数理解析研究所講究録
602巻 1986年 228-243

Chain recurrence と P.O.T.P.

名大理　下村 尚司
Takashi Shimomura

§1 basic facts and definitions.

(X, d) を metric d を持つ compact metric space とする。$f : X \longrightarrow X$ を continuous surjection とする。$\alpha > 0$, $x, y \in X$ とする。$\{x_0, \cdots, x_m\}$ $(x_i \in X)$ が x から y への <u>α-chain</u> とは、$x = x_0$, $y = x_m$ で、$d(f(x_{i-1}), x_i) < \alpha$ $(i = 1, 2, \cdots, m)$ が満たされることを言う。$m+1$ をその長さと言う。$\alpha > 0$ に対し x から y への α-chain 及び y から x への α-chain が存在するとき、$x \overset{\alpha}{\sim} y$ と書く。任意の $\alpha > 0$ に対し $x \overset{\alpha}{\sim} y$ となるとき $x \sim y$ と書き、x と y が <u>chain equivalent</u> であると言う。$x \sim x$ のとき x は <u>chain recurrent</u> であると言い $R(f) = \{x \in X, x \sim x\}$ とかく。$R(f)$ は closed set であり $\sim$ は $R(f)$ の equivalence relation である。$\sim$ の equivalence class を <u>chain component</u> と呼ぶ。chain component は closed set である。

<u>Lemma 1.</u> $f(R(f)) \subset R(f)$。

Proof. $x \in R(f)$ とする。$\alpha > 0$ を任意に固定する。$\delta > 0$ を、$d(y, z) < \delta$ なら $d(f(y), f(z)) < \alpha$ となるように固定する。

$\{x_0, \cdots, x_m\}$ を x から x への δ-chain とする。このとき $\{f(x_0), \cdots, f(x_m)\}$ は $f(x)$ から $f(x)$ への α-chain である。α は任意だから求めることを得る。 □

<u>Th. 2. (C. Robinson [2])</u> $R = R(f)$ とするとき、$R(f|_R) = R(f)$。

Proof. [3] P. 429 と同様 □

<u>Remark.</u> $f(R(f)) = R(f)$。

<u>Prop. 3.</u> F を chain component とすると $f(F) = F$。

Proof. $x \in F$ とする。$\alpha > 0$ とする。$f(x)$ から x への α-chain があることを示す。$0 < \delta < \alpha/2$ を $d(y, z) < \delta$ なら $d(f(y), f(z)) < \alpha/2$ となるようにとる。$x = x_0 = x_m$ なる δ-chain $\{x_0, \cdots, x_m\}$ をとる。このとき $\{f(x), x_2, \cdots x_m\}$ が α-chain であることが容易に確かめられる。よって $f(F) \subset F$。 □

Def. f が chain transitive とは、任意の $x, y \in X$ に対して $x \sim y$ が成立することを言う。closed set $Y \subset X$ が chain transitive とは $f(Y) = Y$ で $f|_Y$ が chain transitive であることを言う。

<u>Prop. 4.</u> F を chain component とすると F は chain transitive.

証明の概略。$x, y \in F$ とする。各 $n \in \mathbb{N}$ に対し $C_n = \{x_0^n, \cdots x_{m_n}^n\}$ を x から y を通って x にもどる $1/n$-chain とする。$\mathcal{C}(X)$ を X の non-empty closed set の集合とする。$\bar{d}$ を $\mathcal{C}(X)$ 上の Hausdorff metric とする。すると、$(\mathcal{C}(X), \bar{d})$ は compact なので subsequence

C_{m_k} が存在し $C_{m_k} \to {}^{\exists}C \in \mathcal{C}(X)$ となる。このとき $C \ni x, y$ で、C が chain transitive であることが示される。よって $C \subset F$ であり、F が chain transitive であることが分る。[2] 参照。

<u>Prop. 5.</u> f が homeomorphism のとき $\#(R(f)/\sim) = 1$ なら $X = R(f)$。

Proof. $x \in X \setminus R(f)$ とする。$R(f) \supset \Omega(f)$ (ここで $\Omega(f)$ は f の non-wandering set) だから、$\alpha(x) \subset R(f)$, $\omega(x) \subset R(f)$ である。(ここで $\alpha(x)$ は x の α-limit set, $\omega(x)$ は x の ω-limit set)。今 $R(f)$ が chain component だから $x \in R(f)$、これは矛盾。 □

Remark. Prop.5 は f が continuous surjection のときも成立する

<u>Prop. 6.</u> $R(f)$ が connected なら $\# R(f)/\sim = 1$ 特に $X = R(f)$。

Proof. $\alpha > 0$ とする。$x \in R(f)$ に対して $E(x, \alpha) = \{y \in R(f) ; x \overset{\alpha}{\sim} y\}$ とかく。各 $E(x, \alpha)$ が open set であることを示せばよい。$x \in X$ を固定する。$x \overset{\alpha}{\sim} y$ とし、x から y への α-chain を $\{x_0, \cdots, x_m\}$ とする。$d(f(x_{m-1}), x_m) < \alpha$ だから $x_m = y$ の近傍 U_1 があって $d(f(x_{m-1}), z) < \alpha$ $\forall z \in U_1$ となる。このとき $\{x_0, \cdots, x_{m-1}, z\}$ は x から z への α-chain である。次に y から x への α-chain を $\{y_0, \cdots, y_n\}$ とする。$d(f(y_0), y_1) < \alpha$ だから $y_0 = y$ の近傍 U_2 があって $d(f(z), y_1) < \alpha$ $\forall z \in U_2$ となる。よって $U = U_1 \cap U_2$ とすると $U \subset E(x, \alpha)$。よって $E(x, \alpha)$ は open set。 □

§2 finite chain components.

M. Hurley [2] は compact manifold 上の topologically stable diffeomorphism が有限個の chain components を持つことを示した。ここでは $\#(R(f)/\sim) < \infty$ であるような f が X が connected である場合に持つ性質のいくつかを chain component の観点から調べる。

Th. 7. f が homeo. とする。F が chain component で F の開近傍 U があって $(R(f)\setminus F)\cap\overline{U}=\phi$ であり任意の $x\in X\setminus F$ に対して $\alpha(x)\cap F=\phi$ なら、F は attractor。(定義については[1]参照。)

Proof. F が attractor でないとする。$\varepsilon>0$ を $d(x,F)<\varepsilon \Rightarrow x\in U$ となるようにとる。各 $n\in N$ に対し $V_n=\{x;\ d(x,F)<\frac{\varepsilon}{n}\}$ とおく。$\overline{U}\cup f(\overline{U})$ の近傍 U' を $(R(f)\setminus F)\cap\overline{U'}=\phi$ となるようにとる。$\omega(V_n)=\bigcap_{l\geq 0}\overline{\bigcup_{k\geq l} f^k(V_n)}$ とおく。仮定より $\omega(V_n)\supsetneqq F$ $(\forall n\in N)$ である。もし $\omega(V_n)\subset\overline{U}$ とすると F は $\omega(V_n)$ に含まれる唯一の chain component である。よって $f(\omega(V_n))=\omega(V_n)$ に注意すると、Prop. 5 より $\omega(V_n)=F$ となる。これは仮定に反する。よって $y\in\omega(V_n)\cap\overline{U}^c$ がある。$\delta>0$ があって $U_\delta(y)\subset\overline{U}^c$ となる (ここで $U_\delta(y)=\{z\in X;\ d(y,z)<\delta\}$)。$x_n\in V_n$ と $k\in N$ があって $f^k(x_n)\in U_\delta(y)$ となる。$k_n=\min\{k\in N;\ f^k(x_n)\in U^c\}$ とおき $y_n=f^{k_n}(x_n)$ とおくと、$y_n\in U^c\cap f(\overline{U})$。必要なら部分列をとって $\lim_{n\to+\infty} y_n=y$ とすると、$y\in U^c\cap f(\overline{U})\subset U'$。$n\to+\infty$ のとき $k_n\to+\infty$ である。このとき $\alpha(y)\subset\overline{U'}$ が分る。$\alpha(y)$ は chain transitive だから $\alpha(y)\subset F$ となり、これは定理の仮定に反する。□

<u>*Lemma 8.*</u> X がconnectedで f はhomeo. また $\#(R(f)/\sim)<\infty$ とする。$E_1,\cdots,E_p$ をrepeller、$F_1,\cdots,F_q$ をattractorの集合とする。これらをvertexとし E_i から F_j へのedgeを任意の $\alpha>0$ について E_i の点から F_i の点への α-chainが存在するとき与えることによって定義されるgraphを G' とする。このとき G' はconnected。

Proof. $G'=G_1'\cup\cdots\cup G_r'$ (G_i' はconnectedで G_i''s は互いにdisjoint) とかく。必要なら並べかえて、$E_1,\cdots,E_s$ 及び $F_1,\cdots,F_t$ が G_1' に現われるrepellerとattractorの全てとする。$1\le i\le t$ に対し $B_i=\{x\in X$; 任意の $\alpha>0$ に対し x から F_i の点への α-chainが存在する$\}$ とおく。容易に分るように B_i はclosed。$B(G_1')=B_1\cup\cdots\cup B_t$ とおく。同様に $B(G_2'),\cdots,B(G_r')$ を定める。$k\neq l$ のとき $B(G_k')\cap B(G_l')=\phi$ であることを示す。もし $x\in B(G_k')\cap B(G_l')$ とすると $\#(R(f)/\sim)<\infty$ 及びTh.7.より E_k $(1\le k\le p)$ があって任意の $\alpha>0$ に対し E_k の点から x への α-chainが存在する。これは $G_k'\cap G_l'=\phi$ に反する。同様に任意の $x\in X$, $\alpha>0$ に対して x からある F_k $(1\le k\le q)$ への α-chainが存在するから $X=B(G_1')\cup\cdots\cup B(G_r')$。よって X がconnectedだから $r=1$。 □

$\#(R(f)/\sim)<\infty$ とする。また f はhomeo.とする。E, F をchain componentとするとき、E から F への向き付けられたedge $\rightarrow$ を

$x \in X \setminus R(f)$ があって、$\alpha(x) \subset E$, $\omega(x) \subset F$ となるときに与える。chain component を vertex とし $\to$ を edge として得られる oriented graph を G とする。

<u>*Lemma 9.*</u> E, F を chain component とする。任意の $\alpha > 0$ に対し E の点から F の点への α-chain があるとき E から F への G の path がある。

Proof. E, F をそれぞれ一点に同一視してできる商空間と f からその商空間に誘導される homeo. についても graph が同様に定義できて、G に一致するから、E、F は fixed point としてよい。

$\{E_1, \cdots, E_u\}$ を chain component 全ての集合とする。各 E_i に開近傍 U_i があって、$K_i = f^{-1}(\overline{U}_i) \cup \overline{U}_i \cup f(\overline{U}_i)$ は互いに disjoint になる。K_i の開近傍 V_i を $\overline{V}_i \cap \overline{V}_j = \phi$ $(i \neq j)$ となるように取る。各 $n \in N$ について、E から F への $1/n$-chain $P_n = \{x_0^n, \cdots, x_{m_n}^n\}$ がある。$P_n \in \mathcal{C}(X)$ だから必要なら部分列をとって $\lim_{k \to \infty} P_{n_k} = P \in \mathcal{C}(X)$ とすることができる。E, F は fixed point だから $\overline{d}(f(P_{n_k}), P_{n_k}) < \frac{1}{n_k}$ よって、$f(P) = P$ が分る。以下概略を記す。$x \in P \setminus \{F\}$ があって $\omega(x) \subset F$ となる。$\alpha(x)$ は chain transitive だから $1 \leq i_1 \leq u$ があって $\alpha(x) \subset E_{i_1}$ となる。$\alpha(x) \subset P$ だから $E_{i_1} \cap P \neq \phi$。よってもし $E_{i_1} \neq E$ なら $y \in P \setminus R(f)$ があって $\omega(y) \subset E_{i_1}$ となる。よって $\alpha(y) \subset E_{i_2}$ なる $1 \leq i_2 \leq u$ がある。この操作は $E_{i_j} = E$ に到るまで続けられる。しかし cycle がないので実

際Eに到る。 □

Th. 10 X が connected、f が homeo. $\#(R(f)/\sim) < \infty$ なら graph G は connected。

Proof. lemma 8, lemma 9 より明らか。 □

Cor. 11. X が connected、f が homeo. $2 \leq \#(R(f)/\sim) < \infty$ なら各 chain component E に対し. $x \in X \setminus E$ があって. $\alpha(x) \subset E$ または $\omega(x) \subset E$ となる。

Proof. theorem 10 より明らか。 □

§3 the pseuo-orbit tracing property

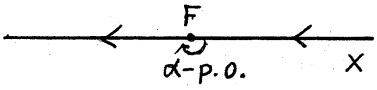
以下 f を homeomorphism とする。

X の点列 $\{x_i\}$ が α-pseudo-orbit $(\alpha > 0)$ であるとは. $d(f(x_i), x_{i+1}) < \alpha$ が成立することを言う。 $\{x_i\}$ が ε-trace $(\varepsilon > 0)$ されるとは. $x \in X$ があって. $d(f^i(x), x_i) \leq \varepsilon$ が成立することを言う。(X, f) が P.O.T.P. を持つとは、任意の $\varepsilon > 0$ に対し $\alpha > 0$ があって、任意の α-pseudo-orbit (α-p.o.) が ε-trace されることを言う。

Th. 12. f が P.O.T.P を持つ homeo. とする。F が chain component で $R(f)$ で open だとし、さらに $\mathrm{int}\{x \in X ; \omega(x) \subset F\} \neq \phi$ なら F は attractor である。

Proof. F が attractor でないとすると、theorem 7 より $x \in X \setminus F$

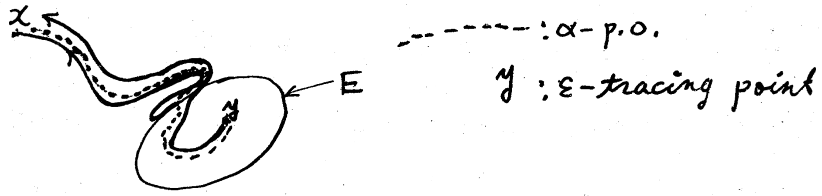
があって $\alpha(x) \subset F$ となる。これは P.O.T.P. に矛盾する。(下図参照)



□

Th. 13. X が connected で f が P.O.T.P. を持つ homeo. で $2 \leq \#(R(f)/\sim) < \infty$ のとき、E を chain component とすると $\mathrm{int}\, E = \phi$。

Proof. corollary 11 より $x \in X \setminus E$ があって $\alpha(x) \subset E$ または、$\omega(x) \subset E$。これは P.O.T.P. に矛盾する。(下図参照)



□

Th. 14. f が P.O.T.P. を持つ homeo. とする。$\mathcal{M}$ を minimal set の族とする。このとき $R(f) = \overline{\bigcup_{K \in \mathcal{M}} K}$。

Proof. $x \in R(f)$、$\alpha > 0$ とする。x を通る cyclic α-chain を ε-trace する点の全体は f-invariant closed set を成す。その minimal set K をとると $d(x, K) \leq \varepsilon$ である。ε は任意だから求めることを得る。 □

Th. 15. f が P.O.T.P. を持つ homeo. で chain transitive のとき f は topologically transitive。

Proof. U, V を空でない open set とする。$n \geq 0$ があって $f^n(U) \cap V \neq \phi$ となることを示せばよい。$p \in U$, $q \in V$ とする $p \sim q$ だから P.O.T.P. より明らか。

§4 chain mixing, P.O.T.P. and topological entropy.

<u>Def.</u> closed set $Y\subset X$ が chain mixing とは $f(Y)=Y$ で任意の $x,y\in Y$ に対し $\alpha>0$ を任意にとったとき $N\in\mathbb{N}$ があって任意の $m\geq N$ に対し x から y への α-chain $\{x_0,\cdots,x_m\}\subset Y$ が存在することを言う。X が chain mixing のとき f が chain mixing と言う。

<u>Remark 1).</u> Y が chain transitive とする。ある $x,y\in Y$ に対し α を任意にとったとき $N\in\mathbb{N}$ があって任意の $m\geq N$ に対し x から y への α-chain $\{x_0,\cdots,x_m\}\subset Y$ が存在する $\Leftrightarrow$ Y は chain mixing

<u>2).</u> $F\subset X$ が chain transitive とする。F が fixed point を持てば F は chain mixing.

<u>3).</u> $f|_Y$ が topologically mixing なら Y は chain mixing

<u>Th. 16</u> X が connected で chain transitive のとき X は chain mixing。

Proof. $\alpha>0$, $x\in X$ を固定する。$M(x)=\{m\in\mathbb{N}\ ;\ x$ から x への α-chain で長さが $m+1$ のものが存在する$\}$ とおく。$m, m'\in M(x)$ のとき $m+m'\in M(x)$ である。よって $M(x)$ の元の G.C.M. を m_0 とすると、$N\in\mathbb{N}$ があって任意の $n\geq N$ に対して $m_0 n\in M(x)$ となる。$m_0=1$ を示せばよい。$y,z\in X$ に対し $y\underset{m_0}{\sim}z$ とは $n,n'\in\mathbb{N}$ があって、y から z への長さ $m_0 n+1$ の α-chain 及び z から y への長さ $m_0 n'+1$ の α-chain があることとする。$\underset{m_0}{\sim}$ が X 上の

equivalence relation であることが分る。proposition 6 と同様にして $\underset{m_0}{\sim}$ による各 equivalence class が open であることが分る。よって、equivalence class は1つ、よって $x \underset{m_0}{\sim} f(x)$ これから $m_0=1$ が分る。 □

Th.17. f が P.O.T.P. を持つ homeo. とする。$\varepsilon>0$, $\alpha>0$ を任意の α-p.o. が ε-trace されるように固定する。$\{P_1,\cdots,P_M\}\subset X$ が $d(P_k,P_l)>2\varepsilon$ $(k\neq l)$ を満たすとする。$m\in\mathbb{N}$ を固定する。P_k から P_l への長さ $m+1$ の α-chain があるとき、$A_{kl}=1$ とおき、それ以外のとき $A_{kl}=0$ とおく、$(1\leq k,l\leq M)$。このとき closed set $Y\subset X$、及び continuous surjection $\pi: Y\longrightarrow\Sigma_A$ があって $f^m(Y)=Y$ であり $\sigma_A\circ\pi=\pi\circ f^m|_Y$ となる。ここで (Σ_A,σ_A) は transition matrix A を持つ subshift of finite type。

Proof. $P=\{P_1,\cdots,P_M\}$ とおく $a\in\mathbb{N}$ に対し

$$\Sigma_A^a=\{(x_{-a},\cdots,x_a)\in P^{2a+1};\ x_i=P_k,\ x_{i+1}=P_l \text{ なら } A_{kl}=1\}$$

とおく。$x\in\Sigma_A^a$ に対し $P(x)=\bigcap_{i=-a}^{a} f^{-im}(B_\varepsilon(x_i))$ とおく、このとき $P(x)\neq\phi$。また $d(P_k,P_l)>2\varepsilon$ $(k\neq l)$ より $x,x'\in\Sigma_A^a$, $x\neq x'$ なら $P(x)\cap P(x')=\phi$。$Y_a=\bigcup_{x\in\Sigma_A^a}P(x)$ とおき $Y=\bigcap_{a=1}^{\infty}Y_a$ とおく。Y は closed で $f^m(Y)=Y$。$\Sigma_A=\{(x_i)_{i\in\mathbb{Z}}\in P^{\mathbb{Z}};\ x_i=P_k,\ x_{i+1}=P_l$ なら $A_{kl}=1$, $^\forall i\in\mathbb{Z}\}$ とおく。$(x_i)_{i\in\mathbb{Z}}\in\Sigma_A$ に対し $\sigma_A((x_i)_{i\in\mathbb{Z}})=(x_{i+1})_{i\in\mathbb{Z}}$ によって $\sigma_A:\Sigma_A\to\Sigma_A$ が定義される。$x\in\Sigma_A$ に対し $P(x)=\bigcap_{i=-\infty}^{\infty}f^{-im}(B_\varepsilon(x_i))$ $(x=(x_i)_{i\in\mathbb{Z}})$ とおく。このとき

$x, x' \in \Sigma_A^a$ について $x \neq x'$ なら $P(x) \cap P(x') = \phi$ だから、$Y = \bigcup_{x \in \Sigma_A} P(x)$ が成立する。異った $x, x' \in \Sigma_A$ に対し $P(x) \cap P(x') = \phi$ だから、$\pi : Y \to \Sigma_A$ を $\pi(P(x)) = \{x\}$ $(x \in \Sigma_A)$ で定義することができる。π が continuous であることを示せばよい。$\beta = \min_{k \neq l} d(P_k, P_l) - 2\varepsilon > 0$ とおく。$a \in \mathbb{N}$ を任意にとったとき、$\delta > 0$ が存在し、$d(y, y') < \delta$ $(y, y' \in Y)$ なら $\pi(y) = (x_i)_{i \in \mathbb{Z}}$, $\pi(y') = (x'_i)_{i \in \mathbb{Z}}$ と書いたとき、$x_i = x'_i$ ($\forall i$ s.t. $|i| \leq a$) であることを示せばよい。そこで $\delta > 0$ を $d(y, y') < \delta$ なら $d(f^{im}(y), f^{im}(y')) < \beta$ ($\forall |i| \leq a$) となるようにとる。今 j $(|j| \leq a)$ があって $x_j \neq x'_j$ とする。このとき、$2\varepsilon + \beta \leq d(x_j, x'_j) \leq d(x_j, f^{jm}(y)) + d(f^{jm}(y), f^{jm}(y')) + d(f^{jm}(y'), x'_j) < \varepsilon + \beta + \varepsilon = 2\varepsilon + \beta$、となり矛盾が生じる。よって π は continuous。 □

Cor. 18. f が P.O.T.P. を持つ homeo. で chain mixing chain component F があって $\# F > 1$ とすると $h(f) > 0$。

Proof. $\{p_1, p_2\} \subset F$ を $p_1 \neq p_2$ となるようにとる。$\varepsilon = d(p_1, p_2)/3 > 0$ とおく。$\alpha > 0$ を任意の α-p.o. が ε-traceされるようにとる。$f|_F$ が chain mixing だから $m > 0$ があって 各 $i, j = 1, 2$ について p_i から p_j への長さ $m+1$ の α-chain がある。よって $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ とすると、theorem 17 から closed set $Y \subset X$ と continuous surjection $\pi : Y \to \Sigma_A$ があって $f^m(Y) = Y$, $\sigma_A \circ \pi = \pi \circ f^m|_Y$ となる。よって、$h(f) = \frac{1}{m} h(f^m) \geq \frac{1}{m} h(f^m|_Y) \geq \frac{1}{m} h(\sigma_A) = \frac{1}{m} \log 2 > 0$。 □

Cor. 19. f が P.O.T.P. を持つ homeo. で点 $p, q \in X$ $(p \neq q)$ があって $f(p) = p$、$p \sim q$ とする。このとき $h(f) > 0$。

Proof. p を含む chain component は p が fixed point だから chain mixing でありまた q を含む。よって corollary 18 より $h(f) > 0$。 □

Th. 20. f が P.O.T.P. を持つ homeo. で $h(f) = 0$ とする。このとき各 $n \in \mathbb{N}$ に対して $\mathrm{Fix}(f^n) = \{x \in X ; f^n(x) = x\}$ は totally disconnected。

Proof. $n \in \mathbb{N}$ を固定する。$\mathrm{Fix}(f^n)$ の connected component K が一点でないとする。$R(f^n|_K) = K$ で K は connected だから proposition 6 より K は chain transitive。よって theorem 16 より K は chain mixing よって f^n にかんする chain component E で K を含むものは chain mixing で $\#E > 0$。f^n は P.O.T.P. を持つから、corollary 18 より $h(f^n) > 0$。よって、$h(f) > 0$ で矛盾が生じる。よって K は一点から成る。 □

Th. 21. X が connected で f は homeo. とする。f の periodic point の集合が X で dense であり、$\#X > 1$ であれば $h(f) > 0$。

Proof. $\mathrm{Per}(f)$ を f の periodic point の集合とすると、$X = \overline{\mathrm{Per} f}$ となる。$R(f) \supset \mathrm{Per} f$ だから、$X = R(f)$。よって proposition 6 より X は chain transitive。よって theorem 16 より f は chain mixing、$\#X > 0$ だから corollary 18 より $h(f) > 0$。 □

(X, f) を homeo. とする。closed set $K \subset X$ が $f(K) = K$ を満た

すとする。Kを一点に同一視して得られる空間をX/Kとし、$\pi: X \to X/K$を natural projection とする。X/K上の metric d_Kを$x, y \in X$に対して$d_K(\pi(x), \pi(y)) = \min\{d(x,y), d(x,K)+d(y,K)\}$で定めることができる。$f_K: X/K \to X/K$を$f_K \circ \pi = \pi \circ f$となるように定める。このとき$f_K$は homeo. となる。

Th. 22. closed set $K \subset X$ が chain mixing とするとき、f が P.O.T.P. を持てば、f_K も P.O.T.P. を持つ。

まず次の lemma を示す。

Lemma 23. f が chain mixing とする。$\alpha > 0$ に対して$N \in \mathbb{N}$があって任意の$p, q \in X$及び$m \geq N$に対しpからqへの長さ$m+1$のα-chain がある。

Proof. $(p,q) \in X \times X$を任意に固定する。$N(p,q) \in \mathbb{N}$があって任意の$m \geq N(p,q)$に対し、pからqへの$\alpha/2$-chain $\{x_0, \cdots, x_m\}$がある。$0 < \delta < \frac{\alpha}{2}$を$d(x,y) < \delta$なら$d(f(x), f(y)) < \alpha/2$となるようにとる。$U_\delta(p) = \{x ; d(p,x) < \delta\}$とおくとき、$(p', q') \in U_\delta(p) \times U_\delta(q)$に対し、$\{p', x_1, \cdots, x_{m-1}, q'\}$は$\alpha$-chain である。$(p_1, q_1), \cdots, (p_m, q_m) \in X \times X$があって$X \times X = \bigcup_{i=1}^{m} U_\delta(p_i) \times U_\delta(q_i)$となる。$N = \max_{i=1,\cdots,m} N(p_i, q_i)$とおくと、これは条件を満たす。□

Th. 22. の proof. $\varepsilon > 0$を任意に固定する。$0 < \delta \leq \varepsilon$を$f$による任意の$\alpha$-p.o. が$\varepsilon$-trace されるようにとる。lemma 23 より、$n \in \mathbb{N}$があって任意の$x, y \in K$と$m \geq n$に対してxからyへの

$\delta/2$-chain $\{x_0, \cdots, x_m\} \subset K$がある。$0<\alpha<\delta/2$ を $d(x,K)<\alpha$ なら $x_0=x$ なる任意の α-p.o. $\{x_0, \cdots; x_m\}$ に対し $d(x_i,K)<\delta/2$ $(0 \leq {}^{\forall}i \leq m)$ が成り立つようにとる。$\{x'_a, \cdots, x'_\ell\} \subset X/K$ を f_K による α-p.o. とするとき、これがある $\pi(x)$ $(x \in X)$ によって 2ε-trace されることを示す。点列 $\{x_a, \cdots, x_\ell\} \subset X$ を $\pi(x_i)=x'_i$ となるようにとる。$d(x_i,K)<\alpha$ のとき $x_i, \cdots, x_{i+m-1}$ を記号 $*$ でおきかえて列 $\{\hat{x}_a, \cdots, \hat{x}_\ell\}$ を作る。もし $\hat{x}_{i-1} \neq *$, $\hat{x}_{i+k} \neq *$, $\hat{x}_{i+j}=*$ $0 \leq j<k$ なら $k \geq m$ となる。$\hat{x}_{i+k}=x_{i+k}$ で $d(x_{i+k},K)<\delta/2$ となることに注意する。このとき

$$d(f(x_{i-1}),K) < \begin{cases} \alpha & \text{if } d(x_i, f(x_{i-1})) \geq d(x_i,K)+d(f(x_{i-1}),K) \quad \text{---(i)} \\ 2\alpha & \text{if } d(x_i, f(x_{i-1})) < d(x_i,K)+d(f(x_{i-1}),K) \quad \text{---(ii)} \end{cases}$$

となることを示す。(i)のとき、$d_K(\pi(x_i), \pi(f(x_{i-1}))) = d(x_i,K) + d(f(x_{i-1}),K)$。よって $d(f(x_{i-1}),K) \leq d_K(\pi(x_i), \pi(f(x_{i-1}))) = d_K(x'_i, f_K(x'_{i-1})) < \alpha$。(ii)のとき $d_K(\pi(x_i), \pi(f(x_{i-1}))) = d(x_i, f(x_{i-1}))$、よって

$$\begin{aligned} d(f(x_{i-1}),K) &\leq d(f(x_{i-1}),x_i) + d(x_i,K) \\ &= d_K(\pi(x_i), \pi(f(x_{i-1}))) + d(x_i,K) \\ &= d_K(x'_i, f_K(x'_{i-1})) + d(x_i,K) < \alpha+\alpha = 2\alpha 。\end{aligned}$$

よって $d(f(x_{i-1}),p)<2\alpha$ なる $p \in K$ が存在する。また $d(x_{i+k},K) < \frac{\delta}{2}$ だから $d(x_{i+k},q)<\delta/2$ なる $q \in K$ がある。p から q への $\frac{\delta}{2}$-p.o. $\{y_i, \cdots, y_{i+k}\}$ を固定する。$\hat{x}_j$, $i \leq j < i+k$ を y_j でおきか

える。このとき、$d(f(\hat{x}_{i-1}), y_i) = d(f(x_{i-1}), p) < 2\alpha < \delta$。また

$$d(f(y_{i+k-1}), \hat{x}_{i+k}) \le d(f(y_{i+k-1}), y_{i+k}) + d(y_{i+k}, \hat{x}_{i+k})$$
$$< \frac{\delta}{2} + d(q, x_{i+k}) < \frac{\delta}{2} + \frac{\delta}{2} = \delta。$$

上のような全ての i について上の操作をしてできた列を、$\{\bar{x}_a, \cdots, \bar{x}_b\}$ とかくと、これは f による δ-p.o. になる。これを ε-trace する点を x とする。

$\pi(\bar{x}_j) \ne x'_j$ とする。このとき $\bar{x}_j \in K$ であり、よって $j = i+a$ $(0 \le i \le b-a)$ とすると、

$$\begin{aligned} d_K(f_K^i(\pi(x)), x'_{i+a}) &\le d_K(f_K^i(\pi(x)), \pi(\bar{x}_{i+a})) \\ &\quad + d_K(\pi(\bar{x}_{i+a}), x'_{i+a}) \\ &\le d(f^i(x), \bar{x}_{i+a}) + d(K, x_j) \\ &\le \varepsilon + \frac{\delta}{2} < 2\varepsilon。\end{aligned}$$

$\pi(\bar{x}_j) = x'_j$ とする。このとき $j = i+a$ とすると、

$$d_K(f_K^i(\pi(x)), x'_{i+a}) \le d(f^i(x), \bar{x}_{i+a}) \le \varepsilon。$$

よって $\{x'_a, \cdots, x'_b\}$ は $\pi(x)$ によって 2ε-trace される。 □

Cor. 24. M を compact Riemannian manifold, $g: M \circlearrowleft$ を Axiom A diffeo. とする g が P.O.T.P. を持てば g は no-cycle property を持つ。

Proof. $n \ge 1$ があって g^n の basic sets $X_1, \cdots, X_m$ は top. mixing になる。g^n が no-cycle property を持つことを示せばよい。各 X_i を一点 x_i に同一視して得られる空間を X とし、

$f: X \circlearrowleft$ を g^n から誘導される homeo. とする。f は P.O.T.P. を持つ。
各 x_i について $W^s(x_i) = \{y \in X ; f^n(y) \to x_i \quad n \to +\infty\}$

$$W^u(x_i) = \{y \in X ; f^{-n}(y) \to x_i \quad n \to +\infty\}$$

とおくと、g^n が cycle を持てば、$x_{i_0}, \cdots, x_{i_m} = x_{i_0}$ があって
$^\exists q_j \in W^u(x_{i_j}) \cap W^s(x_{i_{j+1}}) \neq \phi$ となる。$q_j \neq x_1, \cdots, x_m$ ととることができる。$q_0 \sim x_0$ で $f(x_0) = x_0$ だから、corollary 19 より $h(f) > 0$。一方 $\Omega(f) = \{x_0, \cdots, x_m\}$ だから $h(f) = h(f|\Omega(f)) = 0$。
これは矛盾。よって g^n は cycle を持たない。 □

REFERENCE

[1] L. Block and J.E. Franke, The chain recurrent set, attractors, and explosions, Ergod. Th. & Dynam. Sys. Vol.5, (1985), 321-327.

[2] M. Hurley, Consequence of topological stability, J. Differentiable Equations Vol.54, (1984), 60-72.

[3] C. Robinson, Stability theorems and hyperbolicity in dynamical systems, Rockey Mountain J. Math. Vol.7, (1977), 425-437.