}, & -u_{xy} \\ -u_{xy}, & u_{xx} \end{pmatrix}$ も又正より固有値は0でなくしかも同符号。したがって$D\Phi$よってΦは楕円型となる。たとえば $u=\frac{1}{2}(x^2+y^2)$ とすると，$f=1$，$D\Phi=\partial_x^2+\partial_y^2$。

(2) 逆に $f<0$ なら固有値は異符号となり Φ は狭双曲型。$u=\frac{1}{2}(y^2-x^2)$ とすると $f=-1$, $D\Phi=\partial_x^2-\partial_y^2$。次に $f=0$ となるが simple 即ち $\partial f \neq 0$ at $f=0$ とする。この時 $D\Phi$ が kovarevskian だとすると典型的には (3) Tricomi 型と (4) Euler-Darboux 型の2つにわかれる。(3) の例としては、$u=\frac{1}{2}y^2-\frac{1}{6}x^3$, $f=x$, $D\Phi=\partial_x^2+x\partial_y^2$。(4) の例としては、$u=\frac{1}{2}(y+\frac{1}{2}x^2)^2$, $f=y+\frac{x^2}{2}$, $D\Phi=(\partial_x-x\partial_y)^2+(y+\frac{x^2}{2})\partial_y^2$. それぞれの特徴は (3) は $\partial_x f \neq 0$ (4) は $(\partial_x-x\partial_y)f=0$ となることである。これらに続くものは、f の critical points $\{f=\partial f=0\}$ での方程式である。$\partial^2 f\neq 0$ とすると $\partial^2 f$ の固有値の正負によって、やはり方程式の型がわかれる。例によって考えると、(5) $u=\frac{1}{2}y^2+\frac{1}{12}y^4+\frac{1}{2}x^2y^2+\frac{1}{12}x^4$ とすると $f=(x^2+y^2)+(x^2-y^2)^2$, $D\Phi=(1+x^2+y^2)\partial_x^2-4xy\partial_x\partial_y+(x^2+y^2)\partial_y^2$。$D\Phi$ の symbol $D\Phi(\xi)$ は $D\Phi(\xi)\geqq 0$。
(6) $u=\frac{1}{2}y^2-(\frac{1}{12}y^2+\frac{1}{2}x^2y^2+\frac{1}{12}x^4)$, $f=-(x^2+y^2)+(x^2-y^2)^2$
$D\Phi=(1-x^2-y^2)\partial_x^2+4xy\partial_x\partial_y-(x^2+y^2)\partial_y^2$ $\therefore$ $x=y=0$ の近くで双曲型。(7) $u=\frac{1}{2}y^2\pm(\frac{1}{12}y^4-\frac{1}{2}x^2y^2+\frac{1}{12}x^4)$,
$f=\pm(x^2-y^2)-(x^2+y^2)^2$, $D\Phi=(1\pm(y^2-x^2))\partial_x^2\mp 4xy\partial_x\partial_y\pm(x^2-y^2)\partial_y^2$。

(1) (2) (3) は偏微分方程式の言葉でまとめると Real Principal type となる。これは中村前田で使われる。
(4) の一般型を Fuchs 型の偏微分方程式とよんで最近よく研

究されている。(5)は、退化楕円型と呼び、$\bar{\partial}_b$に対する
Laplacianがその代表として現われてくる型である。もっと
簡単なものとしては、$u=\frac{1}{2}y^2+\frac{1}{12}x^4$, $f=x^2$, $D\Phi=\partial_x^2+x^2\partial_y^2$。
(6)は双曲方程式の中で特に実効的双曲型とよばれるもので
ある。典型は $u=\frac{1}{2}y^2-\frac{1}{12}x^4$, $f=-x^2$, $D\Phi=\partial_x^2-x^2\partial_y^2$である。
この(5)(6)の型がここで取りあつかうものである。(7)は
(3)(4)のように場所により型の変るものである。線型方程
式の中で簡単なものを考えれば $\partial_x^2\pm(x^2-y^2)\partial_y^2$ となる。
この型の方程式については、どんな結果があるか、よくしら
べてないので知らない。$z=u(x,y)$ とおいた曲面を考える
と(1)〜(4),(7)はそれぞれ曲面の形においてもその特徴が
あらわれている。しかし(5)は(1)の(6)は(2)の曲面の少
しひしゃげた形でしかない。実際に解を作る場合も楕円型及
び狭双曲型での構成法を少し一般化するだけですむ。

§1. 方程式と結果　real Monge-Ampère (型) 方程式とは、ここでは次の形をした2階の非線型方程式のことであると理解しておく。問題は局所的であるから $\mathbb{R}^{n+1}$ 上で考える。

(1,1) $$\Phi(u) = \det A - f = 0$$

但し,

$$A = \partial^2 u + C(x, u, \partial u),$$
$$f = f(x, u, \partial u),$$

($C(x,u,v)$, $f(x,u,v)$ は $x \in \mathbb{R}^{n+1}$, $u \in \mathbb{R}$, $v \in \mathbb{R}^{n+1}$ の関数で, C は $(n+1)\times(n+1)$ 実対称行列, f は実数値である。)

まず Cauchy 問題を考える。方程式の形から初期面を $\{x_0 = 0\}$ と仮定して一般性をうしなわない。2階の方程式であるから初期条件は

(1,2) $$(u, \partial u)\big|_{x_0=0} = (g_0, g_1).$$

条件を述べるために記号を定める。A の各成分を a_{ij}, $A_{ij} = \{a_{kl}\}_{k,l \neq i,j}$ を a_{ij} に対する小行列, $A^{co} = \{a^{co}_{ij}\}$ $a^{co}_{ij} = (-1)^{i+j} \det A_{ji}$ を A の Cofactor 行列とする。

このとき, Φ の線型化方程式 $D\Phi$ は

$$D\Phi\varphi = \mathrm{Tr}(A^{co} \cdot \partial^2 \varphi) + \mathrm{Tr}[A^{co} \cdot (\sum_i C_{v_i} \partial_i \varphi + C_u \varphi)]$$
$$- \sum_i f_{v_i} \partial_i \varphi - f_u \varphi,$$

但し, $C_{v_i} = \partial_{v_i} C$, etc, で与えられる。

仮定. fは常に非正な関数（負半定値）とする。

(1.3) $\qquad f \leq 0$。

初期条件 $(u, \partial_0 u)|_{x_0=0} = (g_0, g_1)$ において

(1.4) $\qquad A_{00} > 0$

が成立するものとする。

$A_{00} > 0$ より $\det A_{00} \neq 0$。

$$\Phi(u) = (\det A_{00})\partial_0^2 u + \cdots\cdots$$

となっているから、$\Phi(u) = 0$ は

$$\partial_0^2 u = \cdots\cdots$$

と書きかえられる。(kowalevskian, 右辺は $\partial_0^2 u$ をふくまない。$D\Phi$ も同様。) 初期面 $\{x_0=0\}$ では右辺は初期条件によって決定される。$\partial_0^2 u$ を右辺で与え、以下順次 $\partial_0^s u$ $(s \geq 2)$ が $\{x_0=0\}$ 上で定まる。これより

$$\Phi(\tilde{u}) \text{ flat at } \{x_0=0\} \quad (\partial^\alpha(\Phi(\tilde{u}))|_{x_0=0} = 0, \forall\alpha)$$

なる $\tilde{u} \in C^\infty$ が作れる。(Cauchy 問題の形式解)

この $\tilde{u}$ を使って、次の条件を仮定する。

仮定. $x=0$ において $f(x, \tilde{u}, \partial\tilde{u}) = 0$ なら, $x=0$ で

(1.5) $\qquad L^2 f(x, \tilde{u}, \partial\tilde{u}) \neq 0$,

但し $\qquad L = \sum_{j=0}^{n} a_{0j}^{00}(x, \tilde{u}, \partial\tilde{u}, \partial^2\tilde{u})\partial_j$.

この条件は，$\tilde{u}$のとり方によらない。実際に，$\partial_0^2\tilde{u}$ を $\Phi(\tilde{u})=0$ at $x_0=0$ により決めれば，初期条件 (g_0, g_1) に対する条件である。$\tilde{u}$の2階微分までしか陽に現われない。

<u>定理1.</u> fは(1,3)をみたすとする。初期条件(g_0, g_1)が(1,4)(1,5)をみたす時，Cauchy問題(1,1-2)のC^∞解が原点$x=0$の近傍で一意に存在する。

注．$\{x_0=0\}$の原点の近傍Uと，十分大きなmの$C^m(\bar{U})$を考える。初期条件が定理の$g=(g_0, g_1)$に，$C^m(\bar{U})$のノルム$\|\cdot\|_m$に関し，十分近ければ，解の一意存在領域$\Omega \ni x=0$は一様に取れる。又この範囲で初期条件$g \in C^\infty(\bar{U}) \longrightarrow$ 解$u \in C^\infty(\bar{U})$の写像は連続である。

例．

$$\det(\nabla_{ij} u) = K(x)\, h(x, u, \nabla u),$$

但し，

$$\nabla_{ij} = \partial_i\partial_j - \sum_k \Gamma_{ij}^k \partial_k$$

$$h(0,0,0) \neq 0,$$

$$K \leq 0, \quad K(0)=0, \quad \partial_0^2 K(0) \neq 0$$

とする。

$$g_0 = \frac{1}{2}\nu |x'|^2, \quad x'=(x_1, \cdots, x_n) \quad \nu > 0.$$

$$g_1 = 0$$

とする。

$$A_{00}\big|_{x_0=0} = (\partial_i\partial_j g_0 - \sum_{k=1}^{n}\Gamma_{ij}^{k}\partial_k g_0 - \Gamma_{ij}^{0} g_1)$$

より，

$$A_{00}\big|_{x=0} = \nu I > 0 .$$

その他の $a_{ij}\big|_{x=0} = 0$。又 $L = \sum_{j=0}^{n} a_{0j}^{co}\partial_j$ は，$x=0$では $a_{00}^{co} = n\nu$，他は0より

$$L\big|_{x=0} = n\nu\partial_0$$

$$L^2 f\big|_{x=0} = (n\nu)^2(\partial_0^2 K)(0)\cdot h(0,0,0) \neq 0.$$

一般にfが次の条件をみたしておれば，(1,4)及び(1,5)が満たされる初期面と初期条件が作れる。

<u>定理2.</u> $f(x,u,v)$は $f \leq 0$ でかつ点$(\hat{x},\hat{u},\hat{v})$で $f=0$ なら

(1,6) $\qquad H_f(L,L) \neq 0 \quad \text{in } \xi,$

但し，H_fは$f=0$なる点$(\hat{x},\hat{u},\hat{v})$における$f$のhessian $\nabla^2 f$で

$$L = \xi\cdot\frac{\partial}{\partial x} + \hat{v}\cdot\xi\frac{\partial}{\partial u} - \left\langle C\xi, \frac{\partial}{\partial v}\right\rangle,$$

とする。この時，(1.1) $\Phi(u)=0$ は，$x=\hat{x}$でC^∞-可解，即ち，$x=\hat{x}$の近傍で(1.1)をみたすC^∞解uが存在する。又$(u,\partial u)_{x=\hat{x}} = (\hat{u},\hat{v})$で与えられる。

条件 (1,3−4) は未知関数 u を $-u$ とすれば、わかるように、不等式の向きに関して $n+1$ が偶数の時は (1,3) $f \leqq 0$ が、$n+1$ が奇数の時は (1,3) と (1,4) の不等式の向きが逆ということでよい。このことから、次元 $n+1$ が奇数の時は不等式の向きがどちらであっても解の形を問題にしなければ局所可解性が言えたことになる。(f が $\geqq 0$ のときも $\leqq 0$ のときも。)
一方、$f > 0$ の時は方程式を楕円型にすることが可能である。そのことを使って局所可解性が示せる。これと同じ方法で、$n+1$ が偶数(奇数の時も当然ふくめて)の場合も、

(1,7) $$f \geqq 0,$$

と (1.6) との仮定のもとで $\Phi(u)=0$ の局所可解性が示せる。

(1,6) があると (1,6) の L ($H_f(L,\ ) \neq 0$) が transversal になるような初期面 $S=\{\rho=0\}$ をとる。($L\rho \neq 0$) その S を $\{x_0=0\}$, $\tilde{x}=0$ と思うと、(1,4) 及び

$$(g_0,\ g_1,\ \partial g_0)\Big|_{x=0} = (\tilde{u}, \tilde{v})$$

をみたす初期条件 (g_0, g_1) が作れる。この時 $\Phi(u)=0$ は Kovalevskian となり形式解 $\tilde{u}$ が作れる。これに対し (1,5) が成立する。ここまでは f の正負は無関係である。一方、u を $\Phi(u)=0$ の解で (1,4) を $x=0$ でみたすものとすると、線型化方程式 $D\Phi$ の主要部は次の形をしている。

(1.8) $$P(\xi) = \langle \theta, \xi \rangle^2 + f(x, u, \partial u) E(\xi),$$

但し, $\theta \neq 0$, $E(\theta) = 0$, $E(\xi) \geqq \varepsilon |\xi|^2$ $(\varepsilon > 0)$ $\forall \xi \perp \theta$.

したがって, $f \leqq 0$ ならPは双曲型になり条件(1.5)は, $\langle \theta, \partial \rangle^2 f \neq 0$ を意味するから, このときPは実効的双曲型とよばれるものになり, Cauchy問題は低階項の如何にかかわらず解ける。あとはNash-Moserの陰関数定理を使って非線型方程式 $\Phi = 0$ に対するCauchy問題を解く。可解性のみを問題にする（一意性を考えない）なら$D\Phi$の未知関数uの変化に対して一様な右逆元の存在が言えれば良い。

(1.6)(1.7)が成立するときGårding型の不等式及び準楕円型の不等式, その中でも楕円型について強い評価式が(1.8)を標象とする作用素$P(\partial)$に対して成立する。

$$\mathrm{Re}\,(P(\partial)\varphi, \varphi)_0 \geqq \delta \|\varphi\|_{1/2} - C_\delta \|\varphi\|_0, \quad (\exists \delta > 0)$$

$$\|P(\partial)\varphi\|_s \geqq \delta \|\varphi\|_{s+1} - C_{s,\delta} \|\varphi\|_0 \quad (s \geqq 0)$$

但し, $\varphi \in C_0^\infty(\text{nbd of } x = \tilde{x})$. $\|\cdot\|_s$ は$\mathbb{R}^{n+1}$上のソボレフ・ノルムで, uのFourier変換を$\hat{u}$とすると

$$\|u\|_s^2 = \int_{\mathbb{R}^{n+1}} (1 + |\xi|^2)^s |\hat{u}|^2 d\xi.$$

(注). 楕円型のとき（$f > 0$ のとき）は右辺は$1/2$が1, $s+1$が$s+2$で成立している。

このことから, 楕円型の時と同じく, $x = \tilde{x}$の十分小さな近傍での, $D\Phi$に対するNash-Moserの定理の適用にたえ得る.

右逆作用素の存在が示せ，$\Phi(u)=0$ の局所解が作れる。

<u>定理.3.</u>　$f(x,u,v)$ は (1.7) i.e $f \geqq 0$ であるとする。今点 $(\hat{x},\hat{u},\tilde{v})$ で $f=0$ なら (1.6) が成立すると仮定する。この時、(1.1) $\Phi(u)=0$ は $x=\hat{x}$ で C^∞-可解である。又、u は $(u,\partial u)\big|_{x=\hat{x}}$ が $(\hat{u},\tilde{v})$ に十分近いものに取れる。

§2. 応用例. 簡単な応用例をSpivakの本から引用する。2次元Riemannian manifold Mの$\mathbb{R}^3$への局所等距離うめこみを考える。それはgをそのMetricとすると, M上の関数, u, v, wでもって局所的に

$$(2,1) \qquad g = du^2 + dv^2 + dw^2$$

とできることを示すことである。Spivakの本によれば, その一つの方法として, 新たなMetric

$$g - du^2$$

がflat即ちGauss曲率が恒等的に0となるuを見つければ$g-du^2$に対して

$$g - du^2 = dv^2 + dw^2$$

なる局所座標(v, w)がユークリッド変換をのぞいて一意にきまる, これを使って(2,1)を示す方法がある。そして, $g-du^2$がflatということと, uがDarbouxの方程式, M上の局所座標(x_0, x_1)に関し,

$$(2,2) \qquad \det(\nabla_{ij} u) = K(x) \det(g_{ij} - \nabla_i u \nabla_j u),$$

をみたすこととが同値である。(但し, Kは(M, g)のGauss曲率。) したがってDarboux方程式の解uを見つけることに問題は帰着される。今Mの点Pの近傍でgのGauss曲率Kは半定値($K \geqq 0$又は$K \leqq 0$)であるとする。もし$K(p)=0$なら, $L^2K(p) \neq 0$なる接ベクトルLがあると仮定すると,

定理2及び定理3より，pの近傍でDarboux方程式のC^∞解uが存在する。よって，このような(M, g)の点pに関してはpの適当な近傍が$\mathbb{R}^3$への等距離うめこみ可能となる。

Cauchy問題が解けるということは，単に$\Phi(u)=0$の解が存在するだけでなく，それらの解が初期条件（初期面上の関数）でパラメトライズされている。うめこまれた曲面のある種の同値性を示すのに，これが使える。Spivakの本にE. E. Leviの定理として紹介されている。(M, g)の開集合Uから$\mathbb{R}^3$への2つの等距離うめこみをΦ_0，Φ_1その像曲面をS_0，S_1とする。（S_1をS_0のwarp曲面と呼ぶ。）さらにパラメータ$t\in[0,1]$に連続なUの等距離うめこみΦ_tがあったとする。（$\Phi_0=\Phi_t|_{t=0}$，$\Phi_1=\Phi_t|_{t=1}$）このときS_0はS_1へ（あるいはS_0とS_1は）bendableと呼ぶことにする。今(M, g)のGauss曲率Kは$K\leq 0$とする。S_0，S_1の第二基本形式b_0，b_1は点pで，ある接ベクトルTに関して$b_0(T, T)$，$b_1(T, T)$が共に正（又は共に負）になるものとする。$K(p)=0$のときは$b_0(L_0, L_0)=b_1(L_1, L_1)=0$なる$L_0$，$L_1\neq 0$がスカラー倍をのぞいて一意にきまるが，その$L_0$，$L_1$に対して$(L_j^2K)(p)\neq 0$と仮定する。この時，$S_0$と$S_1$は$p$の近傍でbendableである。又$K<0$のときは，この結果を2回使うと$S_0$と$\bar{S}_0$（$\Phi_0=(u, v, w)$とすると$\bar{\Phi}_0=(-u, v, w)$）が局所的にbendableとなり，$S_0$は

任意の Warp と局所的に bendable (E. E. Levi) となる。

証明は次の様になる。$\mathbb{R}^3$のユークリッド変換を使って，$\Phi_0(p)=\Phi_1(p)$, $\nabla\Phi_0(p)=\nabla\Phi_1(p)$（よって p における S_0 と S_1 の接平面は一致している）としてよい。$\Phi_t(p)=(u_t, v_t, w_t)$ とかき，(v_0, w_0) は M の局所座標であるとする。u_0, u_1 は Darboux 方程式の解であるが，解答には，Darboux 方程式の解 u_t で u_0, u_1 をむすぶものを作ればよい。pの近傍上で t に関して連続に動く u_t を作れば，v_t, w_t は $v_0(p)=v_t(p)$, $w_0(p)=w_t(p)$, $\frac{\partial w_t}{\partial v_0}(p)=0$, $\frac{\partial v_t}{\partial v_0}(p)>0$, $\frac{\partial w_t}{\partial w_0}(p)>0$ で v_t, w_t は共通な p の近傍上で一意にきまり t に関して連続にうごく。そこで，p を通る初期曲線 Σ を $K(p)<0$ のときは p における接線が T をふくむように，$K(p)=0$ のときは，L_0 と L_1 の方向を適当にえらぶと $L_t=(1-t)L_0+tL_1$ は $L_t^2K(p)\neq 0$ とできる。この L_t $(0\leq t\leq 1)$ が Σ に transversal になる様に取る。座標を適当にとれば $\Sigma=\{x_0=0\}$ としてよい。そこで初期条件を

$$g_{0t}=(1-t)u_0+tu_1\Big|_{x_0=0},$$

$$g_{1t}=\frac{\partial}{\partial x_0}[(1-t)u_0+tu_1]\Big|_{x_0=0}$$

で定めると，この (g_{0t}, g_{1t}) に対して Darboux 方程式は定理1の仮定をみたし，共通な p の近傍上に解 u_t が t に関して連続に存在する。

$\mathbb{R}^3$へのうめこみを$\mathbb{R}^4$に代えれば，どうなるであろうか。局所等距離うめこみは常に可能である。実際，$g - dz^2$がGauss曲率が負のmetricになるように関数zを適当に選らべば，これは$\mathbb{R}^3$へのうめこみが可能，従って$g = du^2 + dv^2 + dw^2 + dz^2$。bendableについては，$\mathbb{R}^3$への2つのwarp曲面$S_0, S_1$の点$P$における第二基本形式$b_0, b_1$に前と同様$b_0(T,T), b_1(T,T)$が共に正になる接ベクトル$T$があるとする。Gauss曲率$K$については何も仮定しない。このとき，$\mathbb{R}^4$への連続なwarp S_tによりS_0はS_1にbendableである。S_0と$\overline{S}_0$は$\widehat{S}_t = (u_0 \cos \pi t, v_0, w_0, u_0 \sin \pi t), 0 \leq t \leq 1$によりbendableであるから，系として，Gauss曲率Kが正の点pでも，その近傍の任意の$\mathbb{R}^3$へのwarpは$\mathbb{R}^4$への連続なwarpにより局所的にbendableである。証明は次のようになる。$\mathbb{R}^3$の時と同じ設定で，より簡単にするため，$x = v_0$, $y = w_0$と局所座標を取り，$\frac{\partial}{\partial x} u_i = \frac{\partial}{\partial y} u_i = 0$ $(i = 0, 1)$と仮定する。又$T = \frac{\partial}{\partial x}$とすると$(\frac{\partial}{\partial x})^2 u_i > 0$ $(i = 0, 1)$。まず，$\Phi_{i\varepsilon} = (u_i, v_i, \varepsilon^{-1} \sin \varepsilon w_i, \varepsilon^{-1}(\cos \varepsilon w_i - 1))$により，$\varepsilon > 0$, S_iを$\mathbb{R}^4$の中へbendする。そこで，$z_i = \frac{1}{\sqrt{2}}(u_i - \varepsilon^{-1}(\cos \varepsilon w_i - 1))$，$z_t = (1-t) z_0 + t z_1$とおいて$\widehat{g}_t = g - dz_t^2$を考える。これのGauss曲率を$\widehat{K}_t$とすると点$p$においては

$$
\begin{aligned}
\widehat{K}_t &= K - \det \nabla^2 z_t \\
&= K - \frac{1}{2} \det \nabla^2 u_t - \frac{\varepsilon}{2} \left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^2 u_t ,
\end{aligned}
$$

$$u_t = (1-t)u_0 + t u_1 \text{。}$$

εを十分大きく取ると$\hat{K}_t$は一様に負となる。そこで[$\hat{g}_t - d\hat{z}_t^2$のGauss曲率$\equiv 0$]のDarboux方程式を考え，その初期面$\{y=0\}$での初期値を$\hat{z}_t|_{y=0} = [(1-t)\hat{z}_0 + t\hat{z}_1]|_{y=0}$及び$\frac{\partial}{\partial y}\hat{z}_t|_{y=0} = [(1-t)\frac{\partial}{\partial y}\hat{z}_0 + t\frac{\partial}{\partial y}\hat{z}_1]|_{y=0}$，但し，$\hat{z}_i = \frac{1}{\sqrt{2}}[u_i + \varepsilon^{-1}(\cos \varepsilon w_i - 1)]$と取れば，方程式は$t$に関してなめらかに動く狭義双曲型（古典的に解けている）になる。従って，その解$\hat{z}_t$はtに関して，なめらかになり，$t=0, 1$では$\hat{z}_0, \hat{z}_1$に一致している。よって，tに関して連続な$\hat{v}_t, \hat{w}_t$があって，$\hat{g}_t = d\hat{z}_t^2 + d\hat{v}_t^2 + d\hat{w}_t^2$，そこで，$\hat{\Phi}_t = (\hat{z}_t, \hat{v}_t, \hat{w}_t, z_t)$とおくと，これは$\mathbb{R}^4$への$P$の近傍の局所等距離うめこみ。$\Phi_{i\varepsilon}$は$\mathbb{R}^4$の座標のとり代え$R$（直交変換）で，$R\cdot\Phi_{i\varepsilon} = \hat{\Phi}_i$となる。故に，$S_0$と$S_1$をむすぶwarpの列が作れた。

参考文献

[1] Reports on Global Analysis I, 微分幾何における非線型問題, 落合卓四郎編集, 1979.

[2] M. Spivak, A comprehensive introduction to differential geometry, vol. 5 (Second edition), Publish or Perish, Inc., Berkeley, 1979.

[3] N. Iwasaki, The strongly hyperbolic equations and their applications, to appear in PATTERNS AND WAVES --- Qualitative Analysis of Nonlinear Differential Equations --- North-Holland, 1986.