

BP ホップ加群 スペクトラムと

BP_{*}-Adams スペクトル系列

大阪市大 理 吉村 善一

Yosimura Zen-ichi

[1] P を素数とし, $H\mathbb{Z}/p$ を \mathbb{Z}/p 係数の Eilenberg-MacLane スペクトラム, $A_p = H\mathbb{Z}/p^* H\mathbb{Z}/p$ を法 P の Steenrod 代数とする。素数作用素 $\rho^i, i > 0, (P=2$ のとき $\rho^i = S_q^{2^i})$ によって生成される A_p のホップ部分代数を \mathcal{P} で表すと, $P \neq 2$ のとき \mathcal{P} は多元環として $A_p / (\theta_0)$ に同型である。但し, (θ_0) は Bockstein 作用素 $Q_0 = \Delta$ によって生成される A_p の両側イデアルである。Brown-Peterson (1966) は \mathbb{Z}/p 係数コホモロジー群が A_p 加群として $A_p / (\theta_0)$ になるスペクトラム BP を構成した。

又, Milnor 元 $Q_i = [\rho^{P^{i-1}}, Q_{i-1}], i \geq 0,$ によって生成される A_p のホップ部分代数を \mathcal{Q} で表すと, $P \neq 2$ のとき積が同型 $\mathcal{Q} \otimes \mathcal{P} \cong A_p$ を与える。 \mathcal{Q} は外積代数 $E(Q_0, Q_1, \dots)$ であるから, \mathbb{Z}/p 係数コホモロジー群が A_p 加群として $E(Q_0, Q_1, \dots, Q_n)$ になるスペクトラムを $V(n)$ によって表す。 $V(0)$ は \mathbb{Z}/p 型 Moore スペクトラム $S\mathbb{Z}/p$ であるから全ての素数 P に対し存在する。Toda(-Smith) (1971) は $P \geq 3$ のとき $V(1)$ の存在, $P \geq 5$ のとき

$V(2)$ の存在, $P \geq 7$ のとき $V(3)$ の存在を示し, $P = 2$ のとき $V(1)$ の非存在, $P = 3$ のとき $V(2)$ の非存在を示した. この存在証明には Adams スペクトル系列 $E_2^{**} = \text{Ext}_{A_P}^{**}(\mathbb{H}\mathbb{Z}/p^*Y, \mathbb{H}\mathbb{Z}/p^*X) \Rightarrow [X, Y]_*$ が用いられた.

[2]. 複素 Thom スペクトラム MU の P 局所化 $MU_{\mathbb{Z}(P)}$ は Brown-Peterson スペクトラムのユニバーサル和 $\bigvee \Sigma^{m(i)} BP$ として書ける. BP ホモロジー $BP_*()$ は乗法的なので BP は環スペクトラムである. その係数群は $BP_* = \mathbb{Z}_{(P)}[v_1, \dots, v_n, \dots]$ であり, BP ホモロジー群 $BP_*BP = BP_*[t_1, \dots, t_n, \dots]$ である. 但し, $\dim v_n = \dim t_n = 2(P^n - 1)$. $BP_*BP \cong \text{Hom}_{BP_*}(BP_*BP, BP_*)$ であるから, $t^E = t_1^{e_1} \dots t_n^{e_n}$, $E = (e_1, \dots, e_n, 0, \dots)$, の双対元を $r_E: BP \rightarrow \Sigma^{|E|} BP$, $|E| = \sum_{i=1}^n 2(P^i - 1)e_i$, とすると BP コホモロジー群 $BP_*BP = \prod_E BP_* \{r_E\}$ となる. 従って, BP ホモロジー群 BP_*X は BP_* 加群であって, BP 作用素 r_E がその上に作用している. このような BP_* 加群を BP_*BP 余加群とよぶ.

BP_* のイデアル J が全ての BP 作用素 r_E に対し $r_E J \subset J$ と閉じているとき, J を不変イデアルとよぶ. このとき, BP_*/J は BP_*BP 余加群になる. イデアル $I_n = (P, v_1, \dots, v_{n-1})$, $1 \leq n \leq \infty$, は明らかに不変イデアル

であるが、逆に不変素イデアルは I_n 以外にはない。又、 $V(n)$ の BP ホモロジー群は BP_*BP 余加群として BP_*/I_n と同型である。

BP_* の不変イデアル $J = \{f_0, f_1, \dots, f_{n-1}\}$ が正則であるとは、 $J_m = \{f_0, \dots, f_{m-1}\}$, $0 \leq m \leq n$, とおくと $0 \rightarrow BP_*/J_m \xrightarrow{i_m} BP_*/J_m \rightarrow BP_*/J_{m+1} \rightarrow 0$, $0 \leq m \leq n-1$, が完全列になるときに云う。不変素イデアル I_n の一般化とみよせる不変正則イデアル J に対し、その BP ホモロジー群が BP_*BP 余加群として BP_*/J と同型になるスペクトラム X_J の存在、非存在を調べることは興味深い。その方向での一つの部分的な存在定理として、次の結果が得られる。

定理 (下村-吉村) p は奇素数で、 $J = \{f_0, f_1, \dots, f_{n-1}\}$ は BP_* の不変正則イデアルとする。 $n^2 + n < 2p$ のとき、 BP_*Y_J が BP_*BP 余加群として $v_n^{-1}BP_*/J$ と同型になる BP 局所化スペクトラム Y_J が唯一つ存在する。

[3] Adams-Novikov スペクトル系列 $E_2^{*,*} = \text{Ext}_{BP_*BP}^{*,*}(BP_*, BP_*Y)$ $\Rightarrow \pi_*(BP \wedge Y)$ は BP_*Y の相対移入分解を幾何学的に構成することにより与えられる。実際、コファイバー列 $S \xrightarrow{i} BP \xrightarrow{\pi} \overline{BP}$ に対し、次の列

$$Y \xrightarrow{i_{n-1}} BP \wedge Y \xrightarrow{d_1} \overline{BP} \wedge BP \wedge Y \xrightarrow{d_2} \overline{BP}^2 \wedge BP \wedge Y \xrightarrow{d_3} \dots$$

$$\pi_{n-1} \searrow \overline{BP} \wedge Y \xrightarrow{i_{n-1}} \overline{BP}^2 \wedge Y \nearrow$$

を考えると、これは拡大 BP_*BP 余加群による BP_*Y の相対移入分解

$$0 \rightarrow BP_*Y \rightarrow BP_*(BP \wedge Y) \rightarrow BP_*(\overline{BP} \wedge BP \wedge Y) \rightarrow \dots$$

$$\begin{array}{ccc} \Downarrow & & \Downarrow \\ BP_*BP \otimes_{BP_*} BP_*Y & & BP_*BP \otimes_{BP_*} BP_*(BP \wedge Y) \end{array}$$

を導く。写像 $\overline{BP}^{m+1} \wedge Y \rightarrow \Sigma^{m+1}Y$ のファイバー $K_m Y$ が作る逆系 $\{\Sigma^{-m}K_m Y\}_{m \geq 0}$ を用いてスペクトル系列 $\{E_r^{*,*}\}_{r \geq 1}$ を構成すると、 $BP \wedge Y = \varprojlim \Sigma^{-m}K_m Y$ のホモトピー群に収束する Adams-Novikov スペクトル系列が得られる。

そこで、 BP_*BP 余加群 BP_*Y よりもっと一般的な BP_*BP 余加群、例えば BP_*/J 、 J は不変正則イデアル、に対し幾何学的な相対移入分解を構成したい。

定義 1 CW スペクトラム E が BP ホップ加群スペクトラムであるとは、 E が結合的 BP 加群スペクトラムであって、 $\varphi \cdot \eta = 1$ と $(1 \wedge \eta)\eta = (1 \wedge \eta \wedge 1)\eta$ をみたす BP 加群写像 $\eta: E \rightarrow BP \wedge E$ をもつことを云う。

$BP \wedge Y$ は $\eta = 1 \wedge \eta \wedge 1: BP \wedge Y \rightarrow BP \wedge BP \wedge Y$ をもつ BP ホップ加群スペクトラムである。 E が BP ホップ加群スペクトラムならば、 η のホモトピー群 E_* は BP_*BP 余加群である。

BP_* の不変正則イデアル $J = \langle \eta_0, \eta_1, \dots, \eta_{n-1} \rangle$ に対し、ホモトピー群が BP_* 加群として BP_*/J になる結合的 BP 加

群スペクトラム BPJ が存在する。しかも, BPJ_m と BPJ_{m+1} との間は, コファイバー列 $\Sigma^{d_m} BPJ_m \xrightarrow{f_m} BPJ_m \xrightarrow{j_m} BPJ_{m+1} \xrightarrow{k_m} \Sigma^{d_{m+1}} BPJ_m$ が得られる。ここで, $d_m = \dim f_m$ で f_m は f_m による積写像である。

合成写像 $j_{n-1} \cdots j_0 : BP \rightarrow BPJ$ を j と書く。

命題 1 $J = \{f_0, f_1, \dots, f_{n-1}\}$ を BP_* の不変正則イデアルとする。 $n < 2(p-1)$ のとき, BPJ は BP ホップ加群スペクトラムであって, $j : BP \rightarrow BPJ$ は BP ホップ加群写像である。

証明は BP^*BP 余加群の原始生成 BP^* 加群の計算により代数的に示されるので, その際 $n < 2(p-1)$ の仮定が必要となる。この仮定を除くには, 命題を代数的でなく幾何的に証明することが必要と思える。

[4] **定義 2** E を BP ホップ加群スペクトラムとする。 CW スペクトラムと写像からなる複体 $W = \{W_k, d_k : W_k \rightarrow W_{k+1} \mid k \geq 0\}$ が E 上の BP 幾何分解であるとは, 次の i), ii), iii) をみたすときに云う。

i) $(1 \wedge d_0) \delta = 0$ をみたす BP ホップ加群写像 $\delta : E \rightarrow BP \wedge W_0$ が存在する。

ii) 次の列は BP 加群スペクトラムとして分解する。

$$* \rightarrow E \xrightarrow{\delta} BP \wedge W_0 \xrightarrow{1 \wedge d_0} BP \wedge W_1 \xrightarrow{1 \wedge d_1} \cdots \rightarrow BP \wedge W_k \rightarrow \cdots$$

すなわち, BP加群写像 $\varepsilon: BP \wedge W_0 \rightarrow E$ と $\Delta_k:$
 $BP \wedge W_{k+1} \rightarrow BP \wedge W_k$ が存在して, $\varepsilon \Delta_0 = 0 = \Delta_k \Delta_{k+1}$
 $\varepsilon \delta = 1, \quad \delta \varepsilon + \Delta_0 (1 \wedge d_0) = 1, \quad (1 \wedge d_k) \Delta_k + \Delta_{k+1} (1 \wedge d_{k+1})$
 $= 1, \quad k \geq 0,$ をみたす.

iii) 結合的BP加群スペクトラム $Y_k, k \geq 0,$ が存在して
 $BP \wedge Y_k$ はBPホップ加群スペクトラムとして $E \wedge W_k$
 と同型である.

定理2 E をBPホップ加群スペクトラムとすると, E 上
 のBP幾何分解 $W_E = \{ W_k = \overline{BP}^k \wedge E, d_k: W_k \rightarrow W_{k+1} \}$
 が存在する.

E がBPホップ加群スペクトラムならば, $\overline{BP} \wedge E$ も又BP
 ホップ加群スペクトラムになるので, $d_E = (\pi \wedge 1) \eta: E$
 $\rightarrow BP \wedge E \rightarrow \overline{BP} \wedge E$ と定義することにより $d_k, k \geq 0,$ は
 帰納的に得られる.

$W_{BP, Y} = \{ W_k = \overline{BP}^k \wedge BP \wedge Y, d_k \}_{k \geq 0}$ を Adams BP幾何
 分解とすると, コファイバー列 $K_{m-1} Y \xrightarrow{b_{m-1}} W_m \xrightarrow{c_m} K_m Y \xrightarrow{a_m}$
 $\Sigma^1 K_{m-1} Y$ が次の可換図式を与える.

$$\begin{array}{ccccccc}
 W_0 & \xrightarrow{d_0} & W_1 & \xrightarrow{d_1} & W_2 & \xrightarrow{d_2} & W_3 \rightarrow \dots \\
 & & \downarrow c_1 & \nearrow b_1 & \downarrow c_2 & \nearrow b_2 & \\
 & & K_1 Y & & K_2 Y & &
 \end{array}$$

定義3 BP幾何分解 $W = \{ W_k, d_k \}_{k \geq 0}$ が因子系
 $\{ X_m, a_m, b_{m-1}, c_m \}_{m \geq 1}$ をもつとは

$$i) \quad X_{m-1} \xrightarrow{b_{m-1}} W_m \xrightarrow{c_m} X_m \xrightarrow{a_m} \Sigma^1 X_{m-1} \text{ がファイバー列で}$$

$$ii) \quad d_m = b_m \cdot c_m : W_m \rightarrow X_m \rightarrow W_{m+1}$$

をみたすときを云う。

L_n を $v_n^{-1} BP_*$ 局所化関手とする。 BP_* の不変正則イデアル $J = \{f_0, f_1, \dots, f_{n-1}\}$ に対し, $L_n BPJ = v_n^{-1} BPJ$ で, これは $n < 2(p-1)$ のとき BP ホップ加群スペクトラムである。

定理 3 p は奇素数とし, $J = \{f_0, f_1, \dots, f_{n-1}\}$ は BP_* の不変正則イデアルとする。 $n^2 + n < 2p$ のとき, BP 幾何分解 $W_{v_n^{-1} BPJ} = \{L_n W_k = \overline{BP}^k \wedge v_n^{-1} BPJ, d_k\}_{k \geq 0}$ は因子系 $\{X_m\}_{m \geq 1}$ を唯一持つ。

$\text{Ext}_{BP_* BP}^{m+k, -m-t}(BP_*, v_n^{-1} BPJ_*) = 0, \quad m \geq 1, k \geq 1,$
 $t \in \Lambda_J = \{\sum_{0 \leq i \leq n-1} t_i (d_i + 1); t_i = 0, 1 \quad d_i = \dim f_i\}$
 が示せるので, $k=2$ のとき因子系の存在の障害が消え, $k=1$ のとき因子系の唯一性の障害が消えるので, 定理が得られる。

命題 4 $J = \{f_0, f_1, \dots, f_{n-1}\}$ は BP_* の不変正則イデアルとし, $W = \{W_k, d_k\}_{k \geq 0}$ は $v_n^{-1} BPJ$ 上の BP 幾何分解で因子系 $\{X_m\}_{m \geq 1}$ を持つとする。 もし $p-1 \neq n$ ならば, $BP \wedge X_\infty$ は BP ホップ加群スペクトラムとして $v_n^{-1} BPJ$ と同型である。 即ち, $X_\infty = \varprojlim \Sigma^{-n} X_n$ である。

ある。

W の因子系 $\{X_m\}_{m \geq 1}$ を用いて構成される BP_* -Adams
 スペクトル系列 $E_2^{*,*} = \text{Ext}_{BP_*}^{*,*}(BP_*, \nu_n^{-1}BPJ_*Y) \Rightarrow$
 $\pi_*(Y \wedge X)_\infty$, 但し $(Y \wedge X)_\infty = \varprojlim \Sigma^{-m} Y \wedge X_m$, は
 $P-1$ の n のとき有限収束する。 したがって, $Y \wedge X_\infty$ は
 $(Y \wedge X)_\infty$ と同型になり, 特に $BP \wedge X_\infty$ は $(BP \wedge X)_\infty$ と
 同型である。 したがって, $BP \wedge X_\infty$ が $\nu_n^{-1}BPJ$ と
 BP ホップ加群スペクトラムと同型になることが示せる。

定理 3 と命題 4 を用いると次の主定理が得られる。

定理 5 P は奇素数とし, $J = \{f_0, f_1, \dots, f_{n-1}\}$ は BP_* の
 不変正則イデアルとする。 $n^2 + n < 2P$ のとき, $BP \wedge Y_J$
 が BP ホップ加群スペクトラムとして $\nu_n^{-1}BPJ$ と同型にな
 る BP 局所化スペクトラム Y_J が唯一存在する。

詳細は K. Shimomura - Z. Yosimura "BP-Hopf
 module spectrum and BP_* -Adams spectral sequence"
 を参照して頂きたい。