数理解析研究所講究録
602巻 1986年 194-203

One-sided sofic system の同型問題について

九大理　藤原雅子
(Masako Fujiwara)

Sofic system は labeled graph から定まる。この時，その labeled graph を sofic system の cover と呼ぶ。W. Krieger は与えられた sofic system に対して，その canonical な cover を構成した。ここではその Krieger の cover を intrinsic に定義し，2つの one-sided sofic system が topologically conjugate となる為の必要十分な条件を与える。

§1. One-sided sofic system と labeled graphs.

S を有限集合とする。S の片側無限直積集合 $S^{\mathbb{N}}=\prod_{1}^{\infty}S$ の元 $x=(x_1, x_2, \cdots)$ を <u>path</u> と呼ぶ。$S^{\mathbb{N}}$ には S 上の離散位相の無限直積位相を与える。shift transformation $\sigma: S^{\mathbb{N}} \to S^{\mathbb{N}}$, $\sigma(x_1, x_2, \cdots) = (x_2, x_3, \cdots)$ を考える。

$S^{\mathbb{N}}$ の closed かつ shift invariant ($\sigma\Omega=\Omega$) な部分

集合Ωを one-sided subshift と言う。この時SをΩの state space と呼ぶ。

2つの one-sided subshift ΩとΩ'の間に各々の shift と可換な homeomorphism が存在する時，この2つは topologically conjugate であると言い，$\Omega \cong \Omega'$と書く。

(one-sided sofic system)

Sの有限列を word と呼び，Ωの各 path の中に現われる word の全体を$L(\Omega)$で表わす. 今 one-sided subshift ΩとΩの元$x = (x_1, x_2, \cdots)$に対して,

$$L(\Omega)_x = \{ \alpha \in L(\Omega) \ ; \ \alpha x \in \Omega \}$$

と置く。ここでαxとは，$\alpha = (a_1, a_2, \cdots, a_k)$のとき$\alpha x = (a_1, a_2, \cdots, a_k, x_1, x_2, \cdots)$を表わす。 更に$x, x' \in \Omega$について，$L(\Omega)_x = L(\Omega)_{x'}$のとき$x \sim x'$と書くと"$\sim$"は同値関係である。 xを含むこの同値類を$[x]$と書く。商空間$\Omega/\sim \ = \{ [x] \ ; \ x \in \Omega \}$が有限である時，$\Omega$を one-sided sofic system と言う。(B. Weiss [5])

(labeled graph)

W, V, Sを有限集合，$i : W \to V$，$t : W \to V$，$\lambda : W \to S$を各々 onto map とする。この時，$G = (W, V, i, t, S, \lambda)$を labeled graph と言い，$W, V, S$を各々 arc-set, vertex-set, label-set と呼ぶ。又 arc $w \in W$に

対し，$i(w)$ は arc w 始点，$t(w)$ は終点，$\lambda(w)$ は arc w に付けられた label を表わしている。

labeled graph $G=(W, V, i, t, S, \lambda)$ に対して，

$$\Omega(G)=\{(\lambda(w_i))_{i\in\mathbb{N}}\in S^{\mathbb{N}} \; ; \; w_i\in W,\ t(w_i)=i(w_{i+1})\ \forall i\in\mathbb{N}\}$$

と書くと，$\Omega(G)$ は $S^{\mathbb{N}}$ の closed かつ σ-invariant な部分集合である。更に，$\Omega(G)$ は sofic system であることも容易に解る。この $\Omega(G)$ を labeled graph G から定まる <u>one-sided sofic system</u> と呼ぶ。

各 vertex $v\in V$ に対して，

$$L_v(G)=\bigcup_{k=1}^{\infty}\{(\lambda(w_1),\cdots,\lambda(w_k))\in S^k \; ; \; w_i\in W,\ t(w_i)=i(w_{i+1}),\ 1\le i\le k-1,\ t(w_k)=v\}$$

と置く。

<u>Definition 1-1</u> (left Krieger graph)

labeled graph $G=(W, V, i, t, S, \lambda)$ が次の条件 i) ~ iii) を満たす時，<u>left Krieger graph</u> と呼ぶ。

i) (left-resolving) $w, w'\in W$ に対し，$t(w)=t(w')$ かつ，$\lambda(w)=\lambda(w')$ ならば $w=w'$。

ii) (left-reduced) $v, v'\in V$ に対し，$v\neq v'$ ならば $L_v(G)\neq L_{v'}(G)$。

iii) (left-sufficient)　各 path $x \in \Omega(G)$ に対し、$L(\Omega(G))_x = L_v(G)$ なる vertex v が存在し、逆に各 $v \in V$ に対し、$L_v(G) = L(\Omega(G))_x$ なる $x \in \Omega(G)$ が存在する。

W. Krieger [3] は与えられた sofic system に対して、ある canonical な graph を構成した。M. Nasu [4] はその Krieger の graph を finite automaton の言葉で特徴付けた。ここでは、Krieger の作った graph が上の意味での Krieger graph であることと、更にその一意性をこの定義を用いて証明できる。

<u>Theorem 1-2.</u>　任意の one-sided sofic system Ω に対して $\Omega(G) = \Omega$ なる left Krieger graph が一意的に存在する。

one-sided sofic system Ω に対して、$\Omega(G) = \Omega$ なる left Krieger graph G を Ω の <u>Krieger cover</u> と呼ぶ。

§2.　Structure matrix system と main theorem.

φ を有限集合 S から有限集合 S' への onto map とする。one-sided subshift $\Omega \subset S^{\mathbb{N}}$ に対し、

$$\Omega^{\varphi} = \{ (x_i, \varphi(x_{i+1}))_{i\in N} \in (S\times S')^{N} ;\ (x_i)_{i\in N} \in \Omega \}$$

と置くとΩ^{φ}もまsubshiftとなる。2つのone-sided subshift ΩとΩ'に対して，写像φが存在して$\Omega' = \Omega^{\varphi}$となる時$\Omega \uparrow \Omega'$と書く。この時明らかに$\Phi(x_i)_{i\in N} = (x_i, \varphi(x_{i+1}))_{i\in N}$により$\Omega$と$\Omega'$はtopologically conjugateである。

$G = (W, V, i, t, S, \lambda)$をlabeled graph，$\varphi : S \to S'$をonto mapとする。$w_1, w_2 \in W$に対して，$i(w_1) = i(w_2)$かつ$\varphi(\lambda(w_1)) = \varphi(\lambda(w_2))$の時，$w_1 \sim w_2$と書くと，"$\sim$"はequivalence relationとなる。wを含むequivalence classを$[w]$で表わす。この時，labeled graph $G^{\varphi} = (W^{\varphi}, V^{\varphi}, i^{\varphi}, t^{\varphi}, S^{\varphi}, \lambda^{\varphi})$を次のように構成する。

$$W^{\varphi} = \{ (w_1, [w_2]) ;\ w_1, w_2 \in W,\ t(w_1) = i(w_2) \},$$

$$V^{\varphi} = \{ [w] ;\ w \in W \},$$

$$i^{\varphi}(w_1, [w_2]) = [w_1],$$

$$t^{\varphi}(w_1, [w_2]) = [w_2],$$

$$\lambda^{\varphi}(w_1, [w_2]) = (\lambda(w_1), \varphi(\lambda(w_2))) \quad \text{for } (w_1, [w_2]) \in W^{\varphi},$$

$$S^{\varphi} = \lambda^{\varphi}(W^{\varphi}) \subset S \times S'.$$

labeled graph GとG'に対して，$G' = G^{\varphi}$となるmap φが存在するとき，$G \uparrow G'$と書く。

<u>Lemma 2-1</u> (M. Nasu [4])

$G=(W, V, i, t, S, \lambda)$ を labeled graph, $\varphi : S \to S'$ を onto map とする。G が left Krieger graph であれば, G^{φ} も left Krieger graph である。

<u>Corollary</u> 2-2

Ω と Ω' を sofic system, G_{Ω}, $G_{\Omega'}$ を各々 left Krieger graph とする。この時, $\Omega \uparrow \Omega'$ ならば, $G_{\Omega} \uparrow G_{\Omega'}$ が成り立つ。

(Structure matrix system)

S を有限集合とする。$n \times m$ 0-1 行列から成る有限集合 M 上へ S からの onto map が存在するとき, M を <u>structure matrix system</u> と呼ぶ。このとき, $M=(M(a)\,;\, a \in S)$ と書く。$M=(M(a)\,;\, a \in S)$, $M'=(M'(a')\,;\, a' \in S')$ を各々 $n \times m$, $m \times \ell$ matrix system とする。各 $a \in S$, $a' \in S'$ に対し,

$$MM'(a, a')(i, j) = \begin{cases} 1 & M(a)M'(a')(i, j) > 0 \text{ のとき,} \\ 0 & M(a)M'(a')(i, j) = 0 \text{ のとき,} \end{cases}$$

として、

$$MM' = (MM'(a,a')\ ;\ a \in S,\ a' \in S',\ MM'(a,a') \neq 0$$

と置くと、MM' は $n \times l$ matrix system となる。

$G = (W, V, i, t, S, \lambda)$ を labeled graph とする。label $a \in S$ に対し、$|V| \times |V|$ 0-1 matrix $M_G(a)$ を次で定義する。

$$M_G(a)\ (v, v') = \begin{cases} 1 & i(w) = v,\ t(w) = v',\ \lambda(w) = a \text{ なる } w \in W \text{ が存在するとき,} \\ 0 & \text{それ以外のとき。} \end{cases}$$

このとき、$|V| \times |V|$ matrix system $M_G = (M_G(a)\ ;\ a \in S)$ を G の <u>structure matrix system</u> と呼ぶ。

逆に任意の正方 matrix system $M = (M(a)\ ;\ a \in S)$ に対して、これを structure matrix system とする labeled graph が一つ定まる。これを G_M と書く。

2つの $n \times n$ matrix system $M = (M(a)\ ;\ a \in S)$ と $M' = (M'(a')\ ;\ a' \in S')$ について、bijection $\varphi : S \to S'$ と $n \times n$ permutation matrix P が存在して、$M'(\varphi(a)) = {}^tP\, M(a)\, P \quad (\forall a \in S)$ が成り立つとき、$M \sim M'$ と書く。

明らかに labeled graph G, G' が labelling の差を除いて一致することと、$M_G \sim M_{G'}$ であることは同等である。

left Krieger graph の structure matrix system を Krieger matrix system と呼ぶ。

G を labeled graph，$M_G = (M_G(a)\ ;\ a \in S)$ をその structure matrix system とすると，

$$\Omega(G) = \{ (a_i)_{i \in \mathbb{N}}\ ;\ M_G(a_1) \cdot M_G(a_2) \cdot \cdots \cdot M_G(a_n) \neq 0 \quad \forall n \geqq 1 \}$$

を得る。

各列に唯一つ 1 が存在し，trivial な行を持たない 0-1 行列を amalgamation matrix と呼ぶ。

Definition 2-3 (amalgamation)

matrix system M と M' に対して，次の i)〜iii) を満たす matrix system $N = (N(n)\ ;\ n \in \mathcal{S})$ と $A = (A(a)\ ;\ a \in S')$ が存在するとき，M を M' の amalgamation と呼ぶ。

i) $\sum_{a \in S'} A(a)$: amalgamation matrix,

ii) 各 $n \in \mathcal{S}$ に対し，$A(a) \cdot N(n) \neq 0$ なる $a \in \mathcal{S}'$ が唯一つ存在する。

iii) $M \sim AN$ かつ $M' \sim NA$.

このとき $M \uparrow M'$ と書く。

Proposition 2-4

$G \uparrow G'$ ならば $M_G \uparrow M_{G'}$.

Proposition 2-5

$M \uparrow M'$ ならば, $\Omega(G_M) \cong \Omega(G_{M'})$.

以上より次の定理が導かれる。

Theorem 2-6

2つの片側 sofic system Ω と Ω' が互いに topologically conjugate である為の必要十分条件は Krieger matrix system の有限列 : $M_1 = M_G, M_2, \cdots, M_n = M_{G'}$ が存在して, $M_i \uparrow M_{i+1}$ 又は $M_{i+1} \uparrow M_i$ $(1 \leq i \leq n-1)$ が成り立つことである.

特に sofic system が transitive である場合には Theorem 2-6 の statement は left Krieger graph の代りに left Fischer graph を考えても成立する.

(References)

[1] R. Fischer. Graphs and symbolic dynamics, Colloq. Math. Soc. Janos Bolyai 16, Topics in Information Theory, Keszthely, Hungary, (1975) 229-244.

[2] T. Hamachi and M. Nasu. Topological conjugacy for 1-block maps of subshifts and sofic preprint.

[3] W. Krieger. On sofic systems I, Israel J. of Math. 48 (1984) 305-330.

[4] M. Nasu. Topological conjugacy for sofic systems, preprint.

[5] B. Weiss. Subshift of finite type and sofic systems, Monat. Math. 77 (1973) 462-474.

[6] R. F. Williams. Classification of subshift of finite type, Ann. of Math. 98 (1973) 120-153; Errata: Ann. of Math. 99 (1974) 380-381.