

フラクタル分布とスペクトル

東大 理 物理 神部 勉 (Kambe Tsutomu)

真田 勉 (Sanada Tsutomu)

1. Introduction

乱流場の中では、活性的 (active) な領域が自己相似構造、いわゆるフラクタル分布、をしていると考えられている。そのような考えにもとづいて、Frish, Sulem & Nelkin (1978) は、フラクタル次元を定義し、それがコルモゴロフのエネルギー-スペクトル $E(k) \sim k^{-5/3}$ にどのような修正を加えるかを考察している。

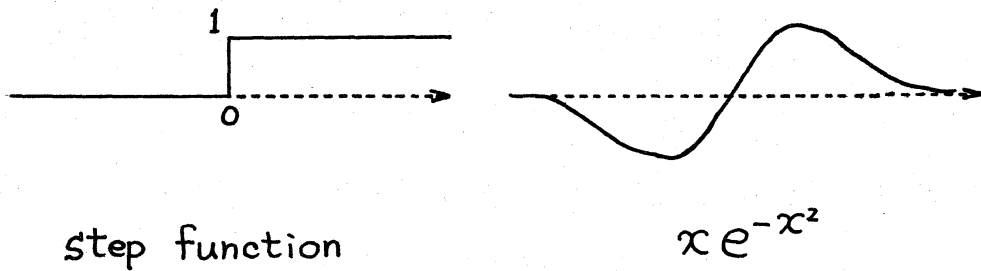
そこで、フラクタル分布する自己相似構造がスペクトルにどのような修正を加えるかを、できるだけ簡単な状況で考えてみることにする。さらに乱流の最も簡単なモデル方程式である Burgers 方程式を用いて、自己相似な構造を持った解が存在すること、またそのような構造が、スペクトルに修正を加えることを示す。

2. 分布とスペクトル

解の構造の最も基本的な要素を、generator; $U(x)$ と呼ぶことにしよう。例えば $U(x)$ は、図 1 に示すような単位ステップ関数であったり、 $U(x) \sim x e^{-x^2}$ の型を持ったも

のである。

generator function : $U(x)$



このような generator が, 空間に分布するとき, 解は一般に

$$u(x) = \sum_n a_n U(x - x_n), \quad (2-1)$$

と表わすことができる。ここに, x_n は generator の位置を, a_n は generator の振幅を表わしている。

x_n がフラクタルに分布すれば, すなわち generator がフラクタルに分布すれば, 解 $u(x)$ の場合は, そのような構造を持つ。

次に, $u(x)$, $U(x)$ のフーリエ変換を, $\hat{u}(\mathcal{R})$, $\hat{U}(\mathcal{R})$ で表

わす。すなわち,

$$\hat{u}(k) = \int u(x) e^{ikx} dx, \quad (2-2)$$

$$\hat{U}(k) = \int U(x) e^{ikx} dx, \quad (2-3)$$

とすると, (2-1) 式から一般に次の形に書ける:

$$\hat{u}(k) = \hat{U}(k) \hat{F}(k). \quad (2-4)$$

ただし, $\hat{F}(k)$ は generator の分布から決まる関数で,

$$\hat{F}(k) = \sum_n a_n e^{ikx_n}, \quad (2-5)$$

である。つまり $u(x)$ のスペクトル, すなわち $\hat{u}(k)$ は generator そのもののスペクトル $\hat{U}(k)$ と, その generator の分布に依存するスペクトル $\hat{F}(k)$ との積である。

これは明らかに, スペクトルが解の構造, すなわち generator の分布に依って, 修正されうることを示している。

そこで, われわれは, 特に generator の分布 $\{x_n\}$ が, 自己相似である場合の $\hat{F}(k)$ の振舞いを調べた。

自己相似な分布は、次のようにして作ることができる。
まず、ある自然数 n に対して、

$$x_{m_1, m_2, \dots, m_n} = 2(m_1 \alpha + m_2 \alpha^2 + \dots + m_{n-1} \alpha^{n-1}) + (m_n + 1) \alpha^n, \quad (2-6)$$

$$(m_1, m_2, \dots, m_n \text{ は } 0 \text{ 又は } 1, 0 < \alpha < \frac{1}{2})$$

で定義される、合計 2^n 個の位置に、generator を適当な振幅を持たせて置く。これを $n=1, 2, \dots, N$ について行ったものを加え合わせる。 $N \rightarrow \infty$ のとき、これは自己相似な分布となる。

たとえば、generator をステップ関数とし、振幅を $(-1)^{m_n}$ で与えると、 $\alpha = \frac{1}{3}$ のとき、図2のようなカントール集合を特徴づける関数 $u(x)$ ができる。図2は $N=5$ に相当するものである。 $N \rightarrow \infty$ で、 $u(x)$ はカントール集合上で0、それ以外で1をとる関数である。

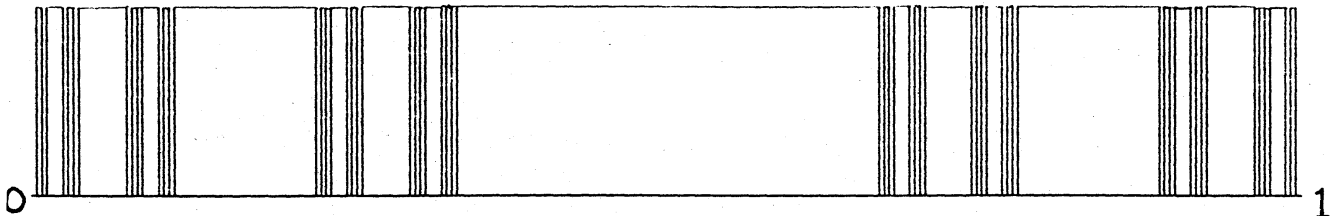


図2

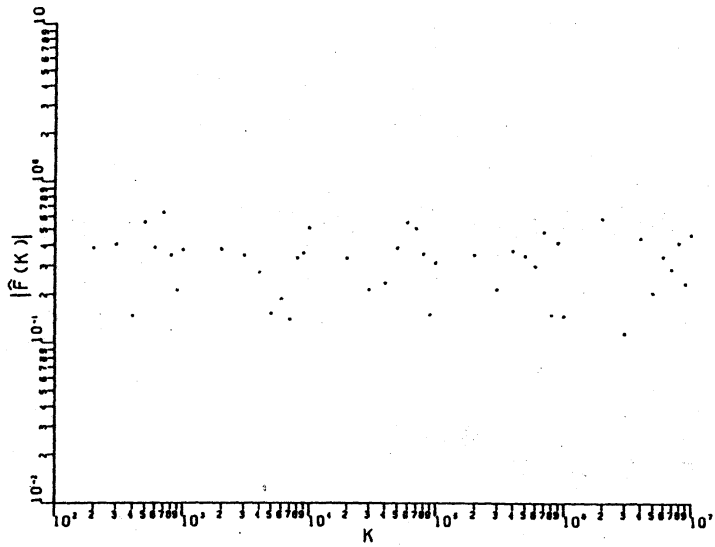
x_n が (2-6) で与えられ, $a_n = a^n (-1)^{m_n}$ のとき, (2-5) は,

$$\begin{aligned}\hat{F}(\mathbb{R}) &= \sum_n a_n e^{i\mathbb{R}x_n} \\ &= \sum_{n=1}^N a^n \sum_{m_1=0,1} \cdots \sum_{m_n=0,1} e^{i\mathbb{R}x_{m_1 m_2 \cdots m_n}} \\ &= \sum_{n=1}^N a^n (e^{i\mathbb{R}a^n} - e^{2i\mathbb{R}a^n}) \prod_{m=1}^{n-1} (1 + e^{2i\mathbb{R}a^m}),\end{aligned}\tag{2-7}$$

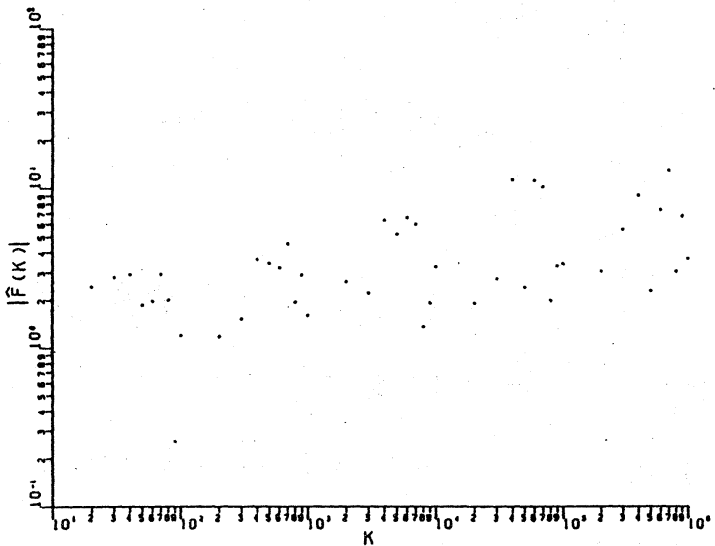
となる. ($\prod_{m=1}^0 = 1$ と定義する.) a は実定数で, $0 < a < \frac{1}{2}$ のとき, $\hat{F}(\mathbb{R})$ は, $N \rightarrow \infty$ で収束する.

図 3 に, 3 つの例 (i) ~ (iii) を示す. これは数値計算によって得られたものである.

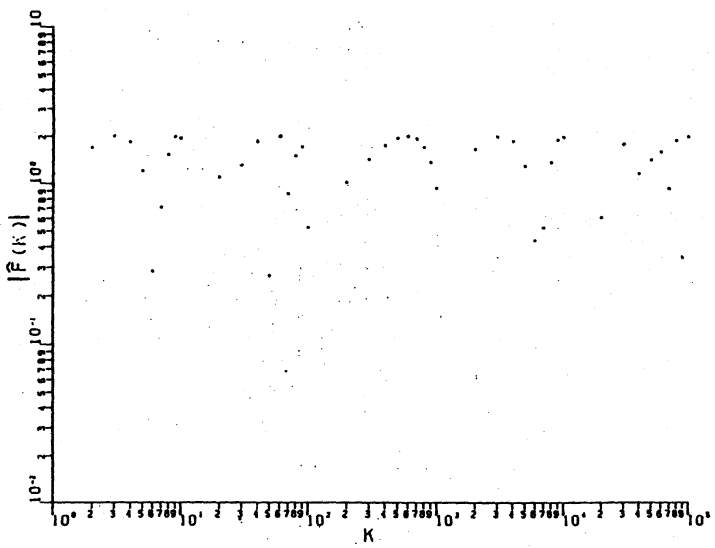
(i) と (iii) では, $|\hat{F}(\mathbb{R})|$ は単に振動する関数であるが, (ii) では, 明らかに右上がりの傾向を示している. 従ってこの場合, generator の分布に依って, スペクトルの *sup limit* のバキが変更されることになる.



(i) $\alpha = \frac{1}{4}$, $\alpha = \frac{1}{10}$, $N = 100$



(ii) $\alpha = 1$, $\alpha = \frac{1}{10}$, $N = 100$



(iii) $\alpha = 1$, $\alpha = \frac{1}{3}$, $N = 100$

3. 自己相似な構造をもつ Burgers 方程式の解

Burgers 方程式,

$$u_t + u u_x = \nu u_{xx}, \quad (3-1)$$

は次のような Cole-Hopf 変換,

$$u = -2\nu \frac{\partial}{\partial x} \log \psi, \quad (3-2)$$

によって, 熱伝導方程式,

$$\psi_t = \nu \psi_{xx}, \quad (3-3)$$

に変換される。熱伝導方程式の基本解は,

$$\psi = \frac{1}{\sqrt{t}} \exp\left[-\frac{(x-x_n)^2}{4\nu t}\right], \quad (3-4)$$

であるから, その重ね合せの関数,

$$\psi = 1 + \frac{1}{\sqrt{t}} \sum_n a_n \exp\left[-\frac{(x-x_n)^2}{4\nu t}\right], \quad (3-5)$$

も解である。Cole-Hopf 変換 (3-2) により,

$$u = \frac{\frac{1}{t} \frac{1}{\sqrt{t}} \sum_n a_n (x - x_n) \exp\left[-\frac{(x-x_n)^2}{4\nu t}\right]}{1 + \frac{1}{\sqrt{t}} \sum_n a_n \exp\left[-\frac{(x-x_n)^2}{4\nu t}\right]}, \quad (3-6)$$

は, Burgers 方程式 (3-1) の解である。

さて, $t \rightarrow \infty$ のとき, (3-6) 式の分母の第2項は, 1 に比べて十分小さくなるので,

$$u \sim t^{-\frac{3}{2}} \sum_n a_n (x - x_n) \exp\left[-\frac{(x-x_n)^2}{4\nu t}\right] + O(t^{-2}), \quad (3-7)$$

と近似できる。generator $U(x)$ を,

$$U(x) = t^{-\frac{3}{2}} x e^{-x^2/4\nu t}, \quad (3-8)$$

と置けば, (3-7) は正に (2-1) の形をしている。この場合

(3-8) のフーリエ変換は,

$$\hat{U}(k) = (4i\sqrt{\pi} \nu^{\frac{3}{2}}) k e^{-\nu t k^2}, \quad (3-9)$$

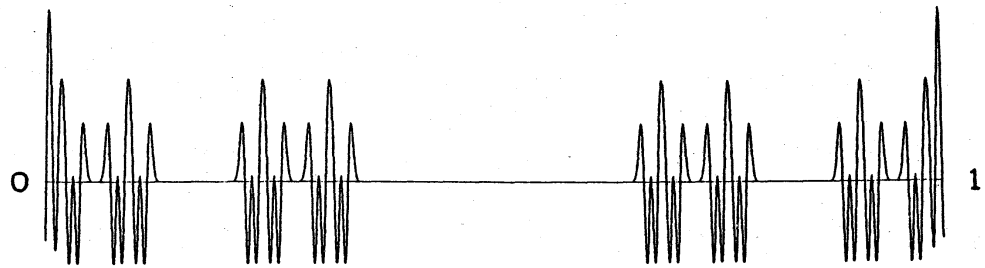
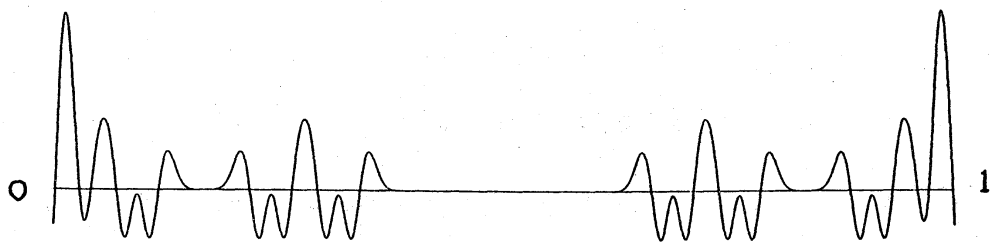
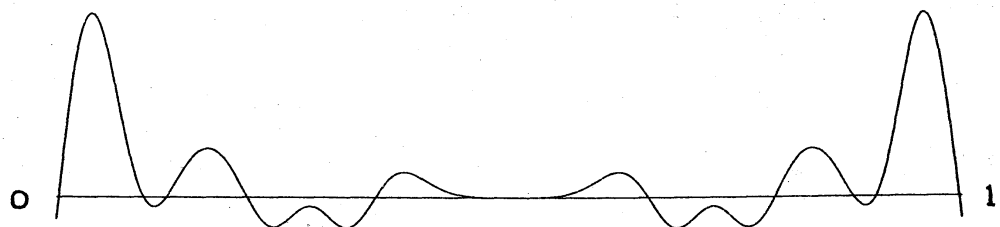
である。Burgers方程式の解 (3-7) のスペクトルは、generator のスペクトル (3-9) に、分布によるスペクトル (2-5) の修正を受けたものである。

そこで、実際には generator (3-8) を、フラクタル分布 (図3の (iii) に対応する分布) させて、解 $u(x,t)$ の時間発展を数値計算によって調べてみた。

図4は、3つの時刻における、 $u(x,t)$ のプロファイルである。たて軸のスケールを変えてあることに注意してほしい。3つの図を見ると、この解が自己相似な構造を持っていることがわかる。時間が経つにつれて、粘性 ν の効果により、細かい構造が消えていくが、次の時間に現れる大きい構造は、前の時間の小さい構造と自己相似である。

(参考文献)

Frisch, U., Sulem, P, L. & Nelkin, M. 1978 J. Fluid Mech.
vol. 87, 719

 $u(x, 1)$  $\sqrt{10} \cdot u(x, 10)$  $10 \cdot u(x, 100)$

$$\text{图4} \quad u(x, t) = \frac{1}{t^{\frac{3}{4}}} \sum_n a_n (x - x_n) \exp\left[-\frac{(x - x_n)^2}{4\nu t}\right]$$

$$4\nu = 2.75 \times 10^{-5}$$