数理解析研究所講究録
605巻 1987年 116-133

或る写像の拡張可能性

東工大 理学部 笹尾 靖也 (Seiya. Sasao)

$p: X \longrightarrow S^n$ を構造群が G の A-バンドルとして，ξ をその特性写像：$(S^n, *) \longrightarrow (G, e_0)$，更に G の A への作用を $\varphi: (G, e_0) \longrightarrow (A^A, 1_A)$ とする。連続写像 $f: A \to Y$ が与えられたときに f を連続写像：$X \longrightarrow Y$ に拡張する際の障害はなにかを考えようとするのが本稿の目標である。まず；X の構成に関する次の補題から始めよう。

補題 1. $X = A \cup D^n \times A$，ここで $S^{n-1} \times A$ の点 (v, a) と A の点 $\varphi(\xi(v))(a)$，以後 $\xi(v) \cdot a$ と略記，とは同一視されるものとする。

この補題は James-Whitehead の結果 $(A = S^m)$ の一般化になっている。

注 1. 射影 $p: X \longrightarrow S^n$ は，補題 1 に関して，次のように説明される。

$$X \longrightarrow X/A = D^n \times A / S^{n-1} \times A \longrightarrow S^n \times A / * \times A \longrightarrow S^n .$$

<u>補題2.</u> 次の図式はファイバー空間の<u>Pull-back</u>である。

図1

$$\begin{tikzcd} Y^X \arrow[r, "i^*"] \arrow[d, "r_1"] & Y^{D^n \times A} = Z^{D^n} \arrow[d, "r_2"] \arrow[d, shift left=12ex, "r_0"] \\ Z = Y^A \arrow[r, "\xi^*"] & Y^{S^{n-1} \times A} = Z^{S^{n-1}} \end{tikzcd}$$

図中で r_i は写像の定義域を制限することで得られるファイバー空間で、i^* は挿入写像 $i : D^n \times A \longrightarrow X$ から誘導され、ξ^* は $\xi^*(h)(v, a) = h(\xi(v) \cdot a)$ と定められている。

さて、写像 $f : A \longrightarrow Y$ が写像 $\tilde{f} : X \longrightarrow Y$ に拡張できることは、$r_1(\tilde{f}) = f$ が成り立つことであるが、このような $\tilde{f}$ が存在する必要十分条件は、補題2によれば、$\xi^*(f)$ が r_2-像に含まれることである。更に次の補題が成り立つ。

<u>補題3.</u> 写像 $f : A \longrightarrow Y$ が写像 : $X \longrightarrow Y$ に拡張できる必要十分条件は、

$$\underline{f^*_*(\varphi_*(\xi)) = 0} \quad (\in \pi_{n-1}(Y^A, f))$$

である。

なぜならば、$\xi^*(f)(v)(a) = f(\xi(v) \cdot a)$ だから、

$$\xi^*(f) : (S^{n-1}, *) \longrightarrow (Z, f) = (Y^A, f)$$

と考えられる。これが r_0-像に含まれることは、$\pi_1(Z, f)$ の $\pi_{n-1}(Z, f)$ への作用におけるゼロ元の orbit に含まれることを意味している。つまり、$\pi_{n-1}(Z, f)$ の元として

ゼロ元である。 補題3は次の図式で考えると見易い。

<u>図2.</u>

$$
\begin{tikzcd}
\pi_{n-1}(G_0, e_0) \arrow[r, "\varphi_{*,0}"] \arrow[d] & \pi_{n-1}(A_0^A, 1_A) \arrow[r, "f^*_{*,0}"] \arrow[d] & \pi_{n-1}(Y_0^A, f) \arrow[d] \\
\pi_{n-1}(G, e_0) \arrow[r, "\varphi_*"] \arrow[dr] & \pi_{n-1}(A^A, 1_A) \arrow[r, "f^*_*"] \arrow[d, "\omega_*"] & \pi_{n-1}(Y^A, f) \arrow[d, "\omega_*"] \\
\xi \arrow[u, phantom, "\rotatebox{90}{$\in$}"] & \pi_{n-1}(A, a_0) \arrow[r, "f_*"] & \pi_{n-1}(Y, y_0)
\end{tikzcd}
$$

ここで、A_0^A, Y_0^A, G_0は基点を保つ写像でつくられる空間で、$y_0 = f(a_0)$, ωはいわゆる*evaluation map*によるものである。

注2. $\varphi_*(\xi)$はバンドルの<u>ファイバー・ホモトピー特性類</u>であり、$\omega_*\varphi_*(\xi) = 0$ はバンドルが横断面をもつことと同値である。猶、$\varphi_{*,0}$はJ-*homomorphism*であることを注意しておく。

ところで、補題3によれば、われわれの目標の障害は、群$\pi_{n-1}(Y^A, f)$の元として得られたが、この群はfに関係しているので、この点を改良する必要があると思われる。しかしながら、一般的にはこれをゆうような良い手段は知られていない。そこで、応分の仮定や条件が必要となるだろう。

<u>仮定. Yは*group*で、y_0をその単位元とし、写像 $f: A \to Y$ は$f(a_0) = y_0$を満すものとする。</u>

写像 $\psi_f : (Y^A, f) \longrightarrow (Y^A, *)$ を

$$\psi_f(h)(a) = h(a)f(a)^{-1}$$

と定めよう。ψ_f は同相写像だから，同型写像：

$$\psi_{f*} : \pi_{n-1}(Y^A, f) \longrightarrow \pi_{n-1}(Y^A, *)$$

を誘導する。このとき次の可換図を考えよう。

図3.

$②(h)(a) = h(a)h(a_0)^{-1}$，

$①(y)(a) = y$，

$$\begin{tikzcd}
 & \pi_{n-1}(Y_0^A, *) \arrow[d] \\
\pi_{n-1}(Y^A, f) \arrow[r, "\psi_{f*}", "\approx"'] \arrow[d, "\omega_*"] & \pi_{n-1}(Y^A, *) \arrow[d, "\omega_*"] \arrow[u, bend right, "②_*"'] \\
\pi_{n-1}(Y, y_0) \arrow[r, "id"] & \pi_{n-1}(Y, y_0) \arrow[u, bend right, "①_*"']
\end{tikzcd}$$

写像 ①と②の存在は次の補題を保証している。

補題4. $\pi_{n-1}(Y^A, *) \approx \pi_{n-1}(Y, y_0) \oplus [S^{n-1}\wedge A, Y]$。

したがって，われわれにとっての問題は $\psi_{f*}(f_*^*(\varphi_*(\xi)))$ に上記の直和分解を適用して，その直和因子を求めることになる。図2，図3の示すところによれば，第1直和因子は

$$f_*(\lambda_\xi^A) \quad (\lambda_\xi^A = \omega_*\varphi_*(\xi) = \text{横断面の障害})$$

である。第2直和因子を記述するためには少しく準備を要する。以下，一般論を展開する。(H, h_0) を位相群とする。写像 $h : (A, a_0) \longrightarrow (H, h_0)$ に対して写像 $O(h)$ を

$$O(h)(g, a) = h(g\cdot a)h(a)^{-1}h(ga_0)^{-1}$$

と定めれば，$O(h)$ は写像 $G\times A \longrightarrow H$ を与える。この

写像は座標軸 $G\vee A$ の上で定値だから，写像：

$$G\times A/G\vee A=\underline{G\wedge A \longrightarrow H}$$

を定める。さきと同じ記号を使えば，$O(h)$ が h に関してホモトピー不変だから，結局ひとつの対応：

$$\underline{O}:[A,H]_0 \longrightarrow [G\wedge A,H]_0$$

が得られる。この対応は，写像 $h:A\longrightarrow H$ の"準同型性"の障害を与えていると考えられる。実際，A が群ならば，$\underline{O}(h)=0$ は h がホモトピー準同型であることを示している。この対応の性質を 1，2 述べておこう。

<u>補題5.</u> $\rho:H\longrightarrow K$ が準同型ならば，

$$\rho_*(O(h))=O(\rho_*(h))$$

，つまり次の図式は可換である。（$\underline{O}$ の *naturality*）

$$\begin{array}{ccc}
[A,H]_0 & \xrightarrow[\underline{O}]{} & [G\wedge A,H]_0\\
\downarrow{\scriptstyle \rho_*} & & \downarrow{\scriptstyle \rho_*}\\
[A,K]_0 & \xrightarrow[\underline{O}]{} & [G\wedge A,K]_0
\end{array}$$

<u>補題6.</u> $\alpha:(B,b_0)\longrightarrow(A,a_0)$ で，B が G－空間で α が G－同変写像ならば $\underline{O}\cdot\alpha^*=\alpha^*\cdot\underline{O}$ である。

つまり，

$$\begin{array}{ccc}
[A,H]_0 & \xrightarrow[\underline{O}]{} & [G\wedge A,H]_0\\
\downarrow{\scriptstyle \alpha^*} & & \downarrow{\scriptstyle \alpha^*}\\
[B,H]_0 & \xrightarrow[\underline{O}]{} & [G\wedge B,H]_0
\end{array}$$

は可換である。

一般に，Hが群ならば自然に，ホモトピー集合 $[\ ,H]_0$ に群の構造が入るわけであるが，この群構造については，対応 O は準同型になっていない。この点については次の補題7が成り立つ。まず，Commutator map を

$$c : H \wedge H \longrightarrow H, \quad c(x \wedge y) = xyx^{-1}y^{-1}$$

で定める。

補題7. $f_1, f_2 : (A, a_0) \longrightarrow (H, h_0)$, $f(a) = f_1(a) \cdot f_2(a)$ とする。このとき，次の等式が成り立つ。

$$O(f)(g \wedge a) = O(f_1)(g \wedge a) \cdot c(f_1(ga_0) \cdot f_1(a) \wedge O(f_2)(g \wedge a)) \cdot$$
$$O(f_2)(g \wedge a) \cdot c(f_1(ga_0) \wedge c(f_1(a) \wedge f_2(ga_0))) \cdot c(f_1(a) \wedge f_2(ga_0)).$$

なぜならば

$$O(f)(g \wedge a) = f_1(g \cdot a) f_2(g \cdot a) f_2(a)^{-1} f_1(a)^{-1} f_2(ga_0)^{-1} f_1(ga_0)^{-1}$$
$$= \underline{f_1(g \cdot a) f_1(a)^{-1} f_1(ga_0)^{-1}} \cdot \underline{f_1(ga_0) f_1(a)} \, \underline{f_2(g \cdot a) f_2(a)^{-1} f_2(ga_0)^{-1}} \cdot$$
$$\cdot f_2(ga_0) f_1(a)^{-1} f_2(ga_0)^{-1} f_1(ga_0)^{-1}$$
$$= O(f_1)(g \wedge a) \cdot c(f_1(ga_0) \cdot f_1(a) \wedge O(f_2)(g \wedge a)) \cdot O(f_2)(g \wedge a) \cdot$$
$$f_1(ga_0) \cdot \underline{f_1(a) \cdot f_2(ga_0) f_1(a)^{-1} f_2(ga_0)^{-1}} f_1(ga_0)^{-1}$$
$$= O(f_1)(g \wedge a) \cdot c(f_1(ga_0) \cdot f_1(a) \wedge O(f_2)(g \wedge a)) \cdot O(f_2)(g \wedge a) \cdot$$
$$c(f_1(ga_0) \wedge c(f_1(a) \wedge f_2(ga_0))) \cdot c(f_1(a) \wedge f_2(ga_0))$$

例1　$A = G = H = S^3$; 普通の群構造,

$$h_m : S^3 \longrightarrow S^3, \quad h_m(x) = x^m \quad \text{(Power map)}$$

このとき，$\underline{O(h_m) = \{-m(m-1)/2\}\tau} \in \pi_6(S^3) \cong \mathbb{Z}_{12}$.

なぜならば $f_1(x)=x^{m-1}$, $f_2(x)=x$ とおいて補題7を適用する。すると，

1. $\underline{O}(f_2)=1$
2. $C(f_1\cdot f_1\wedge o(f_2))=1$ $\Big\}$ 自明
3. $C(f_1(a)\wedge f_2(ga_0))=-(m-1)\tau$
4. $C(f_1(ga_0)\wedge C(f_1(a)\wedge f_2(ga_0)))=1$

がわかるから $\underline{O(h_m)=O(h_{m-1})-(m-1)\tau}$，ゆえに

$$\underline{O}(h_m)=\{-m(m-1)/2\}\tau$$

ここで $\underline{\tau: S^6\longrightarrow S^3}$ は $\underline{\text{Bloker-Massey}}$ 写像である。

3.
$$\begin{tikzcd}
S^3\wedge S^3 \arrow[r, "f_1\wedge f_2"'] \arrow[d, equal] & S^3\wedge S^3 \arrow[r, "C=\cancel{\infty}\tau"'] \arrow[d, equal] & S^3 \\
S^6 \arrow[r, "\deg.\, m-1"'] & S^6 &
\end{tikzcd}$$

4.
$$\begin{tikzcd}
S^3\wedge S^3 \arrow[d, "d\wedge 1"', "\simeq 0"] \arrow[dr] & & \\
S^3\wedge(S^3\wedge S^3) \arrow[r, "f_1\wedge C(f_1\wedge f_2)"'] & S^3\wedge S^3 \arrow[r, "C=\tau"] & S^3
\end{tikzcd}$$

注3. $\underline{\text{C.A. MCGIBON}}$ は一般の G で，$h_m: G\to G$ が準同型になる必要十分条件は，適当な自然数 N_G が存在して

$$m(m-1)/2\equiv 0 \mod N_G$$

が成り立つことを示した。たとえば $N_{S^3}=12$.

(Quart. J. Math. Oxford, 31(1980)).

さて、もとに戻ろう。図2，図3などや定義から、求める $\gamma_{f_*}(f_*^*(\varphi_*(\xi)))$ の第2直和因子は合成写像：

$$\begin{array}{ccccc} S^{n-1}\times A & \longrightarrow & G\times A & \longrightarrow & Y \\ \cup & & \cup & & \cup \\ (v\ ,\ a) & \longrightarrow & (\xi(v),\ a) & \longrightarrow & h(\xi(v)\cdot a)\cdot h(a)^{-1}\cdot h(\xi(v)\cdot a_0)^{-1} \end{array}$$

から得られる写像：

$$S^{n-1}\wedge A \xrightarrow[\xi\wedge 1_A]{} G\wedge A \xrightarrow[\underline{O}(h)]{} Y$$

であることがわかる。よって次の命題が得られた。

<u>命題1.</u> <u>Yを位相群</u>，$f;(A, a_0)\longrightarrow(Y, y_0)$ ならば

$$\gamma_{f_*}(f_*^*(\varphi_*(\xi))) = f_*(\lambda_\xi^A)\oplus \underline{O}(h)_*(\xi\wedge 1_A)$$

<u>例2.</u> $G_n = SO(n)$，$U(n)$，$Sp(n)$ とする。ξ_n を標準的主バンドル：$G_n\longrightarrow S^{dn-1}$ とする，$\xi_n\in\pi_{dn-2}(G_{n-1})$。位相群Hに対して，準同型写像 $G_{n-1}\xrightarrow{f} H$ は $f_*(\xi_n)=0$ のときに限って G_n に拡張できる。

<u>例3.</u> 巾写像：$G_{n-1}\xrightarrow[h_m]{} G_{n-1}$ $(g\to g^m)$ は，

$$\underline{O}(h_m)(\xi_n\wedge 1_{G_{n-1}}) = 0\quad,\quad m\xi_n=0$$

のときに限り，写像 $G_n\to G_{n-1}$ に拡張できる。つまり，

$$S^{dn-2}\wedge G_{n-1}\xrightarrow[\xi_n\wedge 1_{G_{n-1}}]{} G_{n-1}\wedge G_{n-1}\xrightarrow[\underline{O}(h_m)]{} G_{n-1} = 0.$$

さて，命題1の拡張を考えよう。今度は，<u>Hを位相群</u>とし，Yは<u>左－H－空間</u>としてその作用を $y\cdot h$ とかく。

$f:(A,a_0)\longrightarrow(H,h_0)$ とし，$i_H:H\longrightarrow Y$ を

$$i_H(h)=y_0\cdot h$$

と定める。写像 $f'=i_H\cdot f:(A,a_0)\longrightarrow(Y,y_0)$ を写像：$X\longrightarrow Y$ に拡張する障害を求めるために次の図式を考えよう。

$$\begin{tikzcd}
 & & \pi_{n-1}(A^A,1_A)\ni \underline{\varphi_*(\xi)} \arrow[dl, "f^*_*"'] \arrow[dr, "f'^*_*"] & & \\
\pi_{n-1}(H_0^A,*) \arrow[rrrr, "i_{H_0*}"] \arrow[ddr] & & & & \pi_{n-1}(Y_0^A,*) \arrow[ddl] \\
 & \pi_{n-1}(H^A,f) \arrow[rr, "i_H^*"] \arrow[d, "\approx"'] & & \pi_{n-1}(Y^A,f') \arrow[d, "\approx", "③_*"'] & \\
 & \pi_{n-1}(H^A,*) \arrow[rr, "i_H^*"] \arrow[dl, "\omega_*"'] \arrow[uul, bend left, "②_*"] & & \pi_{n-1}(Y^A,*) \arrow[dr, "\omega_*"'] & \\
\pi_{n-1}(H,h_0) \arrow[rrrr, "i_{H*}"] \arrow[ur, bend right, "①_*"'] & & & & \pi_{n-1}(Y,y_0) \arrow[ul, bend right, "\text{Section}"']
\end{tikzcd}$$

図5.

図3

写像①，②はすでに図3で定められているので，写像③を定めよう。写像 $h:A\longrightarrow Y$ に対して，

$$③(h)(a)=h(a)f(a)^{-1}\ :\ A\longrightarrow Y$$

とする。$③(f')=$ 定数 y_0 であるから，$③:(Y^A,f')\rightarrow(Y^A,k)$ となっている。定義から，図5は可換図式なことは明らかであろう。そこで，

$$\begin{aligned}\pi_{n-1}(Y^A,*) &\cong \pi_{n-1}(Y,y_0)\oplus\pi_{n-1}(Y_0^A,*)\\ &\cong \pi_{n-1}(Y,y_0)\oplus[S^{n-1}\wedge A,Y]。\end{aligned}$$

という直和分解を利用すると次の命題が得られる。

命題2. Yを右－H－空間とし，包含写像を $i(h)=y_0h$ で定める。$f:(A,a_0)\longrightarrow(H,h_0)$ が写像 $X\longrightarrow Y$ に拡張できる必要十分条件は（$i:(H,h_0)\longrightarrow(Y,y_0)$）

$$\underset{\substack{\cap\\ \pi_{n-1}(Y,y_0)}}{\underline{i_*(f_*(\lambda_\xi^A))=0}},\qquad \underset{\substack{\cap\\ [S^{n-1}\wedge A,\,Y]_0}}{\underline{i_*\{Q(f)_*(\xi\wedge 1_A)\}=0}}$$

が成り立つことである。

系3. $X_\xi\longrightarrow S^n$，主G－バンドル（$\dim G<n-1$）

$X_\eta\longrightarrow S^n$，主H－バンドル

$f:(G,g_0)\longrightarrow(H,h_0)$

このとき，f が写像 $X_\xi\to X_\eta$ に拡張できる必要十分条件は，次の2つが成り立つことである。

1. $f_*(\xi)=m\eta$ となる整数 m が存在する。
2. $Q(f)_*(\xi\wedge 1_G)\in\eta_*([S^{n-1}\wedge G,\,S^{n-1}]_0)$

例4 $X_\xi\longrightarrow S^n$（$n>4$）を主 S^3－バンドルとする。

Orientation reversing homotopy equiv.：$X_\xi\to X_\xi$ が存在する必要十分条件は，

$$2\xi=0,\qquad \tau\circ E^3\xi\in\xi\circ\pi_{n+2}(S^{n-1})$$

が成り立つことである。τ は Blaker-Massey map $S^6\to S^3$.

注4. $X_{\xi_i}\longrightarrow S^n$ が主 S^3－バンドル（$i=1,2$）のとき

$X_{\xi_1}\sim X_{\xi_2}\Leftrightarrow \xi_2=\pm\xi_1\Leftrightarrow X_{\xi_1}\cong X_{\xi_2}$ (homeo).

重要な応用例を次に述べる。

応用例5. $X = X_\xi \longrightarrow S^n$ を主 G−バンドルとする。このとき，Serre-fibering. $F_0 \longrightarrow (X,G)_0^{(X,G)} \longrightarrow G_0^G$ が

$$1_X \in (X,G)_0^{(X,G)}, \qquad 1_G \in G_0^G$$

得られる。写像 $f : (G, g_0) \longrightarrow (G, g_0)$ に対して，

$$\psi_1(f) = f_*(\xi)\cdot\{\xi\} \in \pi_{n-1}(G, g_0)/\{\xi\}$$

$$\psi_2(f) = \underline{O}(f)_*(\xi \wedge 1_G) \in [S^{n-1}\wedge G, G]_0/\xi_*[S^{n-1}\wedge G, S^{n-1}]$$

と定めれば，自然な系列：

$$\pi_0\left((X,G)_0^{(X,G)}, 1_X\right) \longrightarrow \pi_0(G_0^G, 1_G) \xrightarrow{\psi_1 \times \psi_2} \pi_{n-1}(G)/\{\xi\} \times [S^{n-1}\wedge G, G]_0/\xi_* [S^{n-1}\wedge G, S^{n-1}]$$

つまり，

$$= \quad [X, G]_0^{\circlearrowleft} \longrightarrow [G]_0^{\circlearrowleft} \longrightarrow \pi_{n-1}(G)/\{\xi\} \times [S^{n-1}\wedge G, G]/\xi_*[S^{n-1}\wedge G, S^{n-1}]$$

は exact である。

注5. 図1のファイバー空間と上記の Serre-fibering は次のように結びついている。とくにファイバーは同じである。

図1で $A = G$, $Y = X$ とおけば

図6.

$$\begin{tikzcd}
(X,G)^{(X,G)} \arrow[r] \arrow[d] & X^X \arrow[r] \arrow[d] & X^{D^n \times G} = Z^{D^n} \arrow[d] \\
G^G \arrow[r, hook] & X^G \arrow[r] & X^{S^{n-1}\times G} = Z^{S^{n-1}} \\
1_G \in G^G & i_G \in X^G \arrow[r, mapsto] & G^{S^{n-1}\times G} = (G^G)^{S^{n-1}} \arrow[u, hook]
\end{tikzcd}$$

以下で，$G=G_1\times G_2$ の場合の応用例を考えてみよう。
したがって，状況は次のようになる。

$\xi=\xi_1\times\xi_2:\ S^*\longrightarrow G=G_1\times G_2$ ，$\xi_i:(S^*,*)\to(G_i,*)$

$f:\ G=G_1\times G_2\longrightarrow G_1\times G_2=G$ ，$f(e_0)=e_0$

として，$\underline{O(f)_*(\xi\wedge 1_G)}:\ \underline{S^*\wedge G\longrightarrow G}$ を記述することである。

$p_i:G=G_1\times G_2\longrightarrow G_i$ を各因子への射影とする。補題5などを使って，まず

$$\begin{aligned}O(f)_*(\xi\wedge 1_G)&=p_{1*}(O(f)_*(\xi\wedge 1_G))\oplus p_{2*}(O(f)_*(\xi\wedge 1_G))\\&=O(f_1)_*(\xi\wedge 1_G)\oplus O(f_2)_*(\xi\wedge 1_G),\quad f_i=p_i f.\end{aligned}$$

更に，$\xi=\xi_1+\xi_2$ より，

$$\begin{aligned}O(f)_*(\xi\wedge 1_G)=&(O(f_1)_*(\xi_1\wedge 1_G)+O(f_1)_*(\xi_2\wedge 1_G))\\&\oplus(O(f_2)_*(\xi_1\wedge 1_G)+O(f_2)_*(\xi_2\wedge 1_G))\end{aligned}$$

ここでは，$[S^*\wedge G,\ G]$ とか，$[S^*\wedge G,\ G_i]$ が アーベル群 であることを使っている。次の図式が見易い。

$$\begin{tikzcd}
S^*\wedge G \arrow[r] \arrow[dr] \arrow[ddr] & G_1\wedge G \arrow[d] \arrow[drr] & & \\
 & G\wedge G \arrow[r] & G \arrow[r] & G_1\ (\text{or } G_2) \\
 & G_2\wedge G \arrow[u] \arrow[urr] & &
\end{tikzcd}$$

$S^*\wedge G\ni \underline{v\wedge(x,y)}$

$G_1\ni \underline{f_1(\xi_1(v)\cdot x,y)}\cdot \underline{f_1(x,y)^{-1}}\cdot \underline{f_1(\xi_1(v),g_2)^{-1}}$

$G_1\ni \underline{f_1(x,\xi_2(v)\cdot y)}\cdot \underline{f_1(x,y)^{-1}}\cdot f_1(g_1,\xi_2(v))^{-1}$

図7.

もし $G_1\to G_2$ ならば $f_1\to f_2$ にすればよい。

注6. $S^* \wedge G \simeq S^* \wedge G_1 \vee S^* \wedge G_2 \vee S^* \wedge G_1 \wedge G_2$

写像 $f_i : G = G_1 \times G_2 \longrightarrow G_i$ は次のようにもかけます。

$f_{j,i} : G_j \longrightarrow G_i$, $f_{3,i} : G_1 \wedge G_2 \longrightarrow G_i$ でいずれも基点を保ち、$j = 1, 2$ とする。このとき

$$\underline{f_i(x, y) = f_{3,i}(x \wedge y) \cdot f_{1,i}(x) \cdot f_{2,i}(y)} \quad , i = 1, 2$$

したがって、$G_i = H$, $f_{j,i} = h_j$, $f_i = h : G \longrightarrow H$ と記号を簡略にする。ここで $\underline{h(x, y) = h_3(x \wedge y) h_1(x) h_2(y)}$.

このとき、図7の2つの写像は次のようになる。

イ $(v \wedge (x, y)) = h(\xi_1(v) \cdot x, y) \cdot h(x, y)^{-1} \cdot h(\xi_1(v), g_2)^{-1}$

ロ $(v \wedge (x, y)) = h(x, \xi_2(v) \cdot y) \cdot h(x, y)^{-1} \cdot h(g_1, \xi_2(v))^{-1}$

ここで2つの写像を定義する。

イ$'$: $G_1 \wedge G \longrightarrow H$, $x' \wedge (x, y) \longrightarrow h(x'x, y) h(x, y)^{-1} h(x', y)^{-1}$

ロ$'$: $G_2 \wedge G \longrightarrow H$, $y' \wedge (x, y) \longrightarrow h(x, y'y) h(x, y)^{-1} h(x, y')^{-1}$

これらは $h(x, y)$ の分解に応じて次のようになる。

イ$''$ $h_3(x'x \wedge y) h_1(x'x) h_1(x)^{-1} h_3(x \wedge y)^{-1} h_1(x')^{-1} : G_1 \wedge G \to H$.

ロ$''$ $h_3(x \wedge y'y) h_1(x) h_2(y'y) h_2(y)^{-1} h_1(x)^{-1} h_3(x \wedge y)^{-1} h_2(y')^{-1}$.

イ$''$ を更に次の形に書き直す。

イ$''$ $\underbrace{h_3(x'x \wedge y) h_3(x \wedge y)^{-1} h_3(x' \wedge y)^{-1}}_{\triangle 1} \cdot \underbrace{h_3(x' \wedge y)}_{\triangle 2} h_3(x \wedge y) \cdot \underbrace{h_1(x'x) h_1(x)^{-1} h_1(x')^{-1}}_{= O(h_1)}$
$\cdot h_1(x') h_3(x \wedge y)^{-1} \cdot h_1(x')^{-1}$

$= \triangle 1 \cdot \triangle 2 \cdot \underline{C(h_3(x \wedge y) \wedge O(h_1)(x' \wedge x))} \cdot \underline{O(h_1)} \cdot \underline{C(h_3(x \wedge y) \wedge h_1(x'))}$

これらの定義域を図示すれば次のようになっている。順序

ごとに、

$$
\begin{tikzcd}[column sep=small]
 & & G_1\wedge G = G_1\wedge(G_1\times G_2) \arrow[dll] \arrow[dl] \arrow[d] \arrow[dr] \arrow[drr] & & \\
G_1\wedge(G_1\wedge G_2) \arrow[ddrr] & G_1\wedge(G_2) \arrow[ddr] & G_1\wedge(G_1\wedge G_2) \arrow[d] & G_1\wedge(G_1) \arrow[ddl] & (G_1\wedge G_2)\wedge G_1 \arrow[dll] \\
 & & H\wedge H \arrow[d, "C"] & & \\
 & & H & &
\end{tikzcd}
$$

同様にして、

ロ'' $\underline{h_3(x\wedge y'y)h_3(x\wedge y)^{-1}h_3(x\wedge y')^{-1}}\cdot\underline{h_3(x\wedge y')}\cdot$

$\underline{C(h_3(x\wedge y)h_1(x)\wedge O(h_2)(y'\wedge y))}\cdot\underline{O(h_2)(y'\wedge y)}\cdot$

$\underline{C(h_3(x\wedge y)\wedge C(h_1(x)\wedge h_2(y')))}\cdot\underline{C(h_1(x)\wedge h_2(y'))}\cdot$

$\underline{C(h_3(x\wedge y)\wedge h_2(y'))}$

が得られる。　結果の整理のために新らしい記号を導入する。

$O_1, O_2 : [G_1\wedge G_2, H]_0 \longrightarrow [G_i\wedge G_1\wedge G_2, H]_0$

をイ''，ロ''の第1項で定める。このとき、($g : G_1\times G_2 \to G_1\wedge G_2$)

イ'' $= O_1(h_3)(1\wedge g)\cdot h_3(1\wedge Pr_2)\cdot C(h_3(x\wedge y)\wedge O(h_1)(1\wedge Pr_1))\cdot O(h_1)(1\wedge Pr_1)\cdot$

$C(h_3(x\wedge y)\wedge h_1(x')) : G_1\wedge G = G_1\wedge(G_1\times G_2) \longrightarrow H.$

ロ'' $= O_2(h_3)(1\wedge g)\cdot h_3(T(1\wedge Pr_1)\cdot C(h_3(x\wedge y)h_1(x)\wedge O(h_2)(y'\wedge y))\cdot$

$O(h_2)(1\wedge Pr_2)\cdot C(h_3(x\wedge y)\wedge C(h_1(x)\wedge h_2(y'))\cdot$

$C(h_1\wedge h_2)(T(1\wedge Pr_1))\cdot C(T(h_2\wedge h_3)(1\wedge g)) : G_2\wedge G \longrightarrow H.$

と書き換えられる。　これらは値域がHだから、イ''$_H$，ロ''$_H$ と

改めて書けば次の命題が得られる。

命題4　$f: G = G_1 \times G_2 \longrightarrow G_1 \times G_2 = G$ が

$$f(x,y) = (f_{31}(x \wedge y) \cdot f_{11}(x) \cdot f_{21}(y),\ f_{32}(x \wedge y) \cdot f_{12}(x) \cdot f_{22}(y))$$

のとき、

$$\underline{Q}(f)_*(\xi_1 \wedge 1_G) : S^*_\wedge G = S^*_\wedge(G_1 \times G_2) \longrightarrow G_1 \times G_2 = G \text{ は、}$$

$$= \{ \text{①}''_{G_1}(\xi_1 \wedge 1_G) + \text{回}''_{G_1}(\xi_2 \wedge 1_G) \} \boxplus \{ \text{①}''_{G_2}(\xi_1 \wedge 1_G) + \text{回}''_{G_2}(\xi_2 \wedge 1_G) \}$$

で与えられる。

上記公式をもっと詳しくいえば次のようになる。

$$\underline{\text{①}''_H(\xi_1 \wedge 1_G)} : S^*_\wedge G \simeq \underline{S^*_\wedge G_1} \vee \underline{S^*_\wedge G_2} \vee \underline{S^*_\wedge G_1 \wedge G_2} \longrightarrow H$$

$$O(h_1)(\xi_1 \wedge 1_{G_1}) : S^*_\wedge G_1 \longrightarrow G_1 \wedge G_1 \longrightarrow H$$

$$h_3(\xi_1 \wedge 1_{G_2}) : S^* \wedge G_2 \longrightarrow G_1 \wedge G_2 \longrightarrow H$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \underline{O}_1(h_3)(\xi_1 \wedge 1) \\ C(h_3 \wedge O(h_1))(\xi_1 \wedge 1) : S^*_\wedge(G_1 \wedge G_2) \longrightarrow G_1 \wedge (G_1 \wedge G_2) \longrightarrow H \\ C(h_3 \wedge h_1)(\xi_1 \wedge 1) \end{array} \right.$$

$$\underline{\text{回}''_H(\xi_2 \wedge 1_G)} : S^*_\wedge G \simeq \underline{S^*_\wedge G_1} \vee \underline{S^*_\wedge G_2} \vee \underline{S^*_\wedge G_1 \wedge G_2} \longrightarrow H$$

$$h_3 T(\xi_2 \wedge 1_{G_1}) : S^*_\wedge G_1 \longrightarrow G_2 \wedge G_1 \longrightarrow G_1 \wedge G_2 \longrightarrow H$$

$$\underline{O}(h_2)(\xi_2 \wedge 1_{G_2}) : S^*_\wedge G_2 \longrightarrow G_2 \wedge G_2 \longrightarrow H$$

$$C(h_1 \wedge h_2) T(\xi_2 \wedge 1_{G_1}) : S^*_\wedge G_1 \longrightarrow G_2 \wedge G_1 \longrightarrow G_1 \wedge G_2 \longrightarrow H$$

$$\left\{ \begin{array}{l} O_2(h_3)(\xi_2 \wedge 1),\ CT(h_2 \wedge h_3)(\xi_2 \wedge 1),\ C(h_3 \cdot h_1 \wedge O(h_2))(\xi_2 \wedge 1) \\ ,\ C(h_3 \wedge C(h_1 \wedge h_2))(\xi_2 \wedge 1) : S^* \wedge (G_1 \wedge G_2) \longrightarrow G_2 \wedge (G_1 \wedge G_2) \end{array} \right.$$

$$\longrightarrow H$$

これらの公式から実際の計算を行うには未だ困難があるようである。

<u>系5.</u> $f_{31}=f_{32}=\text{trivial}$ のとき，つまり

$$f=(f_{11}\cdot f_{21},\ f_{12}\cdot f_{22})$$

のときは，

$$\underline{O(f)_*(\xi\wedge 1_G)}$$

$$=\underline{\{O(f_{11})_*(\xi_1\wedge Pr_1)+c(f_{11}\wedge f_{21})T(\xi_2\wedge Pr_1)\}}\oplus\underline{O(f_{21})_*(\xi_2\wedge Pr_2)}$$

$$\oplus\ \underline{O(f_{22})_*(\xi_2\wedge Pr_2)}\oplus\underline{\{O(f_{12})_*(\xi_1\wedge Pr_1)+c(f_{12}\wedge f_{22})T(\xi_2\wedge Pr_1)\}}$$

である。

<u>例6.</u> $G_1=G_2=S^3$ の場合を考えてみよう。

$\alpha_i: S_1^3\wedge S_2^3=S^6\longrightarrow S_i^3$, $\xi_i: S^*\longrightarrow S_i^3$ $(i=1,2)$

$f: S_1^3\times S_2^3\longrightarrow S_1^3\times S_2^3$, $(a,b,c,d\in\mathbb{Z})$

$$f(x,y)=(\alpha_1(x\wedge y)x^a y^b,\ \alpha_2(x\wedge y)x^c y^d)$$

このとき，$\xi: S^*\longrightarrow S_1^3\times S_2^3$, $\xi=(\xi_1,\xi_2)$

$$f_*(\xi)=(a\xi_1+b\xi_2,\ c\xi_1+d\xi_2)=\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\xi_1\\ \xi_2\end{pmatrix}$$

命題4における各写像は次のようになる。

① $''_{G_1}(\xi_1\wedge 1_{G_1}): S^*\wedge(S_1^3\times S_2^3)\simeq S^*\wedge S_1^3\vee S^*\wedge S_2^3\vee S^*\wedge S_1^3\wedge S_2^3$

$$O(h_1)(\xi_1\wedge 1_{G_1})=\frac{-a(a-1)}{2}\tau\cdot E\xi_1\ :\ S_1^{*+3}\longrightarrow S_1^3$$

$$h_{13}(\xi_1\wedge 1_{G_2})=\alpha_1\circ E\xi_1\ :\ S_2^{*+3}\longrightarrow S_1^3$$

$\underline{c(h_{13}\wedge O(h_1))(\xi_1\wedge 1)=0}$ (1)

$$C(h_3 \wedge h_1)(\xi_1 \wedge 1) = -a\,\tau \cdot E^3\alpha_1 \cdot E^6\xi_1 : S^{k+6} \longrightarrow S_1^3$$

$$\underline{O}_1(h_3)(\xi_1 \wedge 1) = m_1\,\underline{O}_1(\tau)\cdot E^6\xi_1 : S^{k+6} \longrightarrow S_1^3$$

ここで $\alpha_1 = m_1\tau \in \pi_6(S^3)$, $\underline{O}_1(\tau) : S^9 \longrightarrow S^3$ で

$S^9 = S^3 \wedge S^3 \wedge S^3 \ni (x \wedge y \wedge z)$ のとき

$$\underline{O}_1(\tau)(x \wedge y \wedge z) = \underline{x\cdot y\cdot z\cdot y^{-1}x^{-1}}\,(y)\,\overbrace{z}\,\underline{z^{-1}y^{-1}z\cdot x\cdot z^{-1}x^{-1}} \in S^3$$

注. $\pi_9(S^3) \cong Z_3$

$\Theta''_{G_1}(\xi_2 \wedge 1_G)$ では,

$$h_3\tau(\xi_2 \wedge 1_{G_1}) = -\alpha_1 \cdot E^3\xi_2 : S^k \wedge S_1^3 \longrightarrow S_1^3$$

$$C(h_1 \wedge h_2)\tau(\xi_2 \wedge 1_{G_1}) = -ab\,\tau\cdot E^3\xi_2 ; S^k \wedge S_1^3 \longrightarrow S_1^3$$

$$O(h_2)(\xi_2 \wedge 1_{G_2}) = \frac{-b(b-1)}{2}\,\tau\cdot E^3\xi_2 ; S^k \wedge S_2^3 \longrightarrow S_1^3$$

$$\begin{cases} \underline{O}_2(h_3)(\xi_2 \wedge 1) = m_1\,\underline{O}_1(\tau)\circ E^6\xi_2, & (\alpha_1 = m_1\tau). \\ C\tau(h_2 \wedge h_3)(\xi_2 \wedge 1) = -b\,\tau\circ E^3\alpha_1 \circ E^6\xi_2 & ; S^k \wedge S^6 \longrightarrow S_1^3 \\ C(h_3\cdot h_1 \wedge O(h_2))(\xi_2 \wedge 1) = \dfrac{ab(b-1)}{2}\,\tau\cdot E^3\tau\cdot E^6\xi_2 & (2) \end{cases}$$

$$\underline{C(h_3 \wedge C(h_1 \wedge h_2))(\xi_2 \wedge 1) = 0} \qquad (3)$$

(1) の証明 $C(h_3(x \wedge y) \wedge O(h_1)(x \wedge x)) : G_1 \wedge (G_1 \wedge G_2) \longrightarrow H$

$$G_1 \wedge (G_1 \wedge G_2) \longrightarrow G_2 \wedge G_1 \wedge G_1 \wedge G_1 \longrightarrow (G_1 \wedge G_2) \wedge (G_1 \wedge G_1)$$

$$x' \wedge x \wedge y \longrightarrow y \wedge x \wedge x' \wedge x \longrightarrow \quad \downarrow h_3 \wedge O(h_1)$$

$$H \wedge H \xrightarrow[c]{} H$$

$$a \wedge b \wedge c \wedge d \longrightarrow (b \wedge a) \wedge (c \wedge d)$$

(3) の証明 $C(h_3(x \wedge y) \wedge C(h_1(x) \wedge h_2(y'))) : G_2 \wedge G_1 \wedge G_2 \longrightarrow H$

$$G_2 \wedge G_1 \wedge G_2 \longrightarrow G_2 \wedge G_1 \wedge G_1 \wedge G_2 \longrightarrow H \wedge H \xrightarrow[C]{} H$$

$$y' \wedge x \wedge y \longrightarrow \underset{a \wedge b \wedge c \wedge d}{y' \wedge x \wedge x \wedge y} \longrightarrow h_3(b \wedge d) \wedge C(h_1(c) \wedge h_2(a))$$

(2)の証明　$C(h_3(x\wedge y)\cdot h_1(x)\wedge O(h_2)(y'\wedge y))(\xi_2\wedge 1)$.

$$S^9 = S^3_2\wedge(S^3_1\wedge S^3_2) \ni y'\wedge x\wedge y$$

$$\xrightarrow{\text{degree } -1}\quad (S^3_1\wedge S^3_2\wedge S^3_2)\vee(S^6\wedge S^6) = (S^3_1\times S^3_2/1\times S^3_2)\wedge(S^3_2\wedge S^3_2)\ni [x,y]\wedge(y',y)$$

$$\xrightarrow{\deg h_1(\tau\cdot E^3O(h_2))}\quad S^3_1 \xleftarrow{c} S^3\wedge S^3 \ni h_3(x\wedge y)\cdot h_1(x)\wedge O(h_2)$$

よって, $= -1\cdot\deg h_1\ \tau\cdot E^3(O(h_2))$

$= -a\,\tau\cdot\dfrac{-b(b-1)}{2}E^3\tau$

これらの結果は次の公式を保証している。

$\underline{O(f)_*(\xi\wedge 1_G)} \in \pi_{*+6}(S^3_1)\oplus\pi_{*+3}(S^3_1)\oplus\pi_{*+3}(S^3_1)$

$\oplus\,\pi_{*+6}(S^3_2)\oplus\pi_{*+3}(S^3_2)\oplus\pi_{*+3}(S^3_2)$

$= m_1(O_1(\tau)-a\,\tau\circ E^3\tau)\circ E^6\xi_1+(m_1 O_1(\tau)-b\,m_1\tau\circ E^3\tau+\dfrac{ab(b-1)}{2}\tau\cdot E^3\tau)\cdot E^6\xi_2$

$\oplus -\left(\dfrac{a(a-1)}{2}\tau\cdot E^3\xi_1+(m_1+ab)\tau\circ E^3\xi_2\right)$

$\oplus\ m_1\,\tau\circ E^3\xi_1-\dfrac{b(b-1)}{2}\tau\circ E^3\xi_2$

$\oplus\ m_2(O_1(\tau)-c\,\tau\cdot E^3\tau)\circ E^6\xi_1+(m_2 O_1(\tau)-d\,m_2\tau\cdot E^3\tau+\dfrac{cd(d-1)}{2}\tau\cdot E^3\tau)\cdot E^6\xi_2$

$\oplus -\left(\dfrac{c(c-1)}{2}\tau\cdot E^3\xi_1+(m_2+cd)\tau\circ E^3\xi_2\right)$

$\oplus\ m_2\,\tau\circ E^3\xi_1-\dfrac{d(d-1)}{2}\tau\circ E^3\xi_2$

ただし $\alpha_1=m_1\tau$, $\alpha_2=m_2\tau$, $\tau\in\pi_6(S^3)$ の生成元で; Commutator map = Blakers-Massey map.

以上.