数理解析研究所講究録
601巻 1986年 32-41

反応項をもつBurgers方程式の解について

東大工　薩摩　順吉　(Junkichi Satsuma)

Burgers方程式

$$u_t = u_{xx} + \alpha u u_x \tag{1}$$

は，弱い非線形性をもつ散逸波動の漸近的状態を記述する方程式として，また一次元乱流のモデル方程式としてよく知られている。この方程式は，Hopf-Cole変換

$$u = \frac{2}{\alpha}(\log f)_x \tag{2}$$

によって，線形拡散方程式

$$f_t = f_{xx} \tag{3}$$

に帰着でき、その初期値問題を厳密に解けるという著しい性質をもっている。(2)式と同様の変換を用いて線形化し，その結果，解析的に厳密解のえられる非線形拡散方程式の例もいくつか報告されている。[1),2)]

化学反応系や生物集団のモデルとして，拡散過程と非線形な反応項を伴なう方程式がある。もっとも簡単なものは，

$$u_t = u_{xx} + F(u) \tag{4}$$

であり，Fisher型方程式と呼ばれている。この方程式の厳密解を求める試みは，$F(u)$がuの2次式と3次式の場合について行なわれている。

Ablowitz と Zeppetellaは，$F(u)$が2次式の場合，すなわち，

$$u_t = u_{xx} + u(1-u) \tag{5}$$

を扱った。[3] 彼らはソリトン理論で有効であったPainlevé解析を行ない，$u = u(x-ct)$型の進行波解の陽な表現，

$$u = \frac{1}{\{1+\exp(\pm\frac{1}{\sqrt{6}}x - \frac{5}{\sqrt{6}}t)\}^2} \tag{6}$$

を得た。また，河原と田中は$F(u)$が3次式の場合，すなわち，

$$u_t = u_{xx} + u(1-u)(u-\gamma) \tag{7}$$

を扱った。[4] この方程式の進行波解としては，0と1，0とγ，1とγを結ぶ3種類が存在する。彼らは，やはりソリトン理論で成功をおさめた広田の方法を適用し，Hopf-Cole 変換と同様の変換で(7)式を二次形式の方程式に帰着させ，一種

の摂動法を用いることによって，$0<\gamma<1$ の場合に，0とγを結ぶ進行波とγと1を結ぶ進行波が融合して，0と1を結ぶ進行波となる非定常な厳密解を得た。非線形拡散方程式に関しては，線形化可能な場合を除いて，このような型の厳密解のえられた例は彼らの結果が初めてである。

非線形分散方程式にくらべて，非線形拡散方程式では厳密解の知られている場合はそう多くない。上に挙げたような例の他には，相似解を使って特解をえているものがあるくらいである。したがって，厳密解がどのような方程式に対して存在しうるかを調べることは興味ある問題であり，より一般的なクラスの非線形拡散方程式を解析するのに一定の役割を果すであろう。また，そのような厳密解は非線形散逸系の構造を理解するためにも有意義なものであると考えられる。

上記の理由を動機付けとして，ここでは (1) と (4) を結合した，反応項をもつ Burgers 方程式

$$u_t = u_{xx} + \alpha u u_x + \beta F(u) \tag{8}$$

の厳密解を求めることを試みる。ただし，この方程式がある現象を記述しているかどうかは目下のところ不明である。解析的手段としては，論文4と同じく従属変数変換によって，二次形式の方程式に帰着させる方法を用いる。

最初に，F(u)が2次式の場合，

$$u_t = u_{xx} + \alpha u u_x - \beta u(u-1) \tag{9}$$

を考える。ただしαは正とする。従属変数変換

$$u = \frac{g}{f} \tag{10}$$

を(9)に施せば，

$$g_t f - g f_t = g_{xx} f - 2 g_x f_x - g f_{xx} + \alpha g g_x - \beta g(g-f) + g f_x (2f_x - \alpha g)/f \tag{11}$$

が得られる。この方程式が，すべての従属変数について2次の式になることを要請する。無意味な場合を除き，条件

$$g = \frac{2}{\alpha} f_x \tag{12}$$

を課したとき，すなわち従属変数変換として(2)を施したとき，(9)式は

$$f_{xt} f - f_x f_t = f_{xxx} f - f_{xx} f_x - \frac{2\beta}{\alpha} f_x^2 + \beta f_x f \tag{13}$$

に帰着される。$x = \infty$ または $-\infty$ で $u = 0$ となる進行波解は，

$$f(x,t) = 1 + \exp \eta \tag{14}$$

$$\eta = kx - \omega t + \eta^0 \tag{15}$$

を仮定することによって得られる。ただし x^0 は任意位相定数である。(14)を(13)に代入すれば，容易に $k=\alpha/2$，$\omega=-\alpha^2/4-\beta$ のとき解になることがわかる。uで表現すると，(14)は，x^0 を無視して，

$$u=1/\left[1+\exp\left\{-\frac{1}{2}\alpha x-\left(\frac{\alpha^2}{4}+\beta\right)t\right\}\right]$$

$$=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\tanh\left[\frac{1}{4}\alpha\left\{x+\frac{1}{2}\left(\alpha+\frac{4\beta}{\alpha}\right)t\right\}\right] \qquad (16)$$

となる。この解は，$x=-\infty$ で $u=0$，$x=+\infty$ で $u=1$ となる単調に変化する進行波をあらわし，その速度は，$-\frac{1}{2}\left(\alpha+\frac{4\beta}{\alpha}\right)$ である。すなわち，$\beta>-\alpha^2/4$ のとき負(左)の方向へ進み，$\beta<\alpha^2/4$ のとき正(右)の方向へ進む。時に,$\alpha^2=\beta/4$ のときは，(9)の右辺が釣り合い，静止した平衡解となる。

$\beta\to 0$ のとき，(16)はBurgers方程式の進行波解のうち波数が $\alpha/4$ の特別なものとなる。$\alpha\to 0$ のとき，(16)は進行波解でなくなり，単に時間的に振動している解を与える。論文3で得られた進行波解(6)は，(13)の形式では求まらない。その解を得るには，(11)で $g=1$ とすればよい。このとき(11)は，

$$f_t f-f_{xx}f-\beta f(1-f)+2f_x^2-\alpha f_x=0 \qquad (17)$$

に帰着される。指数関数型の解を仮定すれば，$\alpha=0$ のとき，

$$f(x,t) = 1 + e^{\eta} + \frac{1}{4} e^{2\eta} \tag{18}$$

が，(17) を満足することがわかる。ただし，

$$\eta = \pm\sqrt{\frac{\beta}{6}}\, x - \frac{5}{6}\beta t + \eta^0 \tag{19}$$

である。位相定数を適当に選べば，(18) から (6) を得る。

F(u) が2次式のとき，（有限項の指数関数で表現されるような）簡単な構造をもつ解は，上で与えたものだけであることが予想される。

次に，F(u) が3次式の場合，

$$u_t = u_{xx} + \alpha u u_x - \beta u(u-1)(u-\gamma) \tag{20}$$

を考える。ただし，$\alpha > 0$，$1 > \gamma > 0$ と仮定する。やはり，(2) と同様の変換

$$u = A(\log f)_x \tag{21}$$

を (20) に施すと，Aが

$$\beta A^2 + \alpha A - 2 = 0 \tag{22}$$

の根であるとき，(20) は

$$f_{xt}f - f_x f_t = f_{xxx}f + (\alpha A - 3) f_{xx} f_x + A\beta(\gamma+1) f_x^2 - \beta\gamma f_x f \qquad (23)$$

になることがわかる。変換(21)は，$\beta=0$のとき(2)に一致し，$\alpha=0$のときは河原・田中が用いたものと本質的に同じになる。

解を，

$$f = e^{\delta x}(1+e^{\eta}), \quad \eta = kx - \omega t + \eta^0 \qquad (24)$$

と仮定して，(23)に代入すると，パラメータδ, k, ωが次の6つの場合に自明でない結果が得られる。パラメータδは$x=\pm\infty$での漸近値を指定している。

$$\delta = 0, \quad k = 1/A, \quad \omega = \beta\gamma - 1/A^2 \qquad (25a)$$

$$\delta = 1/A, \quad k = -1/A, \quad \omega = \beta\gamma - 1/A^2 \qquad (25b)$$

$$\delta = 0, \quad k = \gamma/A, \quad \omega = \beta\gamma - \gamma^2/A^2 \qquad (26a)$$

$$\delta = \gamma/A, \quad k = -\gamma/A, \quad \omega = \beta\gamma - \gamma^2/A^2 \qquad (26b)$$

$$\delta = 1/A, \quad k = -(1-\gamma)/A, \quad \omega = (1-\gamma^2)/A^2 \qquad (27a)$$

$$\delta = \gamma/A, \quad k = (1-\gamma)/A, \quad \omega = -(1-\gamma^2)/A^2 \qquad (27b)$$

(24)を(21)に代入し，(25)～(27)を用いると，それぞれa, bの場合は同じ解uを与えることがわかる。結局，次の3つの進行波解が，(24)の形を仮定して得られた。

$$u=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\tanh\frac{1}{2A}\left[x-\left(\beta\gamma A-\frac{1}{A}\right)t\right] \tag{28}$$

$$u=\frac{\gamma}{2}+\frac{\gamma}{2}\tanh\frac{\gamma}{2A}\left[x-\left(\beta A-\frac{\gamma}{A}\right)t\right] \tag{29}$$

$$u=\frac{1+\gamma}{2}+\frac{1-\gamma}{2}\tanh\frac{1-\gamma}{2A}\left[x+\frac{1+\gamma}{A}t\right] \tag{30}$$

ただし，ここで位相定数は省略している。(28)～(30)はそれぞれ，0と1，0とγ，1とγを結ぶ進行波解である。$\beta=0$とすると，これらの解はBurgers方程式のある進行波解に一致し，$\alpha=0$とすると河原・田中が示した3種類の進行波解に一致する。

両極限$\alpha=0$および$\beta=0$からのずれを，たとえば解(28)について評価すると，位相$\eta=kx-\omega t$について次の結果が得られる。

Burgers方程式からのずれについては，簡単のために$\alpha=1$とし，$\beta\ll1$とすれば，

$$\eta\approx\frac{1}{2}(1+\beta)\left[x+\left\{\frac{1}{2}+\beta(1-4\gamma)\right\}t\right] \tag{31}$$

が得られる。これは，Burgers方程式の進行波解とくらべて，幅が$(1-\beta)$倍，速さが$\beta(1-4\gamma)$だけ変化していることを示している。

Fisher型方程式からのずれについては，やはり簡単のた

めに $\beta=1$ とし，$\alpha \ll 1$ とすれば，

$$\eta \approx \left(\mp\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\alpha}{4}\right)\left[x\pm\left\{\frac{\sqrt{2}}{2}(1-2\gamma)\mp\frac{1+2\gamma}{4}\alpha\right\}t\right] \tag{32}$$

が得られる。上の符号のとき，進行波の幅が $(1-\frac{\sqrt{2}}{4}\alpha)$ 倍，速さは $\frac{1+2\gamma}{4}\alpha$ だけ変化し，下の符号のときは，幅が $(1+\frac{\sqrt{2}}{4}\alpha)$ 倍，速さはやはり $\frac{1+2\gamma}{4}\alpha$ 倍変化していることがわかる。

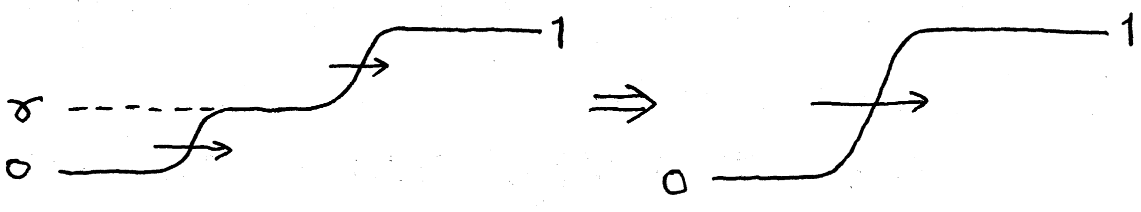
二次形式になっている方程式 (23) の特徴は，進行波解 (24) の他に，2つの進行波が融合して1つの進行波となる厳密解をもつことである。すなわち，(23) に

$$f = 1+e^{\eta_1}+e^{\eta_2} \tag{33}$$

$$\eta_1 = \frac{1}{A}\left\{x-\left(\beta\gamma A-\frac{1}{A}\right)t\right\}+\eta_1^{(0)} \tag{34}$$

$$\eta_2 = \frac{\gamma}{A}\left\{x-\left(\beta A-\frac{\gamma}{A}\right)t\right\}+\eta_2^{(0)} \tag{35}$$

を代入すると，確かに解になっていることがわかる。この解は，図のように，0と γ，γ と1を結ぶ進行波が融合して，0と1を結ぶ進行波になることを示している。



この解は，$\alpha=0$ のときに河原と田中の与えた融合解の拡張になっている。

ソリトン理論では，広田の演算子で書かれた二次形式の方程式が，ソリトン解を与えるのに重要な役割を果した。また代数解析の手法でその構造もある程度明らかにされている。ここで与えた(13)や(23)のような二次形式の方程式は，広田の演算子のみでは書けない拡張されたものになっている。既に指摘したように，(33)のような解をもちうるのは拡張された二次形式の方程式の特徴の一つであり，その構造を理解するのは興味ある課題である。

引用文献

1) A.S. Fokas : J. Math. Phys. 21, 1318 (1980)

2) J. Satsuma and M. Mimura : J. Phys. Soc. Jpn. 54, 894 (1985)

3) M. J. Ablowitz and A. Zeppetella : Bulletin of Math. Bio. 41, 835 (1979)

4) T. Kawahara and M. Tanaka : Phys. Letters 97A, 311 (1983)