

球面上の非コンパクト変換群を構成する一つの方法について

山形大理 内田伏一 (Fuichi Uchida)

§0 序

行列 $M \in M_n(\mathbb{R})$ について, 次の条件を考えよう。

$$(T) \quad \frac{d}{dt} \|\exp(tM)x\| > 0 \quad \forall t \in \mathbb{R} \quad \forall x \in \mathbb{R}_0^n = \mathbb{R}^n - \{0\}$$

この条件は, 行列 M が定める一径数群 $\exp(tM)$ による, 各点 $x \in \mathbb{R}_0^n$ の軌道が原点を中心とする $n-1$ 次元同心球面のすべてと外向きに transversal に交わることを意味している。

行列 $M = (m_{ij})$ が条件 (T) を満足することと二次形式 $\sum_{i,j} m_{ij} x_i x_j$ が正定値であることは同等であることが分かる。

条件 (T) を満足する行列 M に対して, 関数

$$t \mapsto \|\exp(tM)x\| \quad (x \in \mathbb{R}_0^n)$$

は C^∞ 級の狭義単調増加関数であり, さらに

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \|\exp(tM)x\| = +\infty, \quad \lim_{t \rightarrow -\infty} \|\exp(tM)x\| = 0 \quad \dots (1)$$

が成り立つ。従って、 C^ω 級の関数

$$\tau: \mathbb{R}_0^n \rightarrow \mathbb{R}, \quad \|\exp(\tau(x)M)x\| = 1$$

が一意的に定まる。さらに、 C^ω 級の写像 $\pi^M: \mathbb{R}_0^n \rightarrow S^{n-1}$ が

$$\pi^M(x) = \exp(\tau(x)M)x$$

によって定義できる。とくに、 $\pi^M|_{S^{n-1}} = id$ である。

次に、リー群 G の表現 $\rho: G \rightarrow GL(n, \mathbb{R})$ と行列 $M \in M_n(\mathbb{R})$ の対 (ρ, M) について、次の条件を考えよう。

- (i) M は条件 (T) を満足する。
- (ii) $M \cdot \rho(g) = \rho(g) \cdot M, \forall g \in G$.

この2つの条件を満足する対 (ρ, M) を次数 n の TC-対と呼ぶことにしよう。このような (ρ, M) に対して、 C^ω 級の写像

$$\xi: G \times S^{n-1} \rightarrow S^{n-1}$$

が、 $\xi(g, x) = \pi^M(\rho(g)x)$ によって定義され、球面 S^{n-1} 上のリー群 G の作用であることが分かる。この作用 ξ を、表現 ρ に付随し M より *twist* された、twisted linear action と呼ぶことにしよう。とくに $M = I_n$ である場合、 ξ を表現 ρ に付随した linear action と呼ぶ。

注. 表現 ρ が直交行列表現、すなわち $\rho(G) \subset O(n)$, ならば、 ρ に付随した twisted linear action はすべて ρ に付随した linear action に一致する。

§1 条件(T) について

行列 $M \in M_n(\mathbb{R})$ が条件(T) を満足しているものとする。

$f(t; x) = \|\exp(tM)x\|$ とおき, t についての導関数を考えれば, 対応 $(t, x) \mapsto f'(t; x)$ は $\mathbb{R} \times \mathbb{R}_0^n$ 上で定義された正值連続関数である. コンパクト集合 $0 \times S^{n-1}$ の上でとる値の最小値を ε とする. この場合

$$f'(0; x) \geq \varepsilon > 0 \quad \forall x \in S^{n-1}$$

が成り立つ. さらに, $\forall (t, x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_0^n$ に対して

$$\begin{aligned} f'(t; x) &= f'(0; \exp(tM)x) \\ &= \|\exp(tM)x\| \cdot f'(0; \|\exp(tM)x\|^{-1} \exp(tM)x) \\ &\geq \varepsilon \cdot \|\exp(tM)x\| = \varepsilon \cdot f(t; x) \end{aligned}$$

が成り立ち,

$$\frac{d}{dt} \log f(t; x) \geq \varepsilon \quad \forall (t, x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_0^n$$

となる. $t > 0$ の場合と, $t < 0$ の場合に分けて, この不等式の両辺を積分すると, 次の不等式を得る.

$$f(t; x) \geq \|x\| e^{\varepsilon t} \quad (t > 0), \quad f(t; x) \leq \|x\| e^{\varepsilon t} \quad (t < 0).$$

故に, §0 の(1)を満足することが分かる.

行列 $M \in M_n(\mathbb{R})$ について, $\frac{d}{dt} \|\exp(tM)x\|^2$ を考察して

$$\exp(tM)x \cdot M \exp(tM)x = \|\exp(tM)x\| \cdot \frac{d}{dt} \|\exp(tM)x\|$$

を得るので, $M = (m_{ij})$ が条件(T)を満足することと2次形式

$\sum_{i,j} m_{ij} x_i x_j$ が正定値であることとは同等であることが分かる。

$n=2$ の場合, 次の行列はいずれも条件 (T) を満足している。

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & x \end{pmatrix}: 0 < x \leq 1, \begin{pmatrix} 1 & y \\ -y & 1 \end{pmatrix}: y > 0.$$

§2 TC-対の同値関係について

リー群 G を一つ固定しておく。次数 n の TC-対 (ρ, M) , (σ, N) について, $A \in GL(n, \mathbb{R})$ と $c > 0$ が存在して

$$A\rho(g) = \sigma(g)A \quad (\forall g \in G), \quad AM = cNA$$

が成り立つ場合, (ρ, M) と (σ, N) は同値であると定義する。

TC-対 (ρ, M) が定める *twisted linear action* を $\xi_{(\rho, M)}$ で表わそう。ここで, 次数 n の TC-対 (ρ, M) と (σ, N) が同値であれば, 2つの G 多様体 $(S^{n-1}, \xi_{(\rho, M)})$ と $(S^{n-1}, \xi_{(\sigma, N)})$ の間には equivariant analytic diffeomorphism が存在することを示そう。

任意の $c > 0$ に対して, $\xi_{(\sigma, cN)} = \xi_{(\sigma, N)}$ が成り立つので, $A \in GL(n, \mathbb{R})$ が存在して

$$A\rho(g) = \sigma(g)A \quad (\forall g \in G), \quad AM = NA$$

が成り立つものと仮定できる。この場合, S^{n-1} から自分自身への2つの C^∞ 級の写像 k_A, k_A を

$$k_A(x) = \pi^N(Ax), \quad k_A(y) = \pi^M(A^{-1}y)$$

によって定義する。行列 $A \in K$ に対する仮定によって、 h_A と h_A^{-1} とは互いに他の逆写像であることが分かり、さらに

$$h_A(\xi_{(p,M)}(g,x)) = \xi_{(q,N)}(g, h_A(x)) \quad (g \in G, x \in S^{n-1})$$

が成り立つことが示される。従って、 h_A は $(S^{n-1}, \xi_{(p,M)})$ から $(S^{n-1}, \xi_{(q,N)})$ への *equivariant analytic diffeomorphism* である。

§3 典型的な例について

$G = SL(n, \mathbb{R})$ とする。 $\rho_n: G \rightarrow GL(n, \mathbb{R})$ を自然な表現とし、 $\rho = \rho_n \otimes I_r = \overbrace{\rho_n \oplus \dots \oplus \rho_n}^r$ とおく。 ρ に付随した *twisted linear actions* について考察しよう。 $M \in M_r(\mathbb{R})$ が条件 (T) を満足すれば、対 $(\rho, I_n \otimes M)$ は TC-対になる。

この TC-対が定義する *twisted linear action* を ξ_M で表わそう。条件 (T) を満足する行列 $M, N \in M_r(\mathbb{R})$ について、 $n \geq r+1$ の場合、2つの G 多様体 (S^{nr-1}, ξ_M) と (S^{nr-1}, ξ_N) の間 K *equivariant homeomorphism* が存在すれば、 $A \in GL(r, \mathbb{R})$ と $c > 0$ が存在して、 $AM = cNA$ が成り立つことを示そう。

$n \geq r+1$ の場合、 \mathbb{R}^n の一次独立なベクトル u_1, \dots, u_r に対して、行列 $P \in SL(n, \mathbb{R})$ で $Pe_i = \sqrt{r} u_i$ ($i=1, \dots, r$) を満足するものが常に存在するので、 G 多様体 (S^{nr-1}, ξ_M) において $\frac{1}{\sqrt{r}}(e_1 \oplus \dots \oplus e_r)$ を通る G 軌道は S^{nr-1} の中で稠密な開集合であることが分かる。 $\frac{1}{\sqrt{r}}(e_1 \oplus \dots \oplus e_r)$ における ξ_M に関する

isotropy 群を $I^n(M)$ で表わそう。 ξ_M の定義に戻って計算すると

$$\left(\begin{array}{c|c} {}^t \exp(\theta M) & \overbrace{*}^{\overbrace{n-r}} \\ \hline 0 & * \end{array} \right) \quad \exists \theta \in \mathbb{R}$$

の形をした $SL(n, \mathbb{R})$ の元の全体が $I^n(M)$ になることが分かる。さて、 G 多様体 (S^{n-1}, ξ_M) から (S^{n-1}, ξ_N) への *equivariant homeomorphism* が存在すれば、稠密な開集合の像はやはり稠密な開集合であるから、 $\frac{1}{\sqrt{r}}(e_1 \oplus \dots \oplus e_r)$ の像は $\frac{1}{\sqrt{r}}(e_1 \oplus \dots \oplus e_r)$ を通る G 軌道に属することになり、行列 $P \in SL(n, \mathbb{R})$ で

$$P \cdot I^n(M) \cdot P^{-1} = I^n(N)$$

となるものが存在することが分かる。一方、 \mathbb{R}^n 上の $I^n(M)$ の自然な作用に関して不変な r 次元部分空間は e_1, \dots, e_r によって生成される部分空間のみであることが、群 $I^n(M)$ に属する行列の形から分かるので、行列 P は

$$P = \left(\begin{array}{c|c} P_i & \overbrace{*}^{\overbrace{n-r}} \\ \hline 0 & * \end{array} \right)$$

の形になることが分かる。従って、 $\forall \theta \in \mathbb{R}$ に対して

$$P_i \cdot {}^t \exp(\theta M) \cdot P_i^{-1} = {}^t \exp(\theta' N)$$

を満足する $\theta' \in \mathbb{R}$ が定まり、 M, N が条件 (T) を満足するので $c > 0$ が存在して $\theta' = c\theta$ となることが分かる。故に

$${}^t P_i^{-1} \cdot M \cdot {}^t P_i = c \cdot N$$

となる。

とく K , $r=2$, $n \geq 3$ の場合には, §1 末 K 挙げた行列 K に対応する *twisted linear actions* について, 異なる行列 K に対応する二つの *twisted linear actions* の間には *equivariant homeomorphism* が存在しないことが分かる。

$n \leq r$ の場合については研究中である。

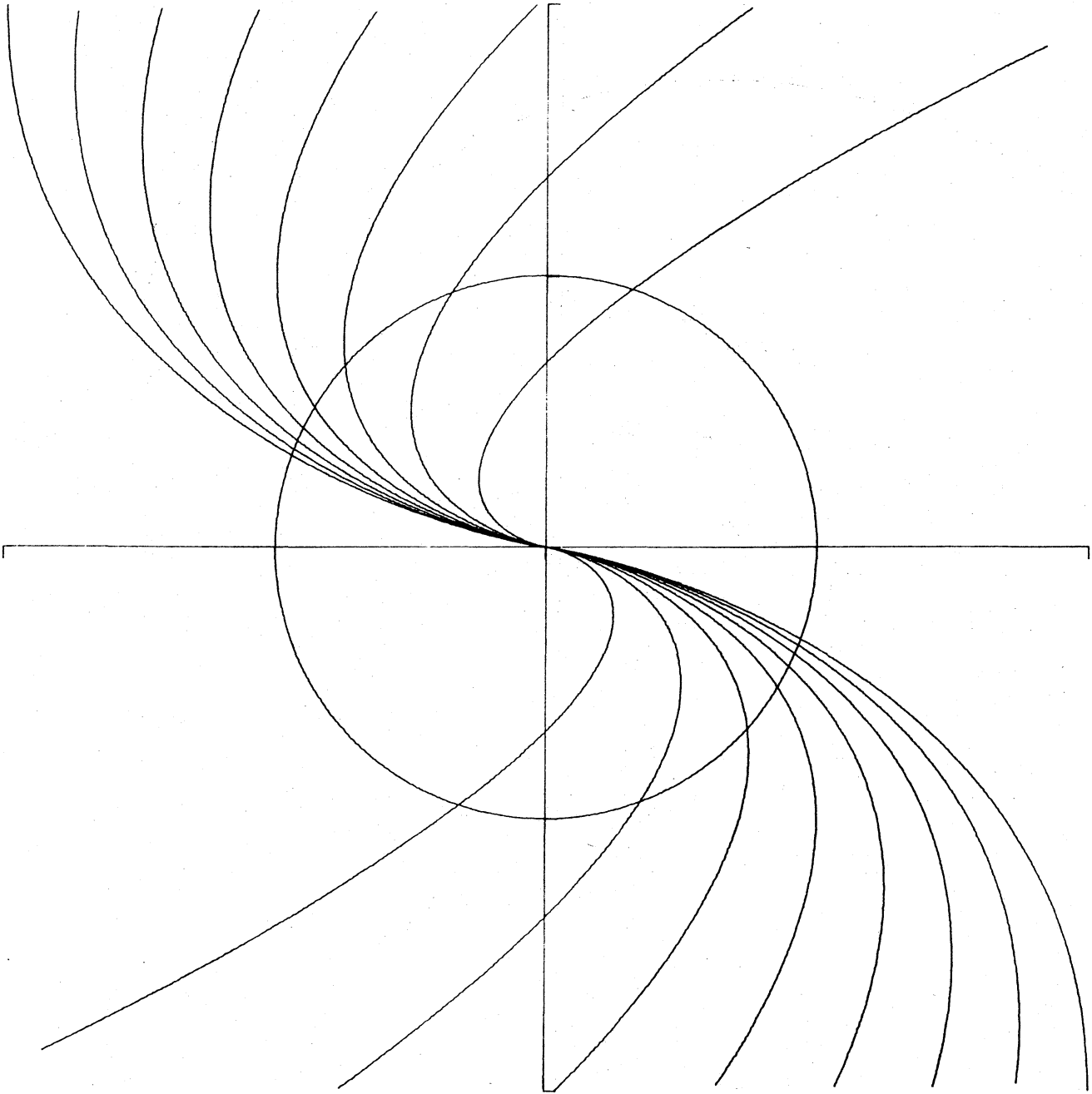
注. G がコンパクトリイ群である場合には, G の任意の行列表現 ρ K に対して, ρ K 付随した *twisted linear action* はすべて ρ K 付随した *linear action* と *equivariant analytic* K *diffeomorphic* であることが証明できる。

参考まで K , $n=2$ の場合について, 条件 (T) を満足する行列が定める一径数群の軌道の様子を二つの行列 $\begin{pmatrix} 1 & \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$ の場合を図示しておこう。

$$X = K \cdot \text{EXP}(T) \cdot (T - 1)$$

$$Y = K \cdot \text{EXP}(T)$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$



142

L= 3.00

X= K*EXP(T)*COS(L*T)

Y= K*EXP(T)*SIN(L*T)

$$\begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$$

