数理解析研究所講究録
601 巻 1986 年 141-147

Prandtl 境界層理論の数学的基礎について

北大. 理, 数, 松井伸也
(Shin'ya Matsui)

平面壁に沿う境界層に対する定常 Prandtl 方程式は, 次で与えられる。

$$(P)\left\{\begin{aligned} &u u_x + v u_y = \nu u_{yy} - p_x , \\ &u_x + v_y = 0 , \end{aligned}\right.$$

$$\text{for } 0 \leq x \leq A ,\ 0 \leq y < \infty ,$$

及び境界条件;

$$u|_{y=0} = v|_{y=0} = 0 ,$$

$$u|_{y\to\infty} = U(x) ,$$

と初期位置 ($x=0$) に於ける条件;

$$u|_{x=0} = u_0(y) \quad ; \text{ given} .$$

ここに、x は壁の長さ, y は法線方向, $(u, v) = (u(x,y), v(x,y))$ は、未知速度ベクトル場であり, $p(x)$ 及び $U(x)$ は、それぞれ圧力関数, 外の流れの速度

であり次のベルヌーイの法則を満たす；

$$U(x)U_x(x) + P_x(x) = 0.$$

更に定数 $\nu>0$ は、動粘性係数，添文字 x, y は、それぞれの変数についての偏微分をあらわす.

さて Prandtl 境界層理論はその創始より，はや80年を過ぎるが 未だその有意さを失っていない様である. 流体力学の分野では、剥離境界層の数値解析や，その理論的研究に，Prandtl 方程式が使われている様である（[12]，[13]).
そこで我々，数学（純粋数学）の立場から，素朴な疑問が起る. Prandtl 方程式に、剥離をともなう解（剥離解）が存在するか否か？ Prandtl 方程式の解は，Navier-Stokes 方程式の解の1次近似となり得るか？ ここでは Prandtl の理論へ，我々の立場から基礎を与えることを，目的としてこれらの問題へ解答を与える. 具体的には次の2つを示めす；

1) 剥離解の存在.

2) Navier-Stokes 方程式の非剥離層流解を近似する Prandtl 方程式の解の存在.

尚，詳細は，論文 [3]，[4] を，参考のこと.

1. 剥離解.

我は，次で 剥離点 $x=S$ を定ぎした；

$$u_y(x,0) > 0 \quad \text{for} \quad 0 \leq x < s,$$
$$\lim_{(x,y)\to(s,0)} u_y(x,y) = 0.$$

方程式(P)の剥離解の存在を示めす為に、我々は次の事を仮定する（重要なもののみ示めす）。

(i) $\dfrac{du_0}{dy}(0) > 0$,

(ii) $\nu\dfrac{d^2u_0}{dy^2}(y) - p_x(0) = O(y^2)$ as $y \to 0$,

(iii) $U(x) > 0$ for $0 \leq x < 1$, $U(1) = 0$,

(iv) $p_x(x)$ は、$x=1$のすぐ手前で単調非増大且正。

<u>定理 I</u>. $^\exists s\ (0 < s < 1)$ $^\exists (u(x,y), v(x,y))$ such that (u,v)は、$0 \leq x < s$, $0 \leq y < \infty$に於いて、(P)の解であり $x=s$ は剥離点である。さらに initial profile $u_0(y)$ をいろいろ変えた時、解(u,v)と剥離点 $x=s$ はいろいろと変わるが、次の不等式が成立する；

$$\sup s < 1,$$

尚 sup は、仮定をみたすすべての $u_0(y)$ に対して決まるすべての剥離点についてとる。即ち、仮定をみたす $u_0(y)$ を、いろいろ変えても $s \to 1$ となる様には出来ない。

さらに、(iii), (iv)より弱い条件の $U(x)$, $p(x)$ につい

ても次の様な剥離解の存在が言える.

定理 2. (iii), (iv)のかわりに

(iii)' $\overline{U}(x) > 0$ for $0 \leq x < \infty$,

(iv)' $p_x(X) > 0$ for some $x = X$,

を仮定する. もし $\frac{du_0}{dy}(0)$ が十分小さいならば剥離点 $x = s$ を有する $0 \leq x < s$, $0 \leq y < \infty$ での方程式(P)の解 $(u(x,y), v(x,y))$ が存在する.

2. Navier - Stokes 方程式との関係

Navier - Stokes 方程式;

$$
(\mathrm{N.S.})\begin{cases}
\bar{u}\bar{u}_x + \bar{v}\bar{u}_y = \nu\Delta\bar{u} - \bar{p}_x, \\
\bar{u}\bar{v}_x + \bar{v}\bar{v}_y = \nu\Delta\bar{v} - \bar{p}_y, \\
\bar{u}_x + \bar{v}_y = 0,
\end{cases}
$$

for $0 \leq x \leq A$ $0 \leq y < \infty$,

の解 $(\bar{u}, \bar{v}, \bar{p})$ について, もし $(\bar{u}, \bar{v}, \bar{p})$ が非剥離層流解ならば, 方程式(P)の解 (u, v) で $\bar{u}$ を近似する解が存在することを示したい。

我々は、動粘性係数 ν に対する方程式(N.S.)の解 $(\bar{u}^\nu, \bar{v}^\nu, \bar{p}^\nu)$ 達が, 非剥離層流解であるという事

を次で定義した(c.f. [1]).

1) $(\bar{u}^\nu, \bar{v}^\nu, \bar{p}^\nu)$ が境界条件 $\bar{u}^\nu|_{y=0} = \bar{v}^\nu|_{y=0} = 0$ をみたす(N.S.)の解である.

2) $D := \{0 \le x \le A,\ 0 \le y \le 2\}$ とした時,

$$0 \le \bar{u}^\nu \le 1 \quad \text{on } D.$$

3) $\bar{u}^\nu, \bar{u}^\nu_x, \bar{u}^\nu_{xx}$ 及び $\bar{v}^\nu, \bar{v}^\nu_x, \bar{v}^\nu_{xx}$ は, D に於いて, ν について一様有界.

4) $\nu\Delta\bar{u}^\nu$, $\nu\Delta\bar{v}^\nu$ 及び $\nu(\Delta\bar{v}^\nu)_x$ は, D に於いて, ν について一様有界.

5) $$\begin{aligned} \text{const.} \times \min\{1, \nu^{-1/2}y\} &\le \bar{u}^\nu(x,y) \\ &\le \text{const.} \times \min\{1, \nu^{-1/2}y\} \quad \text{on } D. \end{aligned}$$

<u>定理 3.</u> (N.S.)方程式の非剥離層流解 $(\bar{u}^\nu, \bar{v}^\nu, \bar{p}^\nu)$ 達に対して, $0 \le x \le A$, $0 \le y < \infty$ で剥離しない方程式(P)の解 (u^ν, v^ν) が存在して次をみたす;

$$|u^\nu(x,y) - \bar{u}^\nu(x,y)| \le \text{const.} \cdot \nu^{1/2},$$
$$\text{for } 0 \le x \le A,\ 0 \le y \le \nu^{1/2},\ 0 < \nu \ll 1,$$

尚, constant は, ν に無関係.

References

[1] Fife, P.C. Considerations regarding the mathematical baisis for Prandtl's boundary layer theory, Arch. Rat. Mech. Anal., 28(1968),184-216.

____________ Corrigendum,Considerations regarding the mathematical baisis for Prandtl's boundary layer theory, Arch. Rat. Mech. Anal.,46(1972),389-393.

[2] Glimm, J. Singularities in fluid dynamics , Math. Prob. in Theoretical Phys. ,ed. R. Schrader, R. Seiler and D.A. Uhlenbrock, Springer Verlag (1981), 86-97.

[3] Matsui, S. and Shirota, T. On separation points of solutions to Plandtl 's boundary layer problems, Hokkaido Math. J. Vol.13 , No.1 (1984), 92-108.

[4] ________________________ On Prandtl boundary layer problem, Recent Topics in Nonlinear PDE II, ed. by Masuda, K. and Mimura, M., Kinokunia/North-Holland, (1986)81-105.

[5] Von Mises, R. and Friedrichs, K.O. Fluid Dynamics, Appl. Math. Sci. 5, Springer Verlag (1971).

[6] Nickel, K. Parabolic equations with applications to boundary layer theory, P.D.E. and Conti. Mech., ed. R. Langer, The Univ. Wisconsin Press, Madison Wisconsin (1961), 319-330.

[7] Oleinik, O.A. On a system of equations in boundary layer thory, U.S.S.R. Comp. Math. Phys.,3 (1963), 650-673

[8] _____________ Mathematical problems of boundary layer theory, Uspehi Mat. Nauk, Vol.23,No.3 (1968), 3-65.

[9] ______________ Weak solutions in Sobolev sense for a system of boundary layer equations, Amer. Math. Soc. Trans. (2), 105 (1976), 247-264.

[10] ______ and Kruzhkov, S.N. Quasi-linear second-order parabolic equation with many independet variables, Russian Math. Surv., Vol.16 n.5 (1961), 106-146.

[11] Serrin, J. Asymptotic behavior of velosity profiles in the Prandtl boundary layer theory, Proc. London Math. Soc. A 299 (1967), 491-507.

[12] Hydrodynamics Instabilities and the Transition to Turblence, ed. by H.L. Swinney and J.P.Gollub, Topics in applied physics vol.45, Springer-Verlag(19 85).

[13] Hughes, J.T. and Marsden, J.E. A Short Course in Fluid Mechanics, Mathematical Lecture Series 6, Publish or Perish, Inc. (1976).