数理解析研究所講究録
605巻 1987年 100-115

A note on the order of the Kahn-Priddy map

信大教養 向井純夫 (Juno Mukai)

0. はじめに.

L_p を素数 p を法とする無限次元レンズ空間, L_p^k を L_p の k-切片とする. $c=2m+1$, $m\geqslant 1$ とおく.

$$\lambda=\lambda_k : E^c L_p^k \longrightarrow S^c \quad (2p-3\leqslant k\leqslant 2(m+1)(p-1)-2)$$

の汎関数 $\mathcal{P}^1$ 作用素 $\mathcal{P}^1_\lambda$ に対し, $\mathcal{P}^1_\lambda \neq 0$ のとき, λ を Kahn-Priddy map (以下, K-P map) という. 定義より, $t\geqslant 0$ のとき, $E^t\lambda$ も K-P map である. $E^t\lambda$ のホモトピー類を同じ記号 $E^t\lambda$ で表す. コホモトピー群 $\pi^{t+c}(E^{t+c}L_p^k)$ における元 $E^t\lambda$ の位数 $\#(E^t\lambda)$ を決定する問題は, 西田吾郎氏により提起された. p が奇素数で, stable な K-P map に対しては, 西田[11]により解決された.

これにより，Kahn-Priddy の定理〔5〕を使えば，球面の安定ホモトピー群の p-成分の元の位数の上界が与えられることになる．

〔11〕における方法は，L_p^k の代数的 K-群を決定し，その応用として結果が得られる．$p=2$ のとき，筆者は部分的結果を得た〔9〕．この方法を進めて，RP ち，K-P map の（位相的）K-理論による特徴づけを行い，Adams〔2〕の d- または e-不変量を用い，更に stunted レンズ空間の suspension-order〔4〕の結果を使えば，問題が解決できることを示せる．これが本報告の目的である．

実数 x に対し，$[x]$ で x を越えない最大整数を表す．$\varphi(n)=\#\{0<i\leqq n,\ i\equiv 0, 1, 2 \text{ or } 4 \mod 8\}$．$\lambda=\lambda_{2n}: E^cL_p^{2n}\longrightarrow S^c$，$\chi=\lambda|E^cL_p^{2n-1}$（制限）とおく．$p=2$ のとき，$m=n$ とする．$t\geqq 0$．

<u>Theorem</u>. i) p：奇素数．

$$\#(E^t\lambda)=\#(E^t\chi)=p^{\left[\frac{n}{p-1}\right]}.$$

ii) $p=2$. $\#(E^t\lambda)=2^{\varphi(2n)}$.

$$\#(E^t\chi)=\begin{cases}2^{\varphi(2n)}, & n:\text{ even}.\\ 2^{\varphi(2n-1)}, & n:\text{ odd}.\end{cases}$$

1. K-P map の K-理論による特徴づけ.

以下特に断わらない限り, p は奇素数を表す.

<u>Proposition</u> 1.1 (上部 [6]). $n = s(p-1)+r,\ 0 \leq r < p-1$.

$$\widetilde{K}(L_p^{2n+1}) \approx \widetilde{K}(L_p^{2n}) \approx (Z_{p^{s+1}})^r + (Z_{p^s})^{p-r-1}.$$

生成元: $\sigma, \cdots, \sigma^r, \sigma^{r+1}, \cdots, \sigma^{p-1}$.

環構造: $\sigma^p = \sum_{i=1}^{p-1} \binom{p}{i} \sigma^i, \quad \sigma^{n+1} = 0$.

$n \geqslant 3$ のとき, 次のことはよく知られている.

$$\underset{(p\text{-成分})}{{}^p\pi_{i+n}(S^n)} \approx \begin{cases} 0, & i < 2p-3 \text{ or } i = 2p-2. \\ Z_p, & i = 2p-3, \text{ 生成元 } E^{n-3}\alpha_1 \end{cases}$$

$M_p^n = S^{n-1} \cup_p e^n$, $\bar{\alpha}_1 \in \pi^3(M_p^{2p+1}) \approx Z_p$ を α_1 の拡張とする. 上の事実より, 次が成り立つ.

<u>Lemma</u> 1.2. $n \geqslant 3$. $\pi^n(E^n L_p^{2p-4}) = 0$,

$$\pi^n(M_p^{n+2p-2}) = \{E^{n-3}\bar{\alpha}_1\} \approx Z_p.$$

$q: L_p^{2n} \longrightarrow L_p^{2n}/L_p^{2n-2} = M_p^{2n}$ を自然な map とするとき,

cofibration

$$L_p^{2n-2} \hookrightarrow L_p^{2n} \xrightarrow{q'} M_p^{2n}$$

と Prop. 1.1 より，次を得る．

Lemma 1.3　$n = s(p-1)$，$s \geq 1$.

$$\mathrm{Im}\{q'^{*}: \tilde{K}(M_p^{2n}) \to \tilde{K}(L_p^{2n})\} = \{p^{s-1}\sigma^{p-1}\} \approx Z_p.$$

以下，K-理論に関する議論では，記号の簡略化のため，stable category で考える．

$\alpha \in {}^p\pi_{2p-3}(S^0)$ の拡張を $\bar{\alpha} \in \pi^0(M_p^{2p-2})$ とする．次のことはよく知られている[2]．

Lemma 1.4.　$\alpha = a\alpha_1$，$a \equiv 1 \mod p$.

$$\Leftrightarrow \quad \mathcal{P}^1_\alpha \neq 0$$

$$\Leftrightarrow \quad \bar{\alpha}^{*}: \tilde{K}(S^0) \to \tilde{K}(M_p^{2p-2}) \approx Z_p \quad \text{onto.} \quad \text{i.e.,}$$

$$d_{\mathbb{C}}(\bar{\alpha}) \equiv a \mod p.$$

$$\Leftrightarrow \quad e_{\mathbb{C}}(\alpha) \equiv -\frac{a}{p} \mod 1.$$

K-P map の定義と Lemmas 1.2，1.4 より，$k \geq 2p-2$ のとき，$\lambda: L_p^k \to S^0$ が K-P map であるための必要十分条件は，次の図式がホモトピー可換となることである．

$$
(1.1)\qquad
\begin{tikzcd}
L_p^k \arrow[rr, "\lambda"] & & S^0 \\
& L_p^{2p-2} \arrow[ul, "i'"] \arrow[ur, "\lambda'"'] \arrow[d, "q'"] & \\
& M_p^{2p-2} \arrow[uur, "\bar\alpha_1"'] &
\end{tikzcd}
.
$$

ここで，$\lambda' = \lambda | L_p^{2p-2}$．その他の maps は自然なものである．次の命題を示すことが本節の目的である．

Proposition 1.5. $k = 2n$ or $2n+1$, $n = s(p-1)+r$, $0 \leq r < p-1$, $s \geq 1$.

$\lambda : L_p^k \longrightarrow S^0$ K-P map.

$\Longleftrightarrow$ $Im\{\lambda^* : \tilde{K}(S^0) \longrightarrow \tilde{K}(L_p^k)\} = \{\sigma^{p-1} \bmod p\tilde{K}(L_p^k)\} \approx Z_{p^s}$.

Proof. (1.1), Lemmas 1.3, 1.4 より，$Im\,\lambda'^* = Im\,q'^* = \{\sigma^{p-1}\} \approx Z_p$. Prop. 1.1 より，$i'^*$ は onto で，$i'^{*-1}(\sigma^{p-1}) = \{\sigma^{p-1} \bmod p\tilde{K}(L_p^k)\}$．一方，(1.1) より，$i'^*(Im\,\lambda^*) = Im\,\lambda'^*$．故に，$Im\,\lambda^* = i'^{*-1}(\sigma^{p-1})$．□

2. レンズ空間の suspension-order.

空間 X に対し，ι_{EX} を EX の identity map のホモトピー類とする．$\#\iota_{EX}$ を X の suspension-order [12] という．記号 $|EX| = \#\iota_{EX}$ を使う．

Lemma 2.1 ([4], [15]).

$$|E(L_p^{2n}/L_p^{2k})| = |EL_p^{2(n-k)}| = p^{1+[\frac{n-k-1}{p-1}]}.$$

Lemma 2.2. ([6], [7]). $\widetilde{K}(L_p^{2n}/L_p^{2k}) \approx \widetilde{K}(L_p^{2(n-k)})$.

これらの Lemmas と Prop. 1.1 より，次を得る．

Proposition 2.3. $t \geqq 0$.

$$|E^{t+1}(L_p^{2n}/L_p^{2k})| = |E^{t+1}L_p^{2(n-k)}| = p^{1+[\frac{n-k-1}{p-1}]}.$$

注. $p=2$ のとき，Prop. 2.3 は成り立たない．

3. Proof of Theorem i).

<u>Proposition</u> 3.1. $\lambda : E^c L_p^{2n} \to S^c$ K-P map,
$\lambda' = \lambda | E^c L_p^{2n-1}$. $n \equiv 0 \mod p-1$ のときの λ' を除いて、
$t \geqq 0$ のとき、

$$\#(E^t\lambda) = \#(E^t\lambda') = p^{\left[\frac{n}{p-1}\right]}.$$

<u>Proof</u>. $n = s(p-1) + r$, $0 \leqq r < p-1$, $s \geqq 1$
とする。Lemma 1.2 より、次の図式がホモトピー可換となるような map $\tilde{\lambda} : E^c(L_p^{2n}/L_p^{2p-4}) \to S^c$ が存在する：

$$\begin{tikzcd}
E^c L_p^{2n} \arrow[rr, "\lambda"] \arrow[dr, "q'"'] & & S^c \\
& E^c(L_p^{2n}/L_p^{2p-4}) \arrow[ur, dashed, "\tilde{\lambda}"'] &
\end{tikzcd}$$

ここで、q' は自然な map である。
これと Prop. 2.3 より、

$$\#(E^t\lambda) \,\Big|\, \#(E^t\tilde{\lambda}) \,\Big|\, |E^{t+c}(L_p^{2n}/L_p^{2p-4})| = p^{1+\left[\frac{n-p+1}{p-1}\right]} = p^s .$$

一方、Prop. 1.5 より、

$$p^s \,\Big|\, \#(E^\infty \lambda) \,\Big|\, \#(E^t \lambda).$$

よって, $\#(E^t\lambda) = p^s$.

次に, $n \not\equiv 0 \mod p-1$ のとき, $n-1 = s(p-1) + r-1$, $0 \leqq r-1$. Prop. 1.5 と上の結果から,

$$p^s \,\Big|\, \#(E^\infty \lambda') \,\Big|\, \#(E^t \lambda') \,\Big|\, \#(E^t\lambda) = p^s. \qquad \square$$

Theorem i) の残された主張をいうには, stable な元 $\lambda' = \lambda | L_p^{2n-1} : L_p^{2n-1} \to S^0$ に対して, $\#\lambda' = p^s$ を示せばよい. $n = s(p-1)$, $s \geqq 1$ とする. $\alpha_s \in \pi_{2n-1}(S^0)$ を $e_{\mathbb{C}}(\alpha_s) \equiv -\frac{1}{p} \mod 1$ となる Adams-Toda の元[2]とし, $\bar{\alpha}_s \in \pi^0(M_p^{2n})$ を α_s の拡張とする.

Lemma 3.2. $\lambda : L_p^{2n} \to S^0$ K-P map, $q' : L_p^{2n} \to M_p^{2n}$ 自然な map. このとき,

$$p^{s-1}\lambda \equiv \bar{\alpha}_s q' \mod \operatorname{Ker} d_{\mathbb{C}}.$$

Proof. $d_{\mathbb{C}}(\bar{\alpha}_s) \equiv -p\, e_{\mathbb{C}}(\alpha_s) \equiv 1 \mod p$. 従って, Lemma 1.3 と Prop. 1.5 から主張を得る. $\square$

自然な maps に対する次の可換図式を考える:

$$\begin{tikzcd} L_p^{2n-1} \arrow[r, "q"] \arrow[d, "i"] & S^{2n-1} \arrow[d, "i_1"] \\ L_p^{2n} \arrow[r, "q'"] & M_p^{2n} \end{tikzcd}$$.

Proposition 3.3. $p^{s-1}\lambda' \equiv \alpha_s q \mod \operatorname{Ker} e_{\mathbb{C}}$,

$$\# \lambda' = p^s .$$

Proof. Lemma 3.2 と上の図式より,

$p^{s-1}\lambda' = (p^{s-1}\lambda)\circ i \equiv (\alpha_s q')\circ i = \alpha_s q \mod (\operatorname{Ker} d_{\mathbb{C}})\circ i$. 米田の積の性質から [2], $(\operatorname{Ker} d_{\mathbb{C}})\circ i \subset \operatorname{Ker} e_{\mathbb{C}}$, $e_{\mathbb{C}}(\alpha_s q) = d_{\mathbb{C}}(Eq)\, e_{\mathbb{C}}(\alpha_s) \equiv \pm \frac{1}{p} \mod 1$. 何となれば, $(Eq)^*: \tilde{K}^{-1}(S^{2n-1}) \longrightarrow \tilde{K}^{-1}(L_p^{2n-1})$ は, [6] より, isom. であるから, $d_{\mathbb{C}}(Eq) = \pm 1$. □

4. Proof of Theorem ii).

$p = 2$ のとき, $L_p^k = P^k$ (実射影空間) と表し, K-群の代りに KO-群を用いる. 以下, 次の事実は自由に

使われる： $\widetilde{KO}(P^n) \approx Z_{2^{\varphi(n)}}$ [1]， $|E^\infty P^{2n}| = 2^{\varphi(2n)}$ [12].

次の Lemma は Prop. 1.5 の mod 2 version である[9].

Lemma 4.1. $\lambda : P^n \to S^0$ K-P map.

$\Leftrightarrow$ $\lambda^* : \widetilde{KO}(S^0) \to \widetilde{KO}(P^n)$ onto.

以上から，Theorem ii) の最初の主張を得る[9].

以下，$\lambda : P^{2n} \to S^0$ K-P map，$\lambda' = \lambda | P^{2n-1}$ として，Theorem ii) の残された主張をいえばよい.

Case I. $n \equiv 3 \mod 4$.

$\varphi(2n-1) = \varphi(2n)$ より，$\# \lambda' = 2^{\varphi(2n-1)}$.

Case II. $n = 4s+1$, $s \geq 0$.

$\varphi(2n-1) = \varphi(2n-2) + 1$. $\mu_s \in \pi_{2n-1}(S^0)$ を $d_{\mathbb{R}}(\mu_s) \neq 0$ となる位数 2 の元[2] とする. cofibration

$$P^{2n-2} \xhookrightarrow{i} P^{2n-1} \xrightarrow{q} S^{2n-1}$$

と Lemma 4.1 より，次を得る.

Lemma 4.2. $2^{\varphi(2n-2)}\lambda' \equiv \mu_s q \mod \operatorname{Ker} d_{\mathbb{R}}$,

$$\# \mathcal{X}' = 2^{\varphi(2n-1)}.$$

<u>Case</u> III. $n = 4s-2$ or $4s$, $s \geqq 1$.

$\varphi(2n) = \varphi(2n-2) + 1$, $\varphi(2n-1) = \varphi(2n-2)$.

$\beta_s \in \pi_{2n-1}(S^0)$ を, $\# \beta_s = 2$ かつ $e'_{\mathbb{R}}(\beta_s) \equiv \frac{1}{2} \bmod 1$ となる元[2]とする.

<u>注</u>. Adams 予想が解けたから, $n = 4s$ のときも, $\mathrm{Im}\, J \approx Z_{m(4s)}$ [2]. この生成元を j_{2n-1} と表すとき, $\beta_s = \left(\frac{m(4s)}{2}\right) j_{2n-1}$ とすればよい.

cofibration $P^{2n-2} \xrightarrow{i'} P^{2n} \xrightarrow{q'} M_2^{2n}$ を用いれば, 次の Lemma (Lemma 3.2 の mod 2 version) が得られる.

<u>Lemma</u> 4.3. $2^{\varphi(2n-2)} \lambda \equiv \bar{\beta}_s q' \mod \mathrm{Ker}\, d_{\mathbb{R}}$.

$s = 1$ のとき, この結果は[8]で得られた.

<u>Proposition</u> 4.4. $2^{\varphi(2n-2)} \mathcal{X}' \equiv \beta_s q \mod \mathrm{Ker}\, e'_{\mathbb{R}}$

$$\# \mathcal{X}' = 2^{\varphi(2n)}.$$

<u>Proof</u>. 最初の主張は, Prop. 3.3 の前半の証明と全く同様である. [3]によれば, 次の完全列

$$0 \leftarrow \widetilde{KO}^{-1}(P^{2n-2}) \xleftarrow{i^*} \widetilde{KO}^{-1}(P^{2n-1}) \xleftarrow{(Eg)^*} \widetilde{KO}^{-1}(S^{2n-1})$$
$$\begin{array}{ccc} \wr\wr & \wr\wr & \wr\wr \\ Z_2 & Z_2+Z & Z \end{array}$$

において, $(Eg)^*$ は split mono. 従って, $d_{\mathbb{R}}(Eg) = \pm 1$. 故に,

$$e'_{\mathbb{R}}(2^{\varphi(2n-2)}\chi') = e'_{\mathbb{R}}(\beta_S g) = d_{\mathbb{R}}(Eg)\, e'_{\mathbb{R}}(\beta_S) \equiv \tfrac{1}{2} \bmod 1.$$

$\lrcorner$

<u>Example</u> i). 自然な map $P^{n-1} \hookrightarrow SO(n) \hookrightarrow \Omega^n S^n$ の adjoint を $g_n : E^n P^{n-1} \longrightarrow S^n$ とする. $g_n | E^n P^{n-2} = E g_{n-1}$ より, Theorem ii) を使えば, 次の通りである.

$$\#(E g_{2n}) = \begin{cases} 2^{\varphi(2n-1)}, & n: \text{ odd}, \\ 2^{\varphi(2n)}, & n: \text{ even}. \end{cases}$$

これは, [9] の最後の Example の結果を改良したものである.

ii). S^n の symmetric square $S^n \cup_{f_n} C(E^n P^{n-1})$ における attaching map f_n に対しても, i) と同じことがいえる.

iii) [14] の Lemma 8.2 における map $h_m : E^c L_p^{c(p-1)-2} \rightarrow S^c$, $c = 2m+1$, は K-P map である. 故に, Theorem i) より

$$\# h_m = p^{2m}.$$

5. K-P map の mod p Hopf invariant.

主題と離れるが, ここでは, [9] の Theorem 1.2 の mod p

versionを考える.

次のLemmaは, $H^*(L_p^k : Z_p)$ の環構造と, $\mathcal{P}$作用素 $\mathcal{P}^i$ 及び Bocksteinの作用素 Δ の性質, Ademの公式より得られる.

<u>Lemma</u> 5.1. $\lambda : E^c L_p^{2k} \to S^c$, $c = 2m+1$, $p-1 \leqq k \leqq (m+1)(p-1)-1$ ($\lambda : E^c P^{2k} \to S^c$, $1 \leqq k \leqq m$) map. iを $i(p-1) \leqq k$ ($i \leqq k$, resp.) を満たす自然数とする. λの汎関数 $\mathcal{P}^i$ (Sq^{2i})- or $\Delta\mathcal{P}^i$ (Sq^{2i+1}) - 作用素が, あるiで nontrivial なら, 任意の i で nontrivial である.

さて, inclusion $S^{2m-1} \hookrightarrow \Omega^2 S^{2m+1}$ の homotopy fibre を $Q_2^{2m-1} = \Omega(\Omega^2 S^{2m+1}, S^{2m-1})$ とする. Kを有限 CW 複体とし, 次の完全列を考える[13]:

$$\cdots \longrightarrow [EK, S^{2m-1}] \xrightarrow{E^2} [E^3K, S^{2m+1}] \xrightarrow{H^{(2)}} [K, Q_2^{2m-1}] \to \cdots .$$

<u>Lemma</u> 5.2. $\lambda \in \pi^{2m+1}(E^3K)$ に対し, $\mathcal{P}_\lambda^m \neq 0$.
$$\Rightarrow \quad H^{(2)}(\lambda) \neq 0 .$$

<u>Proof</u>. $H^{(2)}(\lambda) = 0$ と仮定すれば, 上の完全列から,

$\exists\, \theta \in \pi^{2m-1}(EK)$; $\lambda = E^2\theta$. $\mathcal{P}^m$ は cohomology suspension isom. と可換で，かつ，$\mathcal{P}^m \tilde{H}^{2m-1}(\ ;Z_p) = 0$. 故に $\mathcal{P}^m_\lambda = 0$. □

<u>Lemma</u> 5.3. $K = E^{2m-2}L_p^{2m(p-1)}$, $\lambda \in \pi^{2m+1}(E^3K)$.

$H^{(2)}(\lambda) \neq 0 \quad \Rightarrow \quad \mathcal{P}^m_\lambda \neq 0$. 即ち，$\lambda$ は K-P map.

<u>Proof.</u> $\lambda' \in \pi^{2m+1}(E^3K)$ を任意の K-P map とする．Lemmas 5.1, 5.2 より，$H^{(2)}(\lambda') \neq 0$. $\dim \leq 4mp-6$ のとき，Q_2^{2m-1} は M_p^{2mp-2} と p-同値 [13] だから，$[K, Q_2^{2m-1}] \approx [M_p^{2mp-2}, M_p^{2mp-2}] \approx Z_p$. 従って，先の完全列から，$\exists\, \theta \in \pi^{2m-1}(EK)$; $\lambda = a\lambda' + E^2\theta$, $a \equiv 1 \mod p$. 故に，

$$\mathcal{P}^m_\lambda = a\mathcal{P}^m_{\lambda'} + \mathcal{P}^m_{E^2\theta} = a\mathcal{P}^m_{\lambda'} \neq 0. \quad □$$

<u>注</u>. $\pi^{2m+1}(E^{2m+1}L_p^{2m(p-1)})$ において，K-P map が存在することは，前節 Example iii) で述べた [14] の Lemma 8.2 を使う．尚，cf. [10] Lemma 7.4.

[13] によれば，mod p Hopf homo. は $H_p = I \circ H^{(2)}$: ${}^p[E^3K, S^{2m+1}] \xrightarrow{H^{(2)}} {}^p[K, Q_2^{2m-1}] \xrightarrow{I} {}^p[E^3K, S^{2mp+1}]$ と定義される．$K = E^{2m-2}L_p^{2m(p-1)}$ のとき，I が isom. であることは，

完全列

$${}^{p}[K, Q_2^{2m-1}] \xrightarrow{I} {}^{p}[E^3K, S^{2mp+1}] \xrightarrow{\Delta} {}^{p}[EK, S^{2mp-1}]$$

において, $[EK, S^{2mp-1}] = [M_p^{2mp-1}, S^{2mp-1}] \approx Z_p$ であること, 及び Δ は degree p の map である [13] ことから出る.

以上で, 次の主張が証明された.

<u>Proposition</u> 5.4. $\lambda: E^{2m+1}L_p^{2m(p-1)} \to S^{2m+1}$ K-P map.

$$\Longleftrightarrow \quad H_p(\lambda) \neq 0.$$

<u>注</u>. $p=2$ のとき, EHP 列を用い, 全く同様な議論により, 上の結論, 即ち, [9] の Theorem 1.2 を得る.

参考文献

[1] J. F. Adams, Vector field on spheres, Ann. of Math., 75(1962), 603-632.

[2] ——, On the groups J(X)-IV, Topology, 5(1966), 21-71.

[3] M. Fujii, K_O-groups of projective spaces, Osaka J. Math., 4(1967), 141-149.

[4] K. Iriye, On the James number of cyclic maps of spheres, Japan J. Math., 10(1984), 1-8.

[5] D. S. Kahn and S. B. Priddy, Applications of the transfer to stable homotopy theory, Bull. Amer. Math. Soc., 78(1972), 981-987.

[6] T. Kambe, The structure of K_Λ-rings of the lens space and their applications, J. Math. Soc. Japan, 18(1966), 136-146.

[7] T. Kobayashi, Non-immersion theorems for lens spaces, II, J. Sci. Hiroshima Univ. Ser A-I, 32(1968), 285-292.

[8] J. Mukai, On the stable homotopy of the real projective space of even low dimension, to appear in Publ. RIMS Kyoto Univ.

[9] ——, A characterization of the Kahn-Priddy map, to appear in Advanced Studies in Pure Math..

[10] G. Nishida, The nilpotency of elements of the stable homotopy groups of spheres, J. Math. Soc. Japan, 25(1973), 703-732.

[11] ——, On the algebraic K-group of lens spaces and its applications, J. Math. Kyoto Univ., 23(1983), 211-217.

[12] H. Toda, Order of the identity class of a suspension space, Ann. of Math., 78(1963), 300-325.

[13] ——, On iterated suspensions I, J. Math. Kyoto Univ. 5(1965), 87-142.

[14] ——, On iterated suspensions II, J. Math. Kyoto Univ. 5(1966), 209-250.

[15] J. Ucci, On cyclic and iterated cyclic products of spheres, Osaka J. Math., 8(1971), 393-404.